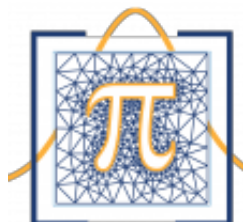

Universidad Nacional Autónoma de
Honduras



Maestría en Matemática con
orientación en Ingeniería Matemática



Título:

Un modelo de flujo de tráfico vehicular en una
red vial

Tesis de maestría presentada por:

José Mauricio Alvarenga Rodríguez

Asesor: M.Sc. Iván Yessel Henríquez Rivera

Fecha: Tegucigalpa, junio 2020

Índice General



1	Introducción	1
1	Congestión vehicular	1
2	Modelo continuo del tráfico vehicular	3
3	Modelo macroscópico	4
2	Descripción del modelo	8
1	Modelo continuo del tráfico vehicular	8
2	Modelo de tráfico vehicular con flujo dependiente de la variable espacial	11
3	Modelo lineal de velocidad y análisis del problema de Riemann	14
4	Análisis de las condiciones de frontera	16
5	Modelo lineal de velocidad y análisis de las condiciones iniciales y de frontera	18
6	Red de tráfico vehicular	21
7	Optimización del flujo del tráfico vehicular a través de las intersecciones	27
7.1	Intersección de cuatro carreteras	28
7.2	Intersección de tres carreteras	30
3	Marco computacional	32
1	Esquemas numéricos para modelos macroscópicos	32
2	Método de volúmenes finitos para la ley de conservación escalar	33
3	Método de Godunov aplicado al modelo lineal con flujo dependiente de la variable espacial	34
4	Ejemplos Numéricos	38

4	Datos del tráfico vehicular	41
1	Metodología de la recolección de datos del tráfico	41
2	Caso de estudio carretera I-80, línea 3, Estados Unidos	44
	Diagrama Fundamental	45
3	Caso de estudio carretera I-80, línea 2, Estados Unidos	48
4	Caso de estudio Anillo Periférico, Greenshield	49
5	Caso de estudio Anillo Periférico, Greenshield espacial.	53
5	Conclusiones y trabajos a futuro	55
1	Conclusiones	55
2	Trabajos a futuro	56
6	Apéndice	58
1	Ecuaciones Cuasilineales	58
	1.1 Superficies	58
	1.2 Curvas y superficies integrales	60
	1.3 Ecuación diferencial parcial cuasilineal	71
	1.4 Choque de curvas características	75
2	Red de tráfico vehicular	78

Lista de figuras

1.1	La gráfica de arriba corresponde al parque vehicular en miles por año en todo el mundo.	2
1.2	La gráfica de arriba muestra, según datos del banco mundial, el porcentaje de emisiones de CO ₂	2
1.3	Velocidades y densidades promedio de una sección de carretera de la ciudad de Los Ángeles, datos obtenidos de [14].	6
2.1	Flujo de velocidad máxima lineal.	13
2.2	Flujo de velocidad máxima con decaimiento.	13
2.3	Flujo de velocidad máxima con oscilaciones.	14
2.4	En la figura se observa una red de carreteras.	22
2.5	Aristas de una intersección de un grafo de carreteras.	23
2.6	Etiquetado de las aristas de un vértice, parte de un grafo de carreteras.	23
2.7	Intersección de cuatro carreteras.	28
2.8	Casos de las intersecciones de tres carreteras.	30
4.1	Partición de una carretera.	41
4.2	Sección de carretera dividida en 8 pedazos, los puntos negros representan las posibles posiciones de los vehículos en alguno de los cuadros del video.	42
4.3	En la figura se observan las densidades promedio con las respectivas velocidades promedios de los carros que circularon por el carril 1 de la calle I-80.	47
4.4	En la figura se observan las densidades promedio con las respectivas velocidades promedios de los carros que circularon por el carril 1 de la calle I-80, además la línea continua muestra la regresión lineal para esta información.	47
4.5	Promedios de la partición espacio-densidad	48

4.6	En la figura se observan las densidades comparadas con las respectivas velocidades del estudio (puntos blancos), los puntos negros representan una regresión lineal de estos puntos.	51
6.1	En la figura se pueden observar a las curvas características coincidiendo y siendo separadas por la curva γ	76
6.2	Definición de argumento.	78

Lista de tablas

3.1	Relación flujo densidad. En la relación, q representa la densidad y f representa el flujo. Las literales a, b, c y d representan los parámetros del modelo.	6
4.1	Errores del ejemplo 4.1	39
4.2	Errores del ejemplo 4.2	39
4.3	Errores del ejemplo 4.3	40
4.1	Flujos de una sección de carretera de Tegucigalpa.	50
4.2	Densidades en una sección de carretera de Tegucigalpa.	51
4.3	Flujos, densidades y velocidades recolectadas de una sección del anillo periférico.	52

Resumen

Desde la década de los cuarenta se han desarrollado diferentes enfoques teóricos y prácticos para entender la dinámica del tráfico vehicular, todos estos esfuerzos se ven reunidos en una teoría conocida con el nombre de modelos continuos del tráfico vehicular; una de sus ramas es conocida como la teoría de *modelos macroscópicos del tráfico vehicular*. En este trabajo se ha considerado estudiar un modelo macroscópico para una red de carreteras; en tal modelo el sistema de carreteras se modela como si fuese un grafo y cada aristas está asociada a una ecuación diferencial que modela la densidad vehicular de la carretera a la cual representa dicha arista, aquí se ha considerado integrar al modelo de redes de carreteras, un flujo que depende de la variable espacial, este último aspecto da lugar a uno de los aportes de esta tesis, esto es, el estudio de las condiciones de flujo en las intersecciones del grafo.

Por otro lado, se implementó y validó un método numérico apropiado para resolver la ecuación diferencial inherente al modelo. El método numérico utilizado fue el de volúmenes finitos, particularmente se implementó el método de Godunov y dado que no existía una forma explícita del flujo numérico para el modelo con flujo dependiente de la variable espacial, en este trabajo se construyó tal flujo y se encontró la condición de estabilidad para este esquema numérico.

En el último capítulo se desarrollaron dos estrategias metodológicas, una para obtener datos del tráfico por medio de un video y otra usando bases de datos públicas. Con la información recolectada se plantearon algunas estrategias para estimar los parámetros del modelo con flujo dependiente de la variable espacial y se comparó la bondad de estas estimaciones con respecto al modelo del que se deriva.

Introducción

1 Congestión vehicular

Está claro que el crecimiento pronunciado de la población mundial y el beneficio evidente de tener un vehículo, han aumentado la demanda de este bien material, como se puede apreciar en la Figura 1.1 ¹ el número de vehículos en circulación en todo el mundo, crece a una tasa aproximadamente constante, lo anterior ha desarrollado inevitables efectos indeseables en la manera como los humanos nos transportamos y comportamos. El principal problema generado por el aumento de automotores en uso, es el correspondiente al *congestionamiento vehicular*, término que hace referencia al flujo lento o interrumpido de vehículos en una carretera o red vial.

Las dificultades generadas por el congestionamiento vehicular son muchas:

1. Largos periodos del tiempo en el tráfico vehicular que recaen en el desperdicio del potencial humano.
2. El combustible como cualquier recurso debe ser usado de forma eficiente; cuando un vehículo pasa demasiado tiempo en circulación, se ve afectada la forma en la que se consume este recurso.

¹Los datos fueron obtenidos del sitio web [15], en tal sitio se especifica que la fuente de los datos es obtenida de revistas científicas, comunicaciones oficiales, informes comerciales, libros y otras publicaciones estadísticas relevantes.

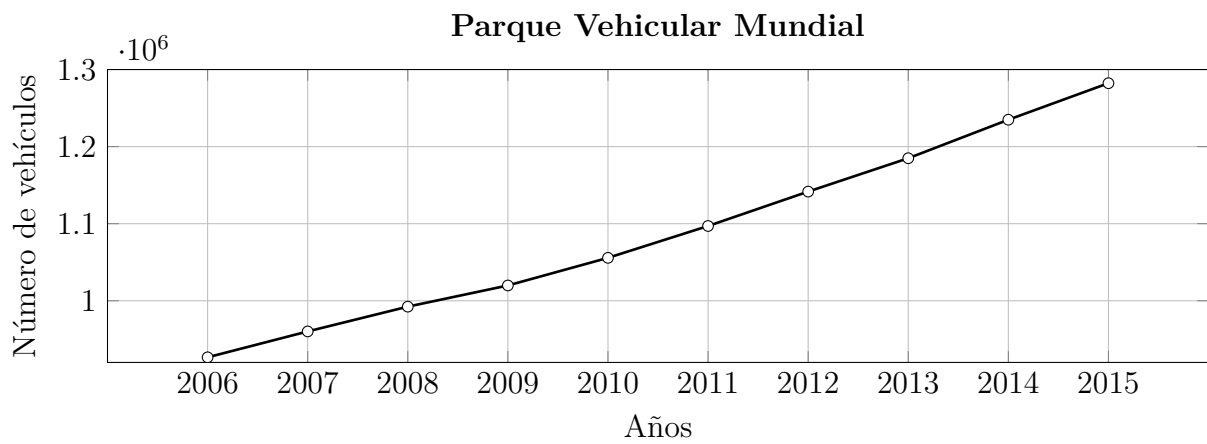


Figura 1.1: La gráfica de arriba corresponde al parque vehicular en miles por año en todo el mundo.

3. Aumento en la contaminación atmosférica, esto se puede constatar en la Figura 1.2 donde se puede observar el porcentaje de emisiones de CO₂ a causa del transporte en Honduras (línea continua) y en el mundo (línea punteada)².

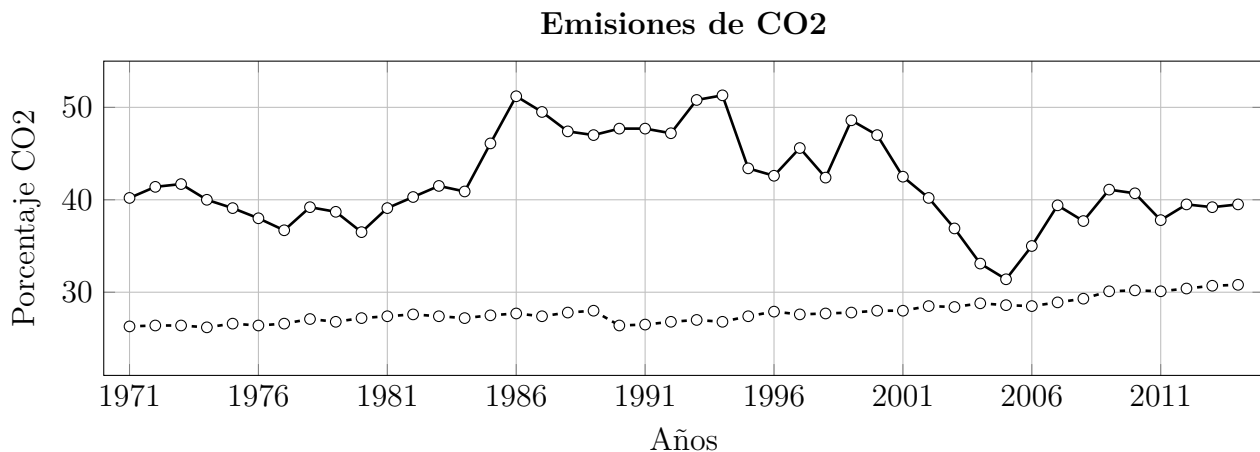


Figura 1.2: La gráfica de arriba muestra, según datos del banco mundial, el porcentaje de emisiones de CO₂.

En el 2001 se hizo un estudio sobre las causas y consecuencias de la congestión vehicular [18]. De este trabajo se rescatan las siguientes observaciones:

1. El 3.5% del PIB de América Latina y el Caribe está invertido en la circulación vehicular de las principales ciudades de la zona; este porcentaje evidentemente aumentará con el tiempo, hecho que se refleja en el parque vehicular.

²Datos obtenidos de la página del banco mundial

2. Las principales vías de carreteras en horas pico, funcionan cerca de su capacidad máxima, generando así un sistema caótico; puesto que ligeros aumentos en ciertas zonas de la red vial se traducen en un aumento inevitable del tráfico.
3. La tarifa del transporte público aumenta con el congestionamiento vehicular. De acuerdo a un informe de la CEPAL en 1982(Chile), se estimó que un aumento en la velocidad de conducción(15km/h a 17.5km/h) en las horas pesadas del tráfico, permitiría una reducción del 5% en el precio del transporte público.

Por todo lo anterior se evidencia la necesidad de invertir esfuerzos en el tema del tráfico vehicular, en este documento se aborda este punto desde la óptica de las matemáticas aplicadas. Hace poco más de cinco décadas se originó una teoría asociada al modelo continuo del tráfico vehicular, este último enfoque se ha desarrollado sobre diferentes aristas para múltiples propósitos, dentro sus principales objetivos se pueden encontrar los siguientes:

1. Construir modelos que puedan capturar diferentes características del tráfico.
2. Desarrollar modelos que capturen las dependencias entre las variables asociadas de una forma precisa.
3. En el plano de la construcción vial, el desarrollo de simulaciones es indispensable para la toma de decisiones.
4. Predicción de la dinámica del tráfico vehicular en entornos donde los vehículos son controlados por sistemas inteligentes.

En la siguiente sección se dará una breve descripción de los modelos continuos del tráfico vehicular y se resaltaré el modelo con el que se trabajó en esta tesis.

2 Modelo continuo del tráfico vehicular

Cuando se asume que algunas de las variables asociadas al tráfico vehicular tales como, la velocidad, la densidad vehicular, el flujo vehicular, la aceleración, dependen continuamente del tiempo, entonces se dice que el modelo que se está estudiando es continuo. Dos modelos se han estudiado ampliamente desde este enfoque, los modelos macroscópicos y los modelos

microscópicos (existe una combinación de ambos, llamados mesoscópicos).

Todos los modelos continuos de tráfico vehicular tienen un origen común en el trabajo realizado por Greenshields en [6], donde se midieron las velocidades promedio de grupos de vehículos en el tráfico, sometidos a diferentes escenarios. Como una de las conclusiones importantes de este trabajo se extrajo que la velocidad promedio depende de las distancias entre los vehículos del sistema, naturalmente esto no debe sorprender en absoluto, no resulta demasiado difícil llegar a esta conclusión con la experiencia adquirida como usuarios del sistema de transporte, sin embargo, la forma precisa en la que esta relación se sostiene, es un aspecto que está lejos de ser trivial, este es uno de los puntos que hace que en la actualidad se disponga de un amplio abanico de formas en las que estas dos cantidades están relacionadas y considerando además otras variables que a inicios no se tomaron en cuenta.

Un último aspecto define a los modelos continuos del tráfico vehicular, y esto recae explícitamente en la palabra "continuo", además de que en principio se asume que diferentes variables del tráfico se encuentran relacionadas, también se presume que es posible predecir la evolución de algunas de las variables del tráfico en función del tiempo, esta última característica es la que da lugar a dos ramas bastante marcadas de esta teoría, los modelos macroscópicos y microscópicos. En las siguientes secciones se encontrará una descripción de los modelos macroscópicos.

Los modelos microscópicos no serán objeto de estudio en este trabajo, la principal característica de estos modelos es que cada vehículo en el sistema es modelado como una partícula. Una de las principales ventajas de los modelos microscópicos es que son capaces de representar con bastante fidelidad la dinámica real del tráfico vehicular al modelar por separado a cada vehículo, para más detalle se puede consultar el trabajo [1].

3 Modelo macroscópico

Una de las primeras corrientes desde donde se estudia la dinámica del tráfico vehicular es la que concierne a los modelos macroscópicos, esta visión proviene de la mecánica de fluidos y se le puede atribuir a Michael James Lighthill y Gerald Whitham, su trabajo se puede encontrar plasmado en los artículos [11, 12]. Desde este punto de vista, se imagina al tráfico vehicular como un fluido dinámico gobernado por variables macroscópicas como la densidad, el flujo, la

velocidad o la presión.

Además de las dos publicaciones de Whitham y Lighthill, de manera independiente, Richards desarrolla en [16] un modelo del tráfico desde la óptica, nuevamente, de los fluidos mecánicos, en este trabajo se modela al tráfico como un fluido compresible (la densidad no necesariamente se mantiene constante) donde la velocidad del fluido depende únicamente de la densidad, es por esto que a este tipo de modelos se les conoció en sus inicios como los modelos LWR(Lighthill-Whitham-Richards).

En los modelos LWR se considera al conjunto de vehículos del sistema como si estos fueran un fluido, naturalmente la distancia entre los vehículos puede ser extrapolada a la densidad de este suscitado flujo, es por este detalle que se acuña a estos modelos el termino macroscópico. Por otro lado, al considerar el tráfico como un flujo mecánico, se puede definir la dinámica de este fluido usando toda la vasta teoría de la mecánica de fluidos.

Uno de los principales atractivos del enfoque macroscópico es su capacidad para representar características complejas del tráfico con una formulación compacta y sencilla, esto hace que este modelo tenga preferencia ante situaciones en las que no se requiere una resolución alta de la dinámica del tráfico vehicular, como es el caso de redes de tráfico vehicular.

En este documento se logró manipular una base de datos³ y se estudió la relación que se presume en los modelos LWR. En la Figura 1.3 se puede apreciar la relación entre velocidad y densidad. En los modelos LWR se asume que el flujo depende exclusivamente de la densidad, y además se asume que el flujo se puede expresar como el producto de la velocidad del flujo y la densidad, donde la velocidad a su vez depende de la densidad de una forma decreciente, este último aspecto se reconoce en la Figura 1.3.

En este tipo de modelos existen diferentes propuestas en las formas en que el flujo vehicular depende de la densidad, la Tabla 3.1 recoge algunas propuestas con respecto a este componente.

Como se puede esperar, de acuerdo a la variedad de formas mostradas en la Tabla 3.1, la fidelidad de la relación posible entre la densidad y el flujo, requieren de mucha atención, es por esto que en este trabajo se tomará como primer punto de partida, un flujo que depende tanto de la densidad como de la variable espacial, esta mejora ya se ha considerado en otros trabajos, como un ejemplo se cita el artículo [20] donde se considera este enfoque. Al considerar un flujo

³Proyecto NGSIM (proyecto estadounidense que registró con un conjunto de cámaras, variables como la velocidad y posición de los vehículos en cuatro autopistas de las ciudades de California y Connecticut)

Relación fundamental entre densidad y velocidad

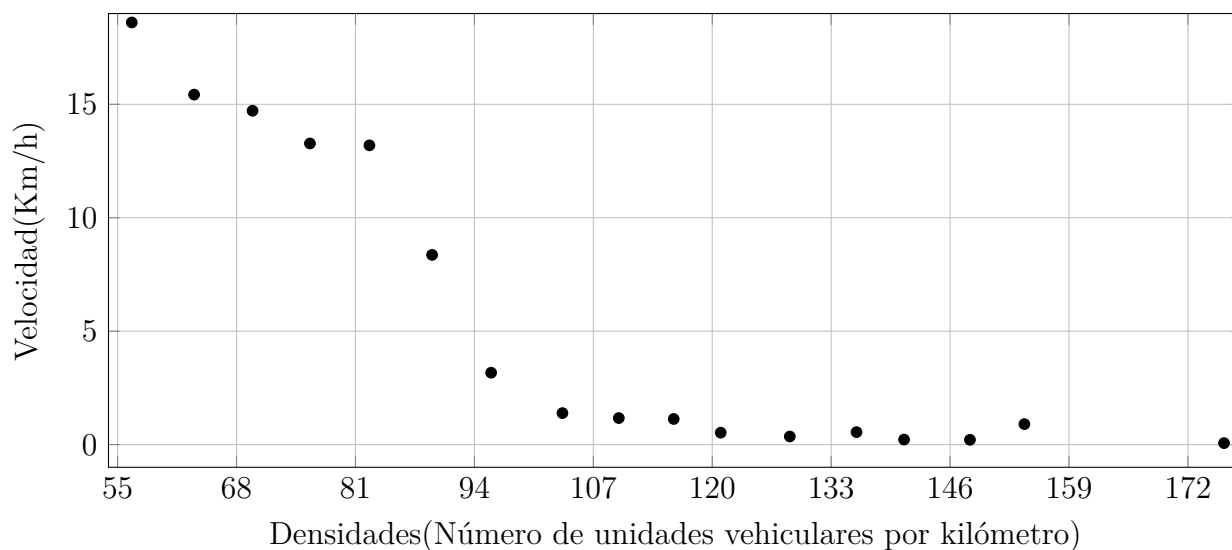


Figura 1.3: Velocidades y densidades promedio de una sección de carretera de la ciudad de Los Ángeles, datos obtenidos de [14].

Autor	Forma de la relación	Ecuación
Greenshields [6]	Parabólica	$f(q) = aq^2 + bq$
Daganzo [3]	Bílineal	$f(q) = \begin{cases} aq + b & \text{Si } q < \bar{q} \\ cq + d & \text{Si } q \geq \bar{q} \end{cases}$
Greenberg [5]	Logarítmica	$f(q) = aq \ln\left(\frac{b}{q}\right)$
Smulders [17]	Lineal-Parabólica	$f(q) = \begin{cases} aq^2 + bq & \text{Si } q < \bar{q} \\ cq + d & \text{Si } q \geq \bar{q} \end{cases}$

Tabla 3.1: Relación flujo densidad. En la relación, q representa la densidad y f representa el flujo. Las literales a, b, c y d representan los parámetros del modelo.

que depende de la variable espacial, se agrega un grado de libertad más, por lo que se espera que la relación entre el flujo y la densidad sea más representativa con respecto a los datos.

Una de las desventajas que se pueden encontrar en los flujos que dependen únicamente de la densidad, es el fenómeno de histéresis, este hace alusión a la recuperación tardía en el proceso de desaceleración-aceleración, según algunos trabajos, como un ejemplo en [9], este evento no se captura de manera correcta con los modelos en que los flujos dependen exclusivamente de la densidad, para ser más específicos, se ha mostrado mediante algunos ejemplos, que la cantidad definida como aceleración del tráfico, puede llegar a ser infinita, en contradicción con lo que se observa en situaciones reales. En esta tesis, como se mencionó antes, se usa un flujo que

depende tanto de la variable espacial y la densidad, con este modelo se puede probar que al considerar un problema de Riemann, no se presenta una aceleración del tráfico infinita.

La dinámica de la densidad vehicular viene dada en términos de una ley de conservación, la ecuación en cuestión es :

$$q_t + [f(q, x)]_x = 0. \quad (3.1)$$

Además de la ecuación (3.1) algunos autores también consideran la posibilidad de integrar en la ecuación, la derivada espacial de la densidad de manera que el flujo dependa de esta. Como un ejemplo en [4] se considera un flujo de la forma $f(q, q_x) = \hat{f}(q) - \mu q_x$, lo cual da lugar a una ecuación de la forma:

$$q_t + \hat{f}'(q)q_x = \mu q_{xx}.$$

En la relación anterior se observa una inclusión de un término difusivo y su principal crítica proviene del hecho que la densidad vehicular se ve representada de forma poco precisa, dado que en estos modelos la dinámica de los vehículos se ve afectada por la información proveniente de los vehículos posicionados a sus espaldas. A este tipo de modelos dentro de la teoría macroscópica del tráfico vehicular, se le conocen como modelos de alto orden.

Otra línea de investigación de interés para este trabajo corresponde a la modelación de una red de tráfico vehicular, uno de los primeros avances en esta dirección se debe a Holden y Risebro en [8], en este trabajo se plantea un modelo para un conjunto de carreteras conectadas y se analizan las condiciones de flujo a través de las intersecciones, bajo el supuesto que los vehículos en este sistema se conducen por las carreteras con menores densidades. Una forma de incluir la intencionalidad del flujo vehicular, se logra integrando al modelo propuesto por [8] una matriz de distribución del flujo vehicular, se puede encontrar una definición precisa en [2]. Uno de los principales objetivos de esta tesis es hacer un estudio de las condiciones de flujo encontradas en [8] en el contexto de un flujo que depende de la densidad y la variable espacial.

Descripción del modelo

En este capítulo se iniciará detallando el modelo macroscópico, seguidamente se estudiarán algunas propiedades del flujo utilizado en este documento y finalmente se encontrarán las condiciones de flujo en una red de tráfico, para que este sistema se encuentre bien definido; este último aspecto constituye uno de los aportes de este trabajo.

1 Modelo continuo del tráfico vehicular

En la presente sección se describirán todas las cantidades asociadas al tráfico vehicular desde el enfoque macroscópico del modelo continuo y además se derivará la ecuación diferencial fundamental que se ha usado en este trabajo.

Para poder describir el modelo continuo del tráfico vehicular es de gran importancia poder comprender y definir las tres variables asociadas al problema físico; velocidad, densidad y flujo. A continuación se presenta como en [7] una definición precisa de velocidad.

Definición 1.1

Se define el campo de velocidades $V(x, t)$ de la siguiente forma: Sea $x(t)$ la trayectoria de un vehículo visto como una partícula en la carretera asociada al problema, entonces V debe satisfacer la siguiente ecuación: $V(x(t), t) = x'(t)$

Ahora se define con precisión cuando un vehículo cruza un punto X de la carretera.

Definición 1.2

Suponga que $x(t)$ representa la trayectoria de un vehículo, se dice que este vehículo cruza el punto X en el intervalo de tiempo $[t, \tau]$ si su trayectoria satisface lo siguiente:

1. $x(s) \leq X$ para $s < t$.
2. Existe un \hat{t} , $t \leq \hat{t} \leq \tau$, tal que $x(\hat{t}) > X$.

Se denotan a continuación dos cantidades asociadas al flujo y densidad del tráfico:

$C(x, t, \tau)$: Número de vehículos que cruzan el punto x en el intervalo de tiempo $[t, \tau]$.

$E(t, a, b)$: Número de vehículos dentro del trozo de carretera $(a, b]$ al tiempo t .

Una observación importante se hace a continuación, sean t , τ y $\hat{\tau}$ tales que $t < \tau < \hat{\tau}$, un vehículo con trayectoria $x(t)$ no puede ser contabilizado en ambas funciones $C(x, t, \tau)$, $C(x, \tau, \hat{\tau})$, dicho de otra forma este vehículo no puede cruzar x en el intervalo $[t, \tau]$ y $[\tau, \hat{\tau}]$. Suponer que lo anterior es posible implicaría desde la definición que $x(s) \leq x$ para $s < \tau$ y $x(\tau) > x$ lo que a su vez implicaría que la trayectoria $x(t)$ no es continua.

Con lo anterior se pueden definir matemáticamente las funciones densidad vehicular y flujo vehicular.

Definición 1.3

Se define la densidad vehicular $q(x, t)$ como la función de dos variables que verifica la siguiente ecuación integral:

$$\int_a^b q(x, t) dx = E(t, a, b). \quad (1.1)$$

Definición 1.4

Se define el flujo vehicular $f(x, t)$ como la función de dos variables que verifica la siguiente ecuación integral:

$$\int_t^\tau f(x, t) dt = C(x, t, \tau). \quad (1.2)$$

A continuación se postula una hipótesis sobre el comportamiento del flujo vehicular en la carretera:

Definición 1.5 (Hipótesis de conservación)

Sea N la cantidad de vehículos al tiempo t en el intervalo $(a, b]$, suponemos que en cualquier tiempo posterior τ la cantidad de vehículos en el intervalo $(a, b]$ solo se ve modificada por los vehículos que entraron y salieron por los extremos a y b . En términos de las funciones C y E esto se expresa como:

$$E(\tau, a, b) = E(t, a, b) + C(a, t, \tau) - C(b, t, \tau). \quad (1.3)$$

Proposición 1.1

Si se verifica la ecuación (1.3) entonces la siguiente ley de conservación es válida:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t). \quad (1.4)$$

La siguiente demostración se puede encontrar [7], aquí se ha hecho una prueba similar usando las definiciones que se muestran al inicio de esta sección.

Demostración:

Sustituyendo (1.2) y (1.1) en (1.3) obtenemos la siguiente identidad integral:

$$\int_a^b q(x, \tau) dx = \int_a^b q(x, t) dx + \int_t^\tau f(a, t) dt - \int_t^\tau f(b, t) dt,$$

derivando respecto a t esta ecuación y aplicando el teorema fundamental del cálculo obtenemos:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx - f(a, t) + f(b, t),$$

de donde se puede deducir (1.4).

El siguiente resultado establece (1.4) en términos de derivadas parciales.

Proposición 1.2

Si se supone que (1.4) se cumple y además las funciones q y f son diferenciables en un entorno de \mathbb{R}^2 entonces estas funciones satisfacen la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (1.5)$$

Demostración:

Considere se cambiar el valor de a por x en (1.4), vista ahora como una variable independiente, entonces se cumplirá la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \int_x^b q(x, t) dx = f(x, t) - f(b, t). \quad (1.6)$$

Aplicando el teorema (1.1) a la igualdad anterior obtenemos:

$$\int_x^b q_t(x, t) dx = f(x, t) - f(b, t). \quad (1.7)$$

Si en la ecuación anterior se deriva respecto a x y se usa adicionalmente el teorema fundamental del cálculo entonces se obtiene el resultado deseado:

$$-\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, t).$$

Una vez que se dispone de la ecuación diferencial (1.5), queda determinar cómo se relaciona el flujo con las restantes variables del tráfico. En términos bastante generales, como se ha visto en la introducción de la tesis, el flujo podría depender de la densidad, la variable espacial o incluso la variable temporal. En este trabajo se ha escogido un modelo de primer orden con un flujo dependiente de la densidad y la variable espacial.

2 Modelo de tráfico vehicular con flujo dependiente de la variable espacial

Como se vio en el capítulo anterior, una de las maneras en que se relaciona el flujo con la densidad, está dada por una expresión parabólica, específicamente esta relación se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(q) = v_{max} q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right),$$

donde q_{max} y v_{max} representan respectivamente la densidad y velocidad máxima. En esta sección se desarrolla un modelo que pretende capturar la sensibilidad del flujo en ciertos puntos de la carretera de estudio y se propone un análisis de las condiciones de flujo sobre un grafo de carreteras, como ya se ha hecho antes en modelos donde el flujo no depende de la variable espacial; esto viene justificado debido a que en ciertas topologías, como curvas o pendientes, no se puede asumir que el flujo es igual en todos los puntos, de aquí se deriva la suposición que el flujo dependa tanto de la densidad como de la variable espacial.

Se asume inicialmente que la velocidad máxima varía continuamente desde el extremo inicial hasta el extremo final de la carretera, es decir, se introduce la variación de la velocidad máxima,

a través de la función $v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde L es la longitud de la carretera de estudio. De esta forma se introduce el flujo que depende de la variable espacial:

$$f(q, x) = v(x)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right). \quad (2.1)$$

Así como en la sección anterior, se asume que se conserva la cantidad de carros a través del segmento $[a, b]$, entonces se puede llegar a la análoga ley de conservación:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b). \quad (2.2)$$

Por otro lado, si se asume que existen las primeras derivadas parciales de q , se puede llegar a la siguiente ecuación diferencial:

$$q_t + \left[v(x)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right) \right]_x = 0. \quad (2.3)$$

La ecuación anterior (2.3), se puede escribir como la siguiente ecuación cuasilineal:

$$q_t + \left(1 - 2 \frac{q}{q_{max}} \right) q_x = -v'(x)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right).$$

Esta última expresión será de utilidad para resolver este problema explícitamente, con el objetivo de derivar las condiciones que permitan definir correctamente un grafo de carreteras.

Un tipo de flujo dependiente de la variable espacial, se observa en la Figura 2.1, para este caso se tiene $L = 1$, $q_{max} = 120$ y $v(x) = 50x + 60$, este un caso que se estudiará a fondo durante todo este documento. Si en lugar de considerar un modelo de velocidad máxima lineal se considerará uno no lineal, aun en esta situación, el modelo lineal resultaría relevante, puesto que tal función podría linealizarse por tramos, con lo cual el modelo lineal tiene un lugar central en el análisis de este tipo de flujos con dependencia de la variable espacial.

Aunque una velocidad lineal es importante dentro de los flujos dependientes de la variable espacial, también sería válido investigar algunos flujos no lineales; aquí se describen brevemente dos modelos que podrían acoplarse a ciertos comportamientos reales del flujo vehicular. El primero corresponde con un flujo de la forma $v(x) = \frac{1}{a + be^{cx}}$. En la Figura 2.2 se puede apreciar la forma que adopta este tipo de flujos cuando se ajusta v de esta manera; de este

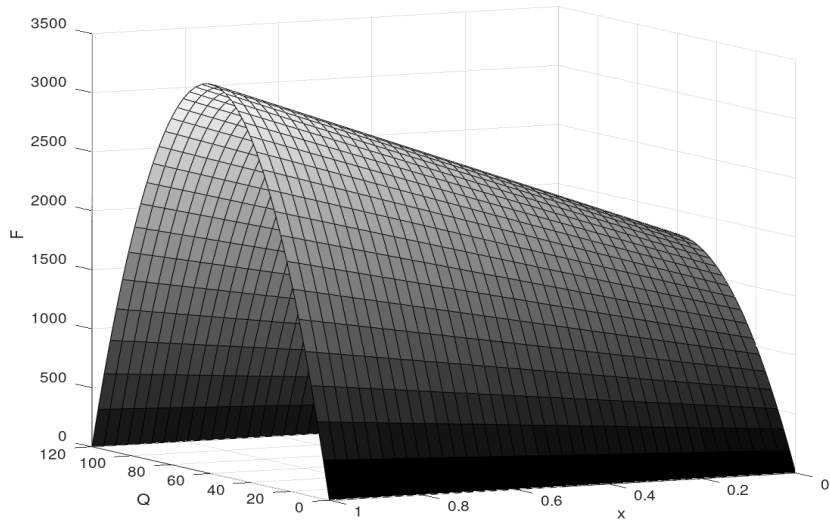


Figura 2.1: Flujo de velocidad máxima lineal.

último se anota que el flujo cambia de forma continua, con la notable característica que al final de uno de los extremos de la carretera, el flujo cae drásticamente. Este último flujo podría representar el comportamiento observado en secciones de carretera donde en uno de sus extremos existe un semáforo.

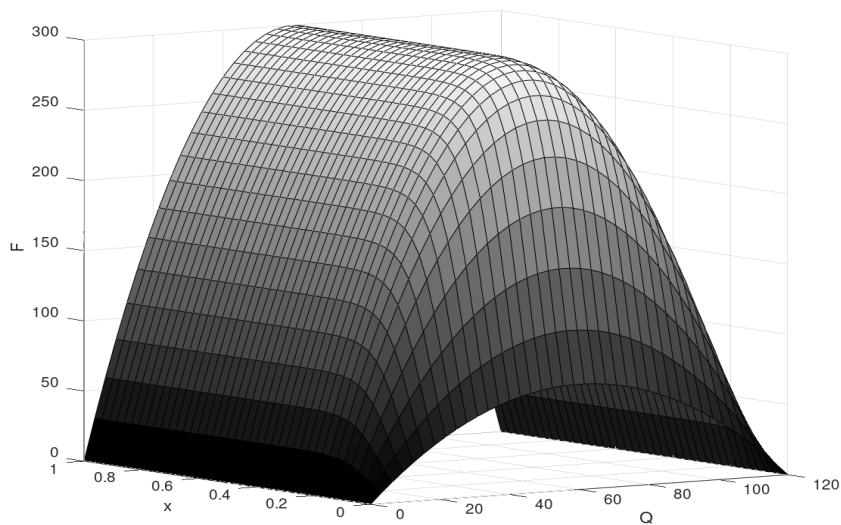


Figura 2.2: Flujo de velocidad máxima con decaimiento.

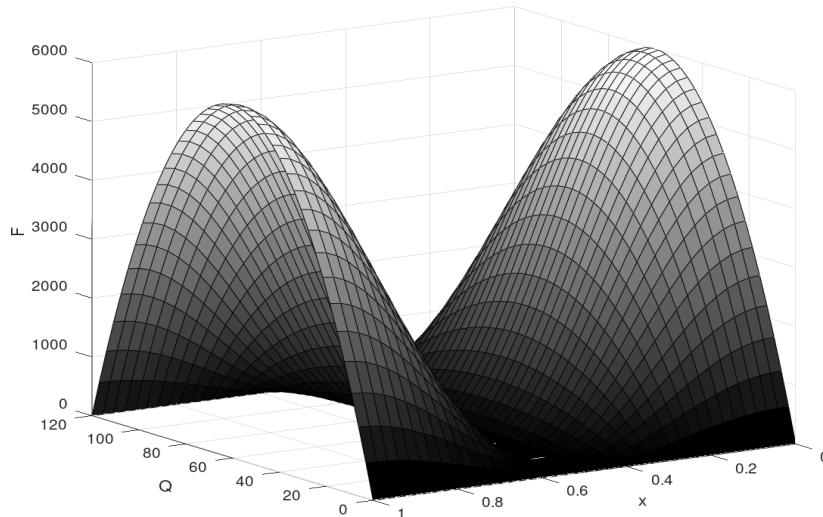


Figura 2.3: Flujo de velocidad máxima con oscilaciones.

Otro modelo de flujo se puede observar en (2.3) donde v tiene la forma $v(x) = a \cos(bx) + c$. Este modelo podría representar situaciones donde la carretera de estudio contiene alguna curva pronunciada; es claro que en este tipo de escenarios, los vehículos disminuyen su velocidad en las partes más curvas¹.

3 Modelo lineal de velocidad y análisis del problema de Riemann

En esta sección se analizará un problema conocido en la literatura como problema de Riemann, esto es un problema donde la condición inicial es una función de Heaviside; se mostrará que a diferencia del caso en el que el flujo solo depende de la densidad q , aquí siempre se formará un choque. Además se encontrará la solución exacta de la curva de choque y se podrán extraer algunas propiedades importantes, con el propósito de plantear el flujo numérico de Godunov para este caso particular, todo esto debido a que en la literatura no se encuentran tales cálculos.

El problema que se quiere analizar en esta sección, es la siguiente ecuación diferencial con

¹Todas las superficies mostradas en esta sección son propias.

problema de valor inicial:

$$q_t + [v(x)g(q)]_x = 0$$

$$q(x, t_0) = q_0 \text{ para } x < \bar{x}$$

$$q(x, t_0) = q_1 \text{ para } x \geq \bar{x}.$$

Donde $f(q, x) = v(x)g(q)$ y $g(q) = q\left(1 - \frac{q}{q_{max}}\right)$. Además defínase $\bar{q} = q_{max} - q$, este valor verifica la igualdad $g(q) = g(\bar{q})$.

No es difícil probar que a cada lado las soluciones vienen dadas por las relaciones siguientes:

$$q(x, t) = \frac{q_0 q_{max}}{\bar{q}_0 e^{a(t-t_0)} + q_0} \equiv q_0(t). \quad (3.1)$$

$$q(x, t) = \frac{q_1 q_{max}}{\bar{q}_1 e^{a(t-t_0)} + q_1} \equiv q_1(t). \quad (3.2)$$

Claramente las curvas características aquí son líneas horizontales, por lo tanto siempre que $q_0 \neq q_1$ entonces se dará un choque. Naturalmente el siguiente paso consistiría en determinar la naturaleza de este choque.

En el marco computacional se prueba que el choque debe responder a la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{f(q_1(t), x(t)) - f(q_0(t), x(t))}{q_1(t) - q_0(t)} = v(x(t))(q_{max} - q_1(t) - q_2(t))/q_{max},$$

con condición inicial $x(t_0) = \bar{x}$. La solución a esta ecuación diferencial es igual a:

$$x(t) = \frac{v(\bar{x})e^{-a\Delta t}(\bar{q}_0 e^{a\Delta t} + q_0)(\bar{q}_1 e^{a\Delta t} + q_1) - bq_{max}^2}{aq_{max}^2},$$

donde $\Delta t = t - t_0$.

La derivada de esta curva viene dada por la siguiente expresión:

$$x'(t) = \frac{(\bar{q}_0 \bar{q}_1 e^{2a\Delta t} - q_0 q_1) e^{-a\Delta t} v(\bar{x})}{q_{max}^2}.$$

Si se asume que $x'(t)$ cambia de signo para $t > t_0$ entonces la siguiente igualdad está bien definida.

$$\bar{x} = x(t_0) = x\left(\frac{1}{a} \ln\left(\frac{q_0 q_1}{\bar{q}_0 \bar{q}_1}\right) + t_0\right).$$

Esta última relación manifiesta que la curva definida por $x(t)$ es cóncava entre los tiempos t_0 y $\frac{1}{a} \ln\left(\frac{q_0 q_1}{\bar{q}_0 \bar{q}_1}\right) + t_0$.

Será de un particular interés hacer el cálculo la siguiente integral:

$$\int_{t_0}^t f(q(\bar{x}, t), \bar{x}) dt,$$

donde por su puesto $q(\cdot)$ representa la solución del problema que se está abordando en esta sección. Aquí se muestra la resolución de la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t f(q(\bar{x}, t), \bar{x}) dt &= \int_{t_0}^t v(\bar{x}) \frac{q_0 \bar{q}_0 q_{max} e^{a(t-t_0)}}{(q_0 + \bar{q}_0 e^{a(t-t_0)})^2} dt \\ &= \int_0^{\Delta t} v(\bar{x}) \frac{q_0 \bar{q}_0 q_{max} e^{as}}{(q_0 + \bar{q}_0 e^{as})^2} ds \\ &= v(\bar{x}) q_0 \bar{q}_0 q_{max} \int_0^{\Delta t} \frac{e^{as}}{(q_0 + \bar{q}_0 e^{as})^2} ds \\ &= \frac{v(\bar{x}) q_0 \bar{q}_0 (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{q}_0 e^{a\Delta t} + q_0)}. \end{aligned}$$

El cálculo anterior será requerido para construir un método numérico que aproxime la solución del modelo con flujo dependiente de la variable espacial; el método expresa en términos generales, su dependencia del cálculo exacto de esta última expresión.

4 Análisis de las condiciones de frontera

En esta sección se analizarán los requisitos suficientes para que una condición de frontera constante defina una solución de manera coherente, bajo la suposición de que $v(x)$ sea una función continua.

Se inicia con el siguiente resultado, el cual establece la solución implícita de un problema de valor en la frontera con condición constante.

Proposición 4.1

Considérese el problema $q_t + [f(q, x)]_x = 0$ con condición de frontera, $q(\bar{x}, t) = \bar{q}$, donde \bar{x} y \bar{q} son constantes. Entonces la solución a este problema viene dada implícitamente por la ecuación

$$f(q, x) = f(\bar{q}, \bar{x}).$$

Se omitirá la prueba de este resultado, sin embargo, en el apéndice se explica el procedimiento para llegar a él.

La siguiente proposición establece las condiciones suficientes para que la solución que se describe en (4.1) este bien definida para cualquier x .

Proposición 4.2

Suponga las mismas hipótesis que en (4.1). Además defínanse las constantes $v_{max} = \max_x v(x)$ y $v_{min} = \min_x v(x)$, entonces el problema tiene al menos una solución si $\frac{v_{min}}{v_{max}}g(q_{max}/2) \geq g(\bar{q})$.

Demostración. Se define inicialmente el polinomio $r(q) = f(q, x) - f(\bar{q}, \bar{x}) = v(x)g(q) - v(\bar{x})g(\bar{q})$, $r(q)$ es un polinomio cuadrático cóncavo hacia abajo, además nótese que $-f(\bar{q}, \bar{x}) = r(0) = r(q_{max})$. De lo anterior se tiene que el vértice de este polinomio se encuentra entre 0 y q_{max} , no es difícil probar que esto sucede en $q = q_{max}/2$. Siguiendo las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} r(q_{max}/2) &= v(x)g(q_{max}/2) - v(\bar{x})g(\bar{q}) \\ &\geq v_{min}g(q_{max}/2) - v_{max}g(\bar{q}) \\ &\geq v_{min}\frac{v_{max}}{v_{min}}g(\bar{q}) - v_{max}g(\bar{q}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

se tiene que $r(q_{max}/2) \geq 0$. De esta forma se puede encontrar para cualquier x al menos un q que verifique la ecuación $r(q) = 0$, que es lo que se quería probar. \square

Esta última proposición es interesante, puesto que describe las condiciones suficientes para que una cierta condición de frontera esté bien definida. Dicho de otra forma, para que la condición $q(\bar{x}, t) = \bar{q}$ esté bien definida, es suficiente verificar que $\frac{v_{min}}{v_{max}}g(q_{max}/2) \geq g(\bar{q})$. Se puede probar que esta última condición es equivalente a imponer lo siguiente:

$$\bar{q} \in \left[0, \frac{q_{max}}{2}(1 - \beta)\right] \cup \left[\frac{q_{max}}{2}(1 + \beta), q_{max}\right], \quad (4.1)$$

donde $\beta^2 = 1 - \frac{v_{min}}{v_{max}}$.

5 Modelo lineal de velocidad y análisis de las condiciones iniciales y de frontera

En este apartado se discutirá el caso en que la velocidad dependiente de la variable espacial es una función lineal; es decir $v(x) = ax + b$ y se analizará la solución de la ecuación diferencial (2.3) cuando se tiene una condición de frontera y una condición inicial constante. Se describe a continuación el problema:

$$\begin{aligned} q_t + \left[v(x)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right) \right]_x &= 0 \\ q(x, t_0) &= q_0 \\ q(\bar{x}, t) &= q_1 \quad (\bar{x} = \{0, 1\}) \\ v(x) &= ax + b. \end{aligned}$$

La solución al problema con valor inicial es:

$$q(x, t) = \frac{q_0 q_{max}}{(q_{max} - q_0)e^{a(t-t_0)} + q_0} \equiv q_0(t). \quad (5.1)$$

De esta solución se puede destacar rápidamente que las curvas características generadas son líneas rectas horizontales. Otra observación se da cuando se calcula la derivada $q'_0(t)$, en este caso se tiene que posee el mismo signo que a , por lo tanto esta es una función ya sea creciente o decreciente.

Para la condición de frontera en la sección anterior se encontró la solución:

$$f(q, x) = f(q_1, \bar{x}). \quad (5.2)$$

Se comienza asumiendo que q_1 verifica la condición (4.1), con esto como premisa se sabe que existe al menos un valor para q que resuelve este problema para cualquier x , además se decide considerar una solución continua, puesto que casi siempre se tienen dos soluciones. La

solución explícita es:

$$q(x, t) = q_{opt} \pm \sqrt{\alpha(x)[q_{opt} - q_1]^2 + \beta(x)q_{opt}^2} \equiv q_1(x), \quad (5.3)$$

donde $q_{opt} = q_{max}/2$, $g(q) = q(1 - q/q_{max})$, $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ y $\alpha(x) = \frac{v(\bar{x})}{v(x)}$.

Para que la solución sea continua, se sigue la siguiente regla:

$$q_1(x) = \begin{cases} q_{opt} + \sqrt{\alpha(x)[q_{opt} - q_1]^2 + \beta(x)q_{opt}^2} & \text{si } q_1 > q_{opt} \\ q_{opt} - \sqrt{\alpha(x)[q_{opt} - q_1]^2 + \beta(x)q_{opt}^2} & \text{si } q_1 < q_{opt} \end{cases}$$

Se puede probar haciendo algunos cálculos que:

$$\text{sign}(q_1(x)) = \begin{cases} \text{sign}(v'(x)) & \text{si } q_1 > q_{opt} \\ -\text{sign}(v'(x)) & \text{si } q_1 < q_{opt} \end{cases}$$

Ahora se estudiará el choque que producen o podrían producir estas dos soluciones.

Proposición 5.1

Considere el problema $q_t + [f(q, x)]_x = 0$, donde $f(q, x) = v(x)g(q)$, con condición inicial $q(x, t_0) = q_0$ y condición de frontera $q(\bar{x}, t) = q_1$ para todo $t \geq t_0$. Sea $(x(t), t)$ una curva que divide el plano (x, t) de manera que la solución a un lado corresponde con la generada por el problema de valor inicial $q(x, t_0) = q_0$, la cual viene dada por (5.1) y del lado restante, la solución generada por el problema de valor en la frontera $q(\bar{x}, t) = q_1$, la cual viene dada por (5.3).

Entonces, para que la ley de conservación se mantenga, la curva debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{f(q_1, \bar{x}) - f(q_0(t), x(t))}{q_1(x(t)) - q_0(t)},$$

con condición inicial $x(t_0) = 1$.

Finalmente, si $x(t)$ cumple la ecuación diferencial en 5.1, entonces la solución al problema

de Riemann viene dada por la siguiente igualdad.

$$q(x, t) = \begin{cases} q_0(t) & \text{si } x < x(t) \\ q_1(x) & \text{si } x \geq x(t) \end{cases}$$

Demostración. Como $q(x, t)$ verifica la ecuación de conservación integral, entonces se verifica que:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b). \quad (5.4)$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_a^{x(t)} q(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x(t)}^b q(x, t) dx \\ &= \int_a^{x(t)} q_t(x, t) dx + \int_{x(t)}^b q_t(x, t) dx + q_0(t)x'(t) - q_1(x(t))'(t) \\ &= - \int_a^{x(t)} [f(q(x, t), x)]_x dx - \int_{x(t)}^b [f(q(x, t), x)]_x dx + (q_0(t) - q_1(x(t)))x'(t) \\ &= -f(q_0(t), x) + f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b) + f(q_1(x), x) + (q_0(t) - q_1(x))x' \\ &= -f(q_0(t), x(t)) + f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b) + f(q_1, \bar{x}) + (q_0(t) - q_1(x(t)))x'(t), \end{aligned}$$

entonces se tiene la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = -f(q_0(t), x(t)) + f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b) + f(q_1, \bar{x}) + (q_0(t) - q_1(x(t)))x'(t). \quad (5.5)$$

Comparando (5.4) y (5.5) se llega la relación buscada. \square

El resultado anterior es importante puesto que encontrando la curva de choque sería posible determinar las condiciones para que los valores en la frontera sean adecuados, justo como se hizo para el caso en el que el flujo no depende de la variable espacial.

Una forma de determinar las condiciones suficientes para que la curva característica tenga derivada negativa, es proponer que la pendiente inicial también lo sea. Sumando a lo anterior la continuidad de la curva $x(t)$ entonces existiría un intervalo de tiempo en el que la pendiente de la curva $x(t)$ sea negativa.

Por lo tanto queda determinar en función de q_0 , cuando $x'(t_0)$ es menor que cero. Nótese que:

$$x'(t_0) = \frac{f(q_1, \bar{x}) - f(q_0, \bar{x})}{q_1 - q_0} = v(\bar{x}) \frac{g(q_1) - g(q_0)}{q_1 - q_0}.$$

De aquí queda determinar el signo de $\frac{g(q_1) - g(q_0)}{q_1 - q_0}$. Entonces este primer paso se reduce al análisis que se hace en el caso en que el flujo no depende de la variable x ; se define \bar{q} tal que $g(\bar{q}) = g(q)$, las siguientes afirmaciones son necesarias para que la pendiente sea negativa:

1. Si la condición de frontera es de salida, entonces: $q_1 \in [\bar{q}_0, q_{max}]$.
2. Si la condición de frontera es de entrada, entonces: $q_1 \in [0, \bar{q}_0]$.

Si a lo anterior se suma la condición (4.1) entonces se tiene que:

1. Si la condición de frontera es de salida, entonces:

$$q_1 \in [\bar{q}_0, q_{max}] \cap \left(\left[0, \frac{q_{max}}{2}(1 - \beta) \right] \cup \left[\frac{q_{max}}{2}(1 + \beta), q_{max} \right] \right).$$

2. Si la condición de frontera es de entrada, entonces:

$$q_1 \in [0, \bar{q}_0] \cap \left(\left[0, \frac{q_{max}}{2}(1 - \beta) \right] \cup \left[\frac{q_{max}}{2}(1 + \beta), q_{max} \right] \right).$$

El resultado se puede refinar aún más de la siguiente forma:

1. Considere una condición de salida:

- Si $q_0 \leq q_{opt}$, entonces $q_1 \in [\max\{\bar{q}_0, q_{opt}(1 + \beta)\}, q_{max}]$.
- Si $q_{opt} < q_0 \leq q_{opt}(1 + \beta)$, entonces $q_1 \in [q_{opt}(1 + \beta), q_{max}]$.
- Si $q > q_{opt}(1 + \beta)$, entonces $q_1 \in [\bar{q}_0, q_{opt}(1 - \beta)] \cup [q_{opt}(1 + \beta), q_{max}]$.

2. Considere una condición de salida:

- Si $q_0 \geq q_{opt}$, entonces $q_1 \in [0, \min\{\bar{q}_0, q_{opt}(1 - \beta)\}]$.
- Si $q_{opt}(1 - \beta) \leq q_0 < q_{opt}$, entonces $q_1 \in [0, q_{opt}(1 - \beta)]$.
- Si $q < q_{opt}(1 - \beta)$, entonces $q_1 \in [q_{opt}(1 + \beta), \bar{q}_0] \cup [0, q_{opt}(1 - \beta)]$.

6 Red de tráfico vehicular

En esta sección² se propondrá una estrategia para modelar el tráfico vehicular en una red vial incorporando en el modelo de tráfico un flujo que dependa de la variable espacial.

²Todos las figuras en esta sección son propias.

El análisis siguiente está basado en el trabajo de [8], a grandes rasgos aquí se discuten los aspectos necesarios para que las condiciones de frontera en cada intersección sean consistentes, este último aspecto es de gran importancia, para notar esto, considere una situación habitual en el tráfico, un conductor transita por una calle congestionada hacia una intersección en la dirección de una salida descongestionada, en esta situación, las condiciones de frontera en la calle que se conduce para esta intersección, corresponde con una densidad alta e inmediatamente la condición de frontera en la calle de salida se asocia con una densidad baja, esto ejemplifica que las condiciones de frontera en las intersecciones pueden ser totalmente diferentes con las condiciones de frontera de cada carretera en la intersección. Como se advierte en [8], hay un aspecto que no pueden violar las intersecciones de las carreteras, esto es, en cada intersección el número de carros que cruzan desde las calles de entrada es igual al número de carros que cruzan hacia las carreteras de salida, esto está comprometido naturalmente con la conservación del flujo en cada intersección, a esto se le conoce como *Condición de Hugoniot*.

En el apéndice se justifican algunos resultados teóricos del trabajo de [8], aquí se recordarán de nuevo algunas definiciones y proposiciones importantes para el desarrollo del marco computacional.

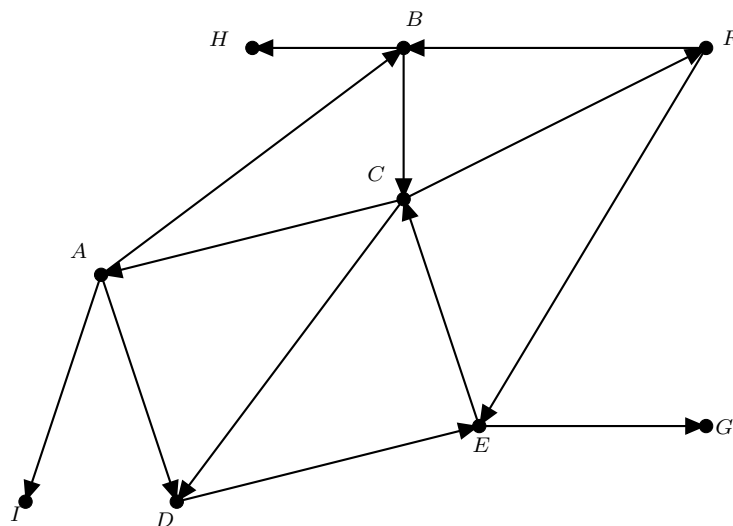


Figura 2.4: En la figura se observa una red de carreteras.

Para visualizar el problema que se va a abordar, refiérase a la Figura 2.4. En dicha figura se puede observar un conjunto de carreteras con sus respectivas direcciones e intersecciones. Por ejemplo C representa la intersección entre de las carreteras definidas por las aristas (C, D) , (C, A) , (C, F) , (B, C) y (E, C) . En lugar de intentar etiquetar cada una de las carreteras

en el grafo, se suele enfocar en una de las intersecciones y una vez fijada, se etiquetan las carreteras que ingresan a esta intersección. Por ejemplo, la Figura 2.5 muestra únicamente la información concerniente a la intersección C .

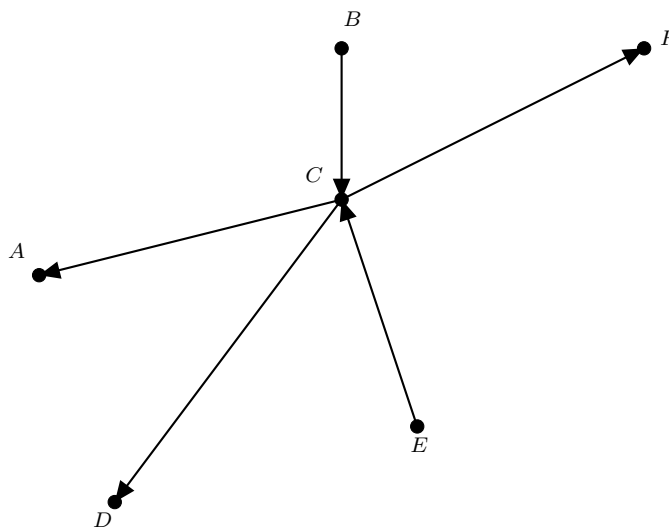


Figura 2.5: Aristas de una intersección de un grafo de carreteras.

Con esta intersección fija, se etiquetan las densidades en cada una de las carreteras de entrada y salida, justo como se muestra en la Figura 2.6. Aquí se puede notar que las densidades q_1, q_2 se asociaron con las carreteras de entrada, mientras que q_3, q_4 y q_5 se asocian con las carreteras de salida.

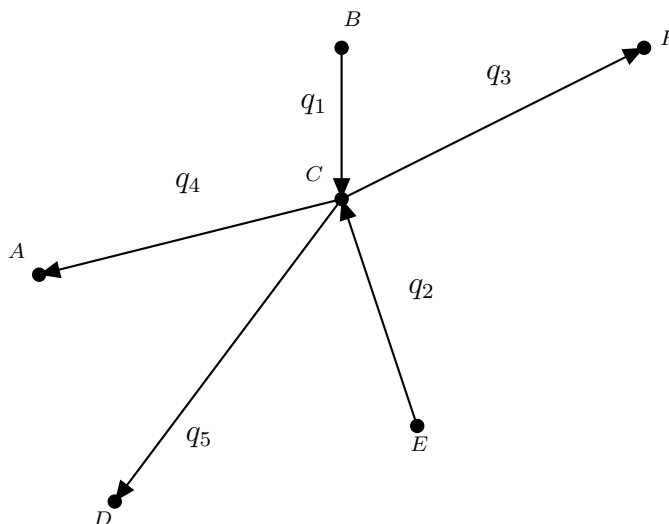


Figura 2.6: Etiquetado de las aristas de un vértice, parte de un grafo de carreteras.

Las siguientes definiciones intentan formalizar lo que se explicó anteriormente de una manera gráfica. Además se necesitará etiquetar algunos parámetros asociados a cada carretera.

Definición 6.1 (Red de tráfico vehicular)

Una red tráfico vehicular se representa por un grafo conexo $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$, donde el conjunto de aristas se asocia con las carreteras y los vértices son las intersecciones de estas.

Definición 6.2 (Intersecciones)

En una intersección particular se etiquetan las aristas de entrada con los índices de 1 a n y las aristas de salida con los índices de $n + 1$ a $n + m$ (suponiendo que en total existen $m + n$ carreteras asociadas a la intersección). Además se asocia a cada carretera con etiqueta i , los siguientes parámetros: L_i , longitud de la carretera, $q_{imax} = r_i$, densidad máxima, a_i , b_i , parámetros asociados a la velocidad, es decir $v(x_i) = a_i x + b_i$, $q_i(x, 0) = q_{i0}(x)$.

La siguiente definición establece el problema que se quiere resolver:

Definición 6.3

Suponga que se tienen las densidades asociadas a una intersección en el grafo de carreteras. Se define la dinámica de la densidad en la red de carreteras a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$[q_i]_t + [(a_i x + b_i)q_i(1 - q_i/r_i)]_x = 0.$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$q_i(x, 0) = q_{i,0}(x).$$

Para $i = 1, 2, \dots, n + m$.

Para definir correctamente el problema anterior es necesario imponer una condición de flujo en la intersección, esto se puede establecer por medio de la siguiente definición.

Definición 6.4 (Condición de Hugoniot)

Considérense las densidades de entrada y salida de una intersección específica, entonces los flujos en este cruce deben cumplir con la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n f_i(q_i(L_i, t), L_i) = \sum_{j=n+1}^{n+m} f_j(q_j(0, t), 0).$$

Donde $f_i(q_i(L_i, t), L_i) = (a_i L_i + b_i)q_i(L_i, t)(1 - q_i(L_i, t)/r_i)$ y $f_j(q_j(0, t), 0) = b_j q_j(0, t)(1 - q_j(0, t)/r_j)$.

El problema tal como está planteado resulta complicado de abordar, en el sentido de resolver explícitamente el sistema en cuestión, por lo tanto se propone la siguiente simplificación, para posteriormente aplicar su análisis al ámbito computacional; supóngase que en un entorno cercano a la intersección las densidades de cada carretera se consideran constantes y se asume que en un intervalo de tiempo los valores en la frontera son constantes. Entonces el problema que se consideró antes, se puede reescribir de la siguiente forma:

Definición 6.5

Suponga que se tienen las densidades asociadas a una intersección en el grafo de carreteras. Se define la dinámica de la densidad en la red de carreteras a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$[q_i]_t + [(a_i x + b_i)q_i(1 - q_i/r_i)]_x = 0.$$

Con las condiciones iniciales:

$$q_i(x, 0) = q_{i,0}.$$

Para $i = 1, 2, \dots, n + m$. Además se impone la condición de flujo:

$$\sum_{i=1}^n f_i(q_{i1}, L_i) = \sum_{j=n+1}^{n+m} f_j(q_{j1}, 0).$$

Donde $q_i(L_i, t) = q_{i1}$, $q_j(0, t) = q_{j1}$ y q_{i1} , q_{i0} son constantes.

Como se puede apreciar en el planteamiento anterior, es necesario encontrar los valores q_{k1} de manera que verifiquen la condición de Hugoniot. Está claro que la forma de determinar estos valores no es única. Para entender este último punto, considérese lo siguiente, se podría establecer que $q_{k1} = 0$ para todo $k \in \{1, 2, 3, \dots, n + m\}$, aparentemente esta elección verificaría la condición de Hugoniot, sin embargo, podría suceder que la curva de choque de curvas características de alguna carretera específica, tenga pendiente positiva al recorrer la dinámica del problema, la dificultad que se presenta en este caso se da cuando se reconoce que los valores en la frontera quedarían determinados exclusivamente por la dinámica de la propia carretera (condición inicial), sin importar el comportamiento en las otras carreteras que se conectan a

través de la intersección.

A continuación se presentan las condiciones suficientes para que el flujo en la frontera se encuentre bien definido.

Proposición 6.1 (Condiciones de acoplamiento)

Si los valores de q_{i0} y q_{k1} verifican las siguientes condiciones:

1. Considere a j como la etiqueta de una carretera de salida:

- Si $q_{j0} \leq r_j/2$, entonces $q_{j1} \in [\max\{\bar{q}_{j0}, r_j/2(1 + \beta)\}, r_j]$.
- Si $r_j/2 < q_{j0} \leq r_j/2(1 + \beta)$, entonces $q_{j1} \in [r_j/2(1 + \beta), r_j]$.
- Si $q > r_j/2(1 + \beta)$, entonces $q_{j1} \in [\bar{q}_{j0}, r_j/2(1 - \beta)] \cup [r_j/2(1 + \beta), r_j]$.

Donde $\beta^2 = 1 - \frac{\min\{v_j(\cdot)\}}{\max\{v_j(\cdot)\}}$ y $j \in \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$.

2. Considere a i como la etiqueta de una carretera de entrada:

- Si $q_{i0} \geq r_i/2$, entonces $q_{i1} \in [0, \min\{\bar{q}_{i0}, r_i/2(1 - \beta)\}]$.
- Si $r_i/2(1 - \beta) \leq q_{i0} < r_i/2$, entonces $q_{i1} \in [0, r_i/2(1 - \beta)]$.
- Si $q < r_i/2(1 - \beta)$, entonces $q_{i1} \in [r_i/2(1 + \beta), \bar{q}_{i0}] \cup [0, r_i/2(1 - \beta)]$.

Donde $\beta^2 = 1 - \frac{\min\{v_i(\cdot)\}}{\max\{v_i(\cdot)\}}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Entonces el flujo a través de la frontera es consistente.

Es posible reducir las condiciones de la siguiente manera:

Proposición 6.2 (Condiciones de acoplamiento)

Si los valores de q_{i0} y q_{k1} verifican las siguientes condiciones:

1. Considere a j como la etiqueta de una carretera de salida, entonces se tiene que

$$q_{j1} \in [\max\{\bar{q}_{j0}, r_j/2(1 + \beta)\}, r_j],$$

donde $\beta^2 = 1 - \frac{\min\{v_j(\cdot)\}}{\max\{v_j(\cdot)\}}$ y $j \in \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$.

2. Considere a i como la etiqueta de una carretera de entrada, entonces se tiene que

$$q_{i1} \in [0, \min\{\bar{q}_{i0}, r_i/2(1 - \beta)\}],$$

$$\text{donde } \beta^2 = 1 - \frac{\min\{v_i(\cdot)\}}{\max\{v_i(\cdot)\}} \text{ y } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Entonces el flujo a través de la frontera es consistente.

El resultado anterior es importante puesto que permite definir de manera correcta las densidades en la frontera, de manera que el flujo se conserve en las intersecciones. Las condiciones de acoplamiento no son suficientes para fijar los valores del flujo en la frontera, estas condiciones establecen un espectro de valores posibles para las densidades en la frontera. En la siguiente sección se planteará una estrategia para encontrar tales valores.

7 Optimización del flujo del tráfico vehicular a través de las intersecciones

En esta sección se desarrollará una estrategia para escoger un flujo específico y consistente en cada una de las intersecciones del grafo de carreteras para 3 casos de interés; de una manera similar a como se hace en [2].

Se puede apreciar que una elección consistente en cualquier tipo de intersección, se obtiene si se ajustan los flujos con el valor de cero en cada una de las carreteras de una intersección específica, sin embargo esto no parece apegarse a la realidad; al contrario de elegir un flujo al azar, en [8] se introduce una función cóncava donde se pueda maximizar el flujo en cada una de las intersecciones.

Otro punto a considerar en este capítulo, consiste en aportar un algoritmo que recibe como entrada las densidades cercanas a la intersección y retorna los flujos consistentes que maximizan a una cierta función cóncava. Se introduce además una estrategia que garantice que el problema de maximización tenga una solución satisfactoria, con los posibles flujos en cada una de las carreteras.

Para describir claramente el problema defínanse las siguientes variables:

Flujo de entrada:	ξ_i	$i \in \{1, 2, \dots, n\}$
Flujo máximo de entrada:	ξ_i^{max}	$i \in \{1, 2, \dots, n\}$
Flujo de salida:	η_j	$j \in \{1, 2, \dots, m\}$
Flujo máximo de salida:	η_j^{max}	$j \in \{1, 2, \dots, m\}$
Función de optimización:	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$g(x) = x \left(1 - \frac{x}{2\xi}\right)$

Se necesita además una matriz de distribución del flujo A^3 tal que verifica que $A\xi = \eta$ y $\sum_{i=1}^m A_{i,j} = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición 7.1 (Optimización en la frontera)

Maximizar

$$\sum_{i=1}^n g(\xi_i) + \sum_{j=1}^m g\left(\sum_{i=1}^n A_{j,i} \xi_i\right).$$

Sujeto a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \prod_{i=1}^n [0, \xi_i^{max}]$ y $\sum_{i=1}^n A_{j,i} \xi_i \in [0, \eta_j^{max}]$ para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Existe un parámetro en el problema anterior que no se ha definido. Este es el valor de ξ ; en los casos que se van a estudiar se expondrá como seleccionar este valor.

7.1 Intersección de cuatro carreteras

En este apartado se estudia una de las intersecciones más comunes que se pueden encontrar en cualquier sistema de carreteras y de aquí el interés por estudiar la solución precisa de este caso.

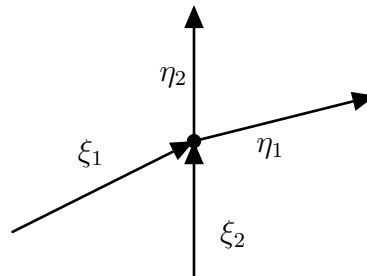


Figura 2.7: Intersección de cuatro carreteras.

El problema que se quiere optimizar en este caso se puede representar de la siguiente forma:

³No confundir esta matriz con las matrices estocásticas de la teoría de la probabilidad

Maximizar: $g(\xi_1) + g(\xi_2) + g(\eta_1) + g(\eta_2)$.

Sujeto a : $Ax = y$.

Donde: $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2)$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1 \text{ y } \beta + \bar{\beta} = 1.$$

Por las condiciones dadas, se concluye que se desea optimizar a la función:

$$F(\xi_1, \xi_2) = g(\xi_1) + g(\xi_2) + g(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) + g(\bar{\alpha}\xi_1 + \bar{\beta}\xi_2).$$

Para encontrar el máximo simplemente se debe resolver la ecuación:

$$\nabla F(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

La solución se muestra a continuación:

$$\xi_1 = \frac{(2\beta^2 - 2\alpha\beta - \beta + \alpha + 1) 2\xi}{3\beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta + 3\alpha^2 - 2\alpha + 3} \equiv A_1\xi.$$

$$\xi_2 = \frac{(2\alpha^2 - 2\alpha\beta - \alpha + \beta + 1) 2\xi}{3\beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta + 3\alpha^2 - 2\alpha + 3} \equiv A_2\xi.$$

Se puede probar con algún esfuerzo que de ser $\xi > 0$ entonces ξ_1 y ξ_2 son números positivos.

Con los valores anteriores se pueden encontrar los valores de η_1 y η_2 .

$$\eta_1 = \frac{(\beta^2 - 2\alpha\beta + \beta + \alpha^2 + \alpha)\xi}{3\beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta + 3\alpha^2 - 2\alpha + 3} \equiv A_3\xi.$$

$$\eta_2 = \frac{(\beta^2 - 2\alpha\beta - \beta + \alpha^2 - \alpha + 2)\xi}{3\beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta + 3\alpha^2 - 2\alpha + 3} \equiv A_4\xi.$$

Para finalizar se ajusta el valor de ξ recordando que estos cuatro flujos deben estar acotados.

Esta condición se puede conseguir fijando:

$$\xi = \min\{\xi_1^{max}/A_1, \xi_2^{max}/A_2, \eta_1^{max}/A_3, \eta_2^{max}/A_4\}.$$

Con esto se puede garantizar que el problema anterior tiene solución para cualquier situación.

7.2 Intersección de tres carreteras

Aquí se analiza el caso donde se tienen 3 carreteras en una intersección, además este vendría a ser un caso particular en el que una de las carreteras en el caso anterior queda bloqueada o vacío. Existen dos casos de interés, uno donde se tienen dos carreteras de entrada y otro donde solo hay una de estas. En la figura de abajo se presenta uno de estos casos.

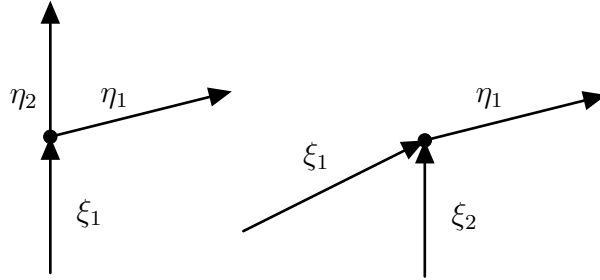


Figura 2.8: Casos de las intersecciones de tres carreteras.

Con la figura de lado derecho se puede considerar igual que antes, que el flujo se distribuye a través de la carretera de salida. Sean α y β las proporciones en que se distribuye el flujo, haciendo un análisis similar al que se hizo antes, se puede probar que:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{\alpha\beta + 1}, \quad \eta_1 = \frac{\alpha\xi}{\alpha\beta + 1}, \quad \eta_2 = \frac{\beta\xi}{\alpha\beta + 1},$$

donde $\xi = (1 + \alpha\beta) \min\{\xi_1^{max}, \eta_1^{max}/\alpha, \eta_2^{max}/\beta\}$. Para el segundo caso un análisis parecido muestra que:

$$\eta_1 = \frac{\xi}{\alpha\beta + 1}, \quad \xi_1 = \frac{\alpha\xi}{\alpha\beta + 1}, \quad \xi_2 = \frac{\beta\xi}{\alpha\beta + 1},$$

donde $\xi = (1 + \alpha\beta) \min\{\eta_1^{max}, \xi_1^{max}/\alpha, \xi_2^{max}/\beta\}$.

Para terminar, si se considera el caso en el que solo interactúan dos carreteras, entonces $\xi_1 = \xi$ y $\eta_1 = \xi$, donde $\xi = \min\{\xi_1^{max}, \eta_1^{max}\}$.

Se cierra este capítulo haciendo algunas observaciones del trabajo realizado. El principal aporte de este capítulo fue establecer las condiciones suficientes para que el flujo vehicular estuviese correctamente definido en las intersecciones de un grafo de carreteras, considerando un flujo dependiente de la variable espacial. Para lograr esto, se inició estudiando las propiedades del modelo para una única carretera, de donde se pudo derivar un conjunto de condiciones

asociadas a un problema de valores en la frontera, este último resultado fue la base para poder encontrar las condiciones que permiten definir apropiadamente el flujo en los vértices del grafo. Como un segundo aspecto a resaltar, se planteó una estrategia para determinar los flujos específicos para tres tipos de intersecciones habituales en la topología de cualquier sistema de carreteras.

Marco computacional

En el presente capítulo se dará una breve descripción del método de volúmenes finitos y se adaptará esta herramienta a los modelos de tráfico vehicular en el que el flujo depende de la variable espacial, esto último haciendo uso del análisis que se hizo sobre esta clase de modelos en capítulos anteriores. A través del método de Godunov fue posible desarrollar un algoritmo que resolviera satisfactoriamente el flujo numérico para problemas en los que la dependencia de la variable espacial, varía linealmente con respecto de la misma y se finalizó el capítulo haciendo un análisis teórico de las condiciones suficientes para la convergencia de dicho método.

1 Esquemas numéricos para modelos macroscópicos

En esta sección se desarrollarán un conjunto de herramientas computacionales que resuelvan diversos problemas del tráfico vehicular, se ha decidido escoger el método de volúmenes finitos por dos razones, la primera es que es un método capaz de reconstruir soluciones discontinuas, que son las más comunes en este tipo de aplicaciones. El segundo motivo es por la poca cantidad de cálculo (relativamente) necesaria para obtener soluciones con un nivel de precisión aceptable en el contexto de los problemas del tráfico vehicular, en contraste con los métodos DG y LDG¹ que habitualmente requieren una mayor cantidad de cálculo. A pesar de tener las dos ventajas que se mencionaron antes, cabe señalar que una de las desventajas del método de volúmenes finitos, recae en su bajo orden de aproximación, en este sentido los métodos DG y LDG resultan ser mejores. Aunque en este documento no se desarrollaron los métodos DG y LDG, si se puede resaltar que se ha desarrollado un flujo numérico apropiado para este tipo de

¹Discontinuos Galerkin y Local Discontinuos Galerkin

problemas en donde el flujo vehicular depende de la variable espacial, por lo que esto sería un punto de partida para implementar el método DG o LDG en su forma usual.

2 Método de volúmenes finitos para la ley de conservación escalar

Cuando el cambio de una cierta variable depende exclusivamente del flujo a través de la frontera, entonces se está ante una ley de conservación. La ley de conservación asociada al tráfico como se expresó en capítulos anteriores es:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} q(x, t) dx = f(q(x_0, t), x_0) - f(q(x_1, t), x_1).$$

En el enfoque del método de volúmenes finitos se desea estimar el valor promedio de $q(x, t)$ en un intervalo(volumen) $[a, b)$, sea $C_i = [x_i, x_{i+1})$ y llámese Q_i el valor promedio de $q(x, t)$ en el intervalo C_i , es decir:

$$Q_i \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t) dx.$$

De la ley de conservación integral se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx &= f(q(x_i, t), x_i) - f(q(x_{i+1}, t), x_{i+1}) \\ &\Downarrow \text{(integrando de } t_n \text{ a } t_{n+1}) \\ \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} q(x, t_n) dx &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_i, t), x_i) - f(q(x_{i+1}, t), x_{i+1}) dt \\ &\Downarrow \text{(sustituyendo por las aproximaciones)} \\ \Delta x (Q_i^{n+1} - Q_i^n) &\approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_i, t), x_i) - f(q(x_{i+1}, t), x_{i+1}) dt. \end{aligned}$$

De lo anterior se deriva que:

$$Q_i^{n+1} \approx Q_i^n + \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_i, t), x_i) - f(q(x_{i+1}, t), x_{i+1}) dt \right). \quad (2.1)$$

Como se puede apreciar en la ecuación (2.1), se tiene ante sí una especie de fórmula de diferencias finitas correspondiente a un método explícito, sin embargo eso no es completamente cierto, evidentemente se necesita del conocimiento de lo que sucede en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, por lo tanto se requiere una nueva aproximación para estas expresiones integrales. En estos términos se calcula un valor "promedio" de las integrales en la última expresión y se denota a este valor por $F_i^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(q(x_i, t), x_i)$ entonces la expresión (2.1) da lugar a una clase de métodos que tienen la estructura:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n). \quad (2.2)$$

Cualquier método que se pueda escribir en la forma (2.2) se considera un *método de volúmenes finitos*. La colección de métodos que se expresan de esta forma se determinan por la elección de la *función de flujo numérico* F_i^n .

Como sugiere la teoría sobre la solución de la ecuación diferencial parcial relacionada con el tráfico vehicular, la solución en un tiempo t^{n+1} se ve afecta por la información en un tiempo t^n a través de las curvas características. Una de las suposiciones relacionada con el flujo numérico F_i^n , es que este depende exclusivamente de la información alrededor de x_i , esto es, dependiente de Q_{i-1}^n y Q_i^n , de esta manera se podría describir el flujo numérico como sigue $F_i = F(Q_{i-1}^n, Q_i^n, x_i)$.

Con lo anterior se presentan el conjunto de métodos numéricos de volúmenes finitos con estructura:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(Q_i^n, Q_{i+1}^n, x_{i+1}) - F(Q_{i-1}^n, Q_i^n, x_i)). \quad (2.3)$$

3 Método de Godunov aplicado al modelo lineal con flujo dependiente de la variable espacial

En el apartado anterior se describió el método de volúmenes finitos. En [10] se describen una clase de flujos numéricos conocidos con el apellido del matemático aplicado Sergei Godunov, en lo que resta de este capítulo se construirá un flujo numérico basado en el esquema numérico de Godunov. Además se encontrará la región de estabilidad para este esquema numérico y se validará el código implementado.

El problema que se quiere abordar numéricamente en esta sección, es el siguiente:

$$q_t + [f(q, x)]_x = 0.$$

Sujeto a las condiciones iniciales y de frontera:

$$f(q, x) = v(x)g(q), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T].$$

$$v(x) = ax + b, \quad q(0, t) = q_1(t),$$

$$g(q) = q(1 - q/q_{max}), \quad q(L, t) = q_2(t),$$

Para aplicar el método de volúmenes finitos se realiza en espacio y tiempo la partición siguiente:

$$x_i = i\Delta x, \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3, \dots, n+1\},$$

$$t_j = j\Delta t, \quad \text{para } j \in \{1, 2, 3, \dots, m\},$$

donde $x_0 = 0$, $x_{n+1} = L$, $t_0 = 0$ y $t_m = T$. Para iniciar el método se necesitan ajustar los valores iniciales y de frontera de la siguiente forma:

$$Q_i^0 \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_0(x) dx,$$

$$L_j \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} q_1(t) dt,$$

$$R_j \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} q_2(t) dt.$$

Se resalta que el método de volúmenes finitos intenta aproximar los valores Q_i^j en el siguiente sentido:

$$Q_i^j \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x, t_j) dx.$$

Como se describió al inicio de este capítulo, se plantea la aproximación de Q_i^j de la siguiente forma:

$$Q_i^j \approx Q_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(q(x_{i+1}, t), x_{i+1}) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(q(x_i, t), x_i) dt \right).$$

Como en los métodos de Godunov, se puede encontrar el flujo numérico, resolviendo el siguiente problema:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(q(x_i, t), x_i) dt.$$

La integral se puede resolver como si se tuviera un problema de Riemann alrededor del punto x_i , con Q_{i-1}^j a la izquierda y Q_i^j al lado derecho (esta última integral se calculó en el capítulo donde se describió el modelo).

El cálculo se muestra a continuación:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(q(x_i, t), x_i) dt = \frac{v(x_i) Q_k^j \bar{Q}_k^j (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{Q}_k^j e^{a\Delta t} + Q_k^j) \Delta t} = F(Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i).$$

En la expresión anterior k es una variable que puede tomar los valores de i o $i - 1$; para poder determinar el valor correcto de k se necesita resolver en la mayoría de casos, los choques que resultan de este problema. Este caso fue analizado en el capítulo 2, por lo tanto en (1) se presenta el algoritmo que resume la forma en que se calcula el flujo numérico.

Algoritmo 1: Flujo de Godunov lineal

entrada: $Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i, \Delta t$.

salida : Flujo numérico de Godunov, $F(Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i)$

$$\Delta = \bar{Q}_{i-1}^j \bar{Q}_i^j - Q_{i-1}^j Q_i^j$$

if $\Delta > 0$ **then**

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{return} \frac{v(x_i) Q_{i-1}^j \bar{Q}_{i-1}^j (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a\Delta t} + Q_{i-1}^j) \Delta t} \end{array} \right.$$

if $\Delta < 0$ **then**

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{return} \frac{v(x_i) Q_i^j \bar{Q}_i^j (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{Q}_i^j e^{a\Delta t} + Q_i^j) \Delta t} \end{array} \right.$$

if $Q_{i-1}^j = q_{max} \wedge Q_i^j = 0$ **then**

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{return} \frac{v(x_i) q_{max}}{4} \end{array} \right.$$

else

if $a > 0$ **then**

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{return} \frac{v(x_i) Q_{i-1}^j \bar{Q}_{i-1}^j (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a\Delta t} + Q_{i-1}^j) \Delta t} \end{array} \right.$$

else

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{return} \frac{v(x_i) Q_i^j \bar{Q}_i^j (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{Q}_i^j e^{a\Delta t} + Q_i^j) \Delta t} \end{array} \right.$$

Como en este tipo de métodos, generalmente existe un valor T en el que las curvas

características chocan. A continuación se deduce la condición necesaria para que dos curvas de choque no coincidan; esto puede conseguirse calculando el valor T , para ello asúmase que dos curvas características chocan:

$$\begin{aligned}
\frac{v(x_i)e^{-a\Delta t}(\bar{Q}_{i-1}e^{a\Delta t} + Q_{i-1})(\bar{Q}_ie^{a\Delta t} + Q_i)}{aq_{max}^2} &= \frac{v(x_{i+1})e^{-a\Delta t}(\bar{Q}_ie^{a\Delta t} + Q_i)(\bar{Q}_{i+1}e^{a\Delta t} + Q_{i+1})}{aq_{max}^2} \\
&\Downarrow \\
v(x_i)e^{-a\Delta t}(\bar{Q}_{i-1}e^{a\Delta t} + Q_{i-1})(\bar{Q}_ie^{a\Delta t} + Q_i) &= v(x_{i+1})e^{-a\Delta t}(\bar{Q}_ie^{a\Delta t} + Q_i)(\bar{Q}_{i+1}e^{a\Delta t} + Q_{i+1}) \\
&\Downarrow \\
v(x_i)(\bar{Q}_{i-1}e^{a\Delta t} + Q_{i-1}) &= v(x_{i+1})(\bar{Q}_{i+1}e^{a\Delta t} + Q_{i+1}) \\
&\Downarrow \\
v(x_i)(\bar{Q}_{i-1}e^{a\Delta t} + Q_{i-1}) &= (v(x_i) + a\Delta x)(\bar{Q}_{i+1}e^{a\Delta t} + Q_{i+1}) \\
&\Downarrow \\
e^{a\Delta t}[v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}] &= v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) + a\Delta xQ_{i+1} \\
&\Downarrow \\
\Delta t &= \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) + a\Delta xQ_{i+1}}{v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto una condición necesaria para que las curvas de choque no se intercepten se expresa por la siguiente desigualdad:

$$\Delta t < \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) + a\Delta xQ_{i+1}^j}{v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j} \right). \quad (3.1)$$

De esta última expresión resulta un tanto complicado establecer una relación más general que no comprometa a los índices de la partición; por lo tanto se hace inicialmente, una estimación a través de una expansión en serie de Taylor:

$$\frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) + a\Delta xQ_{i+1}}{v(x_i)(Q_{i+1} - Q_{i-1}) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}} \right) \approx \frac{q_{max}}{(Q_{i+1} - Q_{i-1})v(x_i)} \Delta x + O(\Delta x^2).$$

Substituyendo en la condición (3.1), se tiene que:

$$\Delta t < \frac{q_{max}}{(Q_{i+1} - Q_{i-1})v(x_i)} \Delta x + O(\Delta x^2).$$

De lo anterior, una condición suficiente para evitar los choques viene dada por la siguiente desigualdad:

$$\Delta t < \frac{q_{max}}{|Q_{i+1} - Q_{i-1}|v(x_i)} \Delta x + O(\Delta x^2) \Rightarrow \frac{|Q_{i+1} - Q_{i-1}|v(x_i)}{q_{max}} < \frac{\Delta x}{\Delta t} + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right).$$

Puesto que $|Q_{i+1} - Q_{i-1}| \leq q_{max}$ y $v(x_i) < v_{max}$, entonces una condición aún más restrictiva sería:

$$v_{max} < \frac{\Delta x}{\Delta t} + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right).$$

4 Ejemplos Numéricos

En este espacio se realizaron tres experimentos, con el objetivo de validar el código implementado y comprobar los resultados teóricos de arriba. Los siguientes ejemplos hacen referencia a resolver el problema $q_t + [f(q, x)]_x = 0$ donde $f(q, x) = (ax + b)q(1 - q/q_{max})$. Además se han seleccionado estos tres ejemplos de manera que ha sido posible calcular la solución exacta de la ecuación diferencial con sus respectivas condiciones, por lo cual finalmente, fue posible hacer el cálculo de los errores.

Ejemplo 4.1

Sean $a = -30$, $b = 100$, $q_{max} = 120$, $L = 1$, $T = 0.1$ y $q(x, 0) = 70$. Además considérese fijar la condición $150\Delta t = \Delta x$ con el propósito de respetar la condición que evita los choques.

En la Tabla 4.1 se pueden observar los errores en la norma dos haciendo variar Δx , además se ha calculado la tasa de convergencia en la última columna rotulada con la letra C . Se puede validar por medio dicha tabla que el método converge.

Δx	Δt	$\ \cdot\ _2$	C
4.762e-02	4.329e-05	1.360e-07	1.5
2.439e-02	2.217e-05	4.987e-08	1.5
1.639e-02	1.490e-05	2.749e-08	1.5
1.235e-02	1.122e-05	1.796e-08	1.5
9.901e-03	9.001e-06	1.290e-08	1.5
8.264e-03	7.513e-06	9.838e-09	1.49
7.092e-03	6.447e-06	7.822e-09	1.5
6.211e-03	5.647e-06	6.411e-09	1.49
5.525e-03	5.023e-06	5.38e-09	

Tabla 4.1: Errores del ejemplo 4.1

Ejemplo 4.2

Sean $a = -30$, $b = 100$, $q_{max} = 120$, $L = 1$, $T = 0.1$, $q(1, t) = 70$ y $150\Delta t = \Delta x$.

Δx	Δt	$\ \cdot\ _2$	C
2.439e-02	1.22e-04	1.939e+00	0.517
1.235e-02	6.173e-05	1.364e+00	0.510
8.264e-03	4.132e-05	1.111e+00	0.507
6.211e-03	3.106e-05	9.612e-01	0.505
4.975e-03	2.488e-05	8.592e-01	0.504
4.149e-03	2.075e-05	7.840e-01	0.504
3.559e-03	1.779e-05	7.256e-01	0.503
3.115e-03	1.558e-05	6.786e-01	

Tabla 4.2: Errores del ejemplo 4.2

En el segundo ejemplo se puede notar que la convergencia se sigue manteniendo, sin embargo, en contraste con el ejemplo 4.1, la tasa de convergencia es diferente, esto es así puesto que en el ejemplo 1, la solución exacta no depende de la variable espacial. Para acentuar este último punto, el tercer ejemplo muestra que la tasa de convergencia es ciertamente de uno partido por dos.

Ejemplo 4.3

Sean $a = -70$, $b = 100$, $q_{max} = 120$, $L = 1$, $T = 0.1$, $q(x, 0) = q_{max}(1 - x)$ y $150\Delta t = \Delta x$.

En la tabla de abajo se muestran los errores para este último ejemplo, aquí se puede apreciar que la tasa de convergencia concuerda con resultados teóricos en los que se afirma que su valor es de al menos uno.

En resumen, en este capítulo se ha construido el flujo de Godunov y se ha implementado

Δx	Δt	$\ \cdot\ _2$	C
4.762e-02	4.329e-04	1.603e-01	0.489
2.439e-02	2.217e-04	1.155e-01	0.495
1.235e-02	1.122e-04	8.248e-02	0.497
6.211e-03	5.647e-05	5.86e-02	0.498
3.115e-03	2.832e-05	4.153e-02	0.499
1.560e-03	1.418e-05	2.940e-02	0.499
7.806e-04	7.097e-06	2.080e-02	0.499
3.935e-04	3.578e-06	1.477e-02	0.499

Tabla 4.3: Errores del ejemplo 4.3

el método de volúmenes finitos usando dicho flujo numérico, además se encontró la condición CFL, la cual establece por medio de una desigualdad, la región sobre la cual, las aproximaciones son correctamente aproximadas con la información proveniente de las densidades vecinas y finalmente se ha validado con los ejemplos que la implementación y los resultados teóricos son válidos.

Datos del tráfico vehicular



1 Metodología de la recolección de datos del tráfico

Con el propósito de validar los modelos macroscópicos para el tráfico vehicular, en este documento se ha extraído información inherente al tráfico vehicular. Como un preámbulo a los experimentos, se detallan a continuación los aspectos generales asociados a la medición de la densidad y el flujo a través de una grabación de video del tráfico vehicular.

Suponiendo que se tienen T segundos de video o lo que es semejante, M cuadros por unidad de tiempo, la sección de carretera de estudio es dividida en n partes como se muestra en la Figura 4.1, cada parte se puede visualizar como el intervalo cerrado $[x_i, x_{i+1}]$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Partición espacial de la carretera de estudio

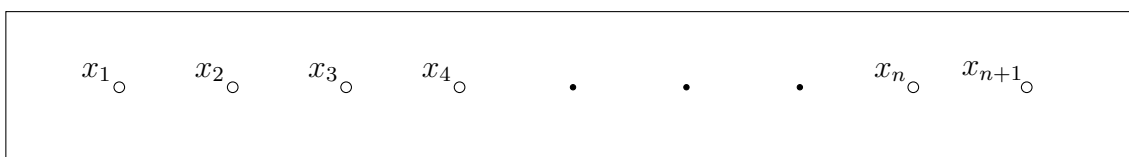


Figura 4.1: Partición de una carretera.

Cuadro de video

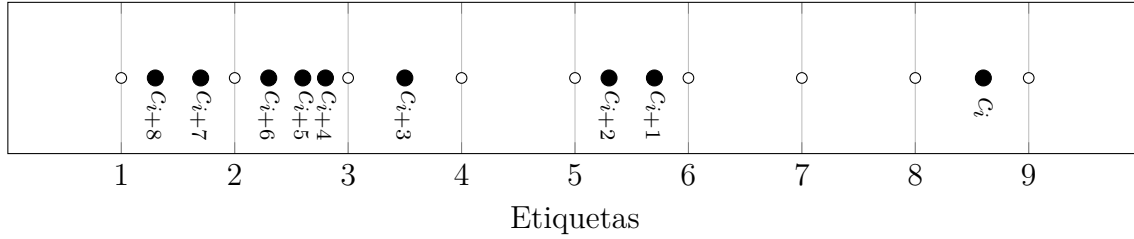


Figura 4.2: Sección de carretera dividida en 8 pedazos, los puntos negros representan las posibles posiciones de los vehículos en alguno de los cuadros del video.

Si se asume que en todo el video se le da seguimiento a N vehículos, denotados con c_1, c_2, \dots, c_N , entonces la Figura 4.2 representa lo que en teoría se observaría en alguno de los cuadros del video cuando se divide la sección de carretera en 8 partes.

Con el objetivo de medir el flujo y la frecuencia, considérese la siguiente definición.

Definición 1.1

Sea $x(t)$ la trayectoria del vehículo c_i para algún $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, se define el tiempo de salida del punto de partición x_j como el tiempo $t = \tau(c_i, x_j)$ tal que $x(\tau(c_i, x_j)) = x_j$ y $x(t) > x_j$ para todo $t > \tau(c_i, x_j)$.

Observaciones: Si a τ se le ve como una función de dos variables, τ cumplirá con los siguientes enunciados:

1. $\tau(c_j, x_i) = \infty$ cuando c_j se encuentra a la izquierda o sobre x_i para todo cuadro de video. Esta situación se da cuando en el video no dejó información del cruce de este vehículo por el punto x_i .
2. $\tau(c_j, x_i)$ no está definido cuando el vehículo c_j se encuentra a la derecha de x_i en el primer cuadro de video.
3. $\tau(c_j, x_i) < \tau(c_j, x_{i+1})$. Esto es naturalmente cierto puesto que el vehículo c_j llega antes a x_i que a x_{i+1} .
4. $\tau(c_j, x_i) > \tau(c_k, x_i)$ para $j > k$, esto es por la forma en que están etiquetados los vehículos de derecha a izquierda.

En este punto se usará la función τ para medir la cantidad de carros que cruzan los puntos x_i en el intervalo de $[\hat{t}, \hat{t}]$.

Proposición 1.1

El vehículo c_i cruza el punto x_j en el intervalo de tiempo $[\hat{t}, \hat{t}]$ si y solo si cumple la siguiente condición.

$$\hat{t} \leq \tau(c_i, x_j) < \hat{t}. \quad (1.1)$$

Demostración:

Sea $x(t)$ la trayectoria del vehículo c_i . Supóngase inicialmente que c_i cruza x_j en el intervalo $[\hat{t}, \hat{t}]$, esto se cumple si se verifican las siguientes condiciones:

1. $x(s) \leq x_j$ para todo $s < \hat{t}$.
2. Existe un ξ en el intervalo $[\hat{t}, \hat{t}]$ tal que $x(\xi) > x_j$.

La condición 2 sumado a que $x(\tau(c_i, x_j)) = x_j$ y que las trayectorias son funciones crecientes implican que $\tau(c_i, x_j) < \xi$, lo que a su vez implica que $\tau(c_i, x_j) \in [\hat{t}, \hat{t}]$.

Ahora suponga que se verifica la condición (1.1), dado que $x(\tau(c_i, x_j)) = x_j$ y que $x(t)$ es una función creciente entonces para todo $s < \tau(c_i, x_j)$ se tiene que $x(s) \leq x_j$ y como se supone que $\hat{t} \leq \tau(c_j, x_i)$ entonces para todo $s < \hat{t}$ se verifica que $x(s) \leq x_j$, por otro lado de la definición de $\tau(c_i, x_j)$ tenemos que $x(s) > x_j$ para $s \in (\tau(c_i, x_j), \hat{t})$, lo cual implica que existe un $\xi \in [\hat{t}, \hat{t}]$ tal que $x(\xi) > x_j$.

El resultado anterior responde a la necesidad de recolectar el flujo vehicular de forma precisa. En uno de los experimentos que se realizaron en este trabajo, fue posible obtener los *tiempos de salida* de cada vehículo observado, esto permitió establecer formalmente si un carro cruza un punto de división de la carretera en un intervalo específico de tiempo. Como ejemplo suponga que se quiere conocer cuantos vehículos cruzan el punto x_i en el intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1}]$ (en la notación usada en este documento sería $C(x_i, t_k, t_{k+1})$), este se puede hacer calculando la siguiente suma:

$$C(x_i, t_k, t_{k+1}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(\tau(c_j, x_i)).$$

Si se combina lo anterior con la ley de conservación (1.4), será posible medir $E(x_i, x_{i+1}, t_{k+1})$, como se muestra en la siguiente relación:

$$E(x_i, x_{i+1}, t_{k+1}) = E(x_i, x_{i+1}, t_k) + C(x_i, t_k, t_{k+1}) - C(x_{i+1}, t_k, t_{k+1}).$$

La definición (1.1) está claramente orientada a un estudio en el que se pudieron medir los *tiempos de salida* de cada vehículo, sin embargo, en general esto es posible si previamente se conocen los puntos en que se divide la carretera y se discriminan estos tiempos. Otro tipo de proyectos recolectan información mucho más detallada, como un ejemplo claro tenemos el proyecto NGSIM(next generation simulation vehicle trajectories and supporting data) [13] en el que se recolectó información específica de cada vehículo en diferentes sectores de Estados Unidos, particularmente en este trabajo se utilizó la información referida a la calle I-80; por medio de esta información fue posible construir una base de datos con 24 campos, de entre los cuales se destacan, el cuadro de video (frame) en que aparece cada vehículo, la posición en que los vehículos aparece dentro de cada cuadro y la distancia entre los vehículos vecinos. Con esta información fue natural preguntarse: ¿Cuándo un vehículo cruza un punto X de la calle de estudio dentro de un conjunto de cuadros de video?, para responder a esta pregunta se propone la proposición 1.1.

Proposición 1.1

Suponga que en una secuencia de cuadros de videos, f_1, f_2, \dots, f_k aparece el vehículo con etiqueta j y denote x_j^i la posición del vehículo j en el cuadro i , entonces este vehículo cruza el punto X de la sección de carretera en el intervalo de tiempo correspondiente a este conjunto de cuadros, si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\star) x_j^1 \leq X.$$

$$\star\star) x_j^s > X \text{ para algún } s \in \{2, 3, 4, \dots, k\}.$$

La prueba de la proposición (1.1) se desprende directamente de la definición de cruce. Con la proposición anterior se puede estimar cuantos carros pasan un punto de carretera considerando los cuadros de video.

2 Caso de estudio carretera I-80, línea 3, Estados Unidos

Para este primer caso de estudio se usó la información pública de la carretera I-80 reportada en [14]. El proyecto NGSIM tuvo como propósito recolectar información detallada del tráfico vehicular de 4 lugares en Estados Unidos, una de estas zonas de estudio corresponde a la carretera I-80, en este importante trabajo se recolectó información asociada a cada vehículo

como la posición, velocidad, aceleración, tipo de vehículo, tamaño del vehículo entre otros datos.

En esta sección se describirá como se dio tratamiento a esta base de datos y como se extrajo información relevante para los modelos macroscópicos.

1. Inicialmente se obtuvo la información completa desde la página [14], esto incluye todas las carreteras. Para trabajar con los datos que allí se presentan, fue necesario hacer algunos ajustes mínimos a la propia base de datos con el objetivo de mejorar el acceso a ella. Uno de los ajustes en cuestión consistió en fragmentar la base de datos debido a su peso en información (2GB).
2. Se desarrollo la clase *BaseDatos* en *Python*, donde uno de sus principales atributos es una estructura de datos (*diccionario*) tal que las *palabras* que contiene, corresponden a los cuadros de video (frame) asociados a la carretera I-80 y la *definición* de cada palabra viene a ser el conjunto de carros que aparecen en el cuadro en cuestión, acompañados con datos como la posición, velocidad, entre otros.
3. Una vez creada la estructura del diccionario, se desarrollaron diferentes métodos con la finalidad de medir variables como la densidad, la velocidad y la frecuencia.

Diagrama Fundamental

Una de las premisas que se suscitan en los modelos macroscópicos es que la densidad y la velocidad de los vehículos se relacionan de una forma estable, comprobaremos en este apartado que la información obtenida de la calle I-80 obedece a estas reglas.

La carretera I-80 contiene 7 carriles, en este apartado se escogerá el carril número uno, uno de los carriles de mayor velocidad de tránsito. Para poder extraer la información, se utilizó el siguiente código:

```
1 import numpy as np
2 import ClaseBase as CB
3 BaseP=CB.BaseDatos("i-80",72,118)
4 (DA,DV,DDP,DDV)=BaseP.PuntosMinimosCuadrados('1','2')
5 (D,V)=CB.AgruparDatos(np.array(DV),(np.array(DDP),np.array(DDV)),60,2)
6 V=np.array(V)*3600/3280.84
7 D=1/(np.array(D)+16.4042)*3280.84
```

Tabla de promedios de densidades y velocidades

Velocidad(km/h)	Densidad(C/km)	Velocidad(km/h)	Densidad(C/km)
0.137	28.69	2.692	41.16
4.571	35.9	5.976	44.341
7.942	39.337	9.822	29.83
11.094	37.007	13.313	38.828
15.046	44.153	16.708	44.877
18.534	43.91	20.314	43.231
22.005	47.164	23.746	42.928
25.511	38.399	27.414	40.026
29.089	39.144	30.881	39.353
32.805	37.934	34.381	36.325
36.116	35.125	38.14	33.799
39.588	32.736	41.393	31.78
43.547	30.366	44.885	30.368
46.673	30.141	48.468	29.321
49.87	28.994	51.944	28.837
53.742	28.975	55.233	27.45
57.246	30.662	58.996	27.306
60.593	24.244	62.467	24.762
64.263	23.805	65.92	22.683
67.769	22.706	69.554	24.084
71.324	22.855	73.03	25.807
74.837	22.845	76.614	21.7
78.326	17.835	80.077	21.572
81.968	17.17	83.614	16.773
85.341	16.613	87.266	16.264
88.874	23.537	90.604	12.989
92.45	12.901	94.289	14.155
96.0	13.544	97.548	14.56
99.311	15.544	101.321	14.945
102.946	13.358	104.519	14.352

En el código anterior en la línea 3 se carga la información de los vehículos de la calle I-80, el primer parámetro corresponde con el nombre de la calle, los dos últimos parámetros corresponden con el rango de los archivos donde se encuentran estos datos. En la línea 4 se llama a la función *PuntosMinimosCuadrados*, la cual recibe el carril y el tipo de vehículos que se quieren estudiar. La salida es una 4-upla formada por diferentes listas, la primera lista se asocia con todas las lecturas de las aceleraciones, la segunda con las velocidades, la tercera con la distancia existente entre los vehículos y la cuarta con la diferencia entre las velocidades.

La línea 5 a través de la función *AgruparDatos*, agrupa las velocidades y calcula los promedios de las correspondientes distancias entre vehículos. Las líneas 7 y 8 representan un ajuste de las unidades que tienen los datos por defecto.

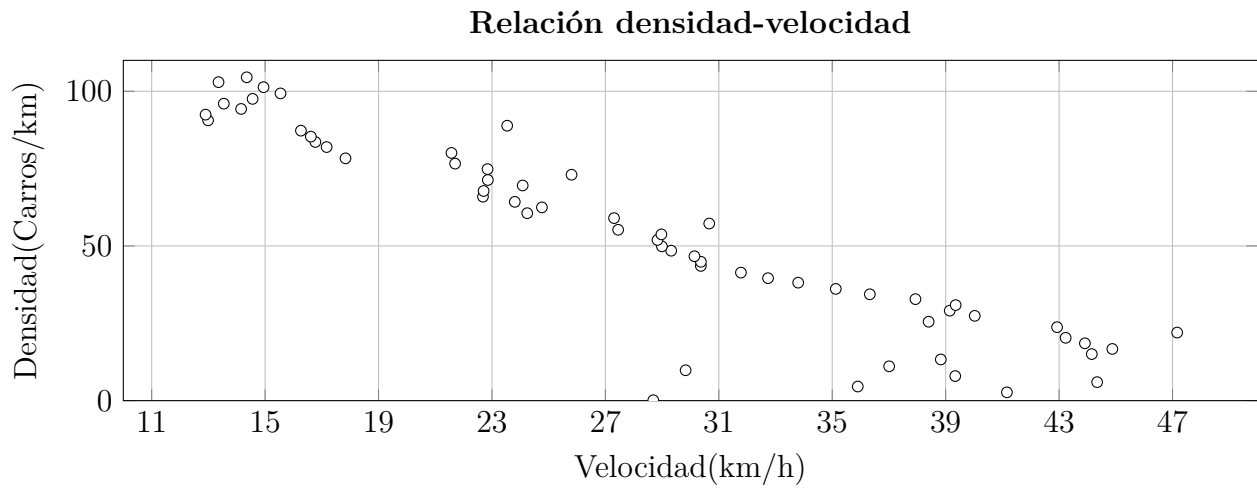


Figura 4.3: En la figura se observan las densidades promedio con las respectivas velocidades promedio de los carros que circularon por el carril 1 de la calle I-80.

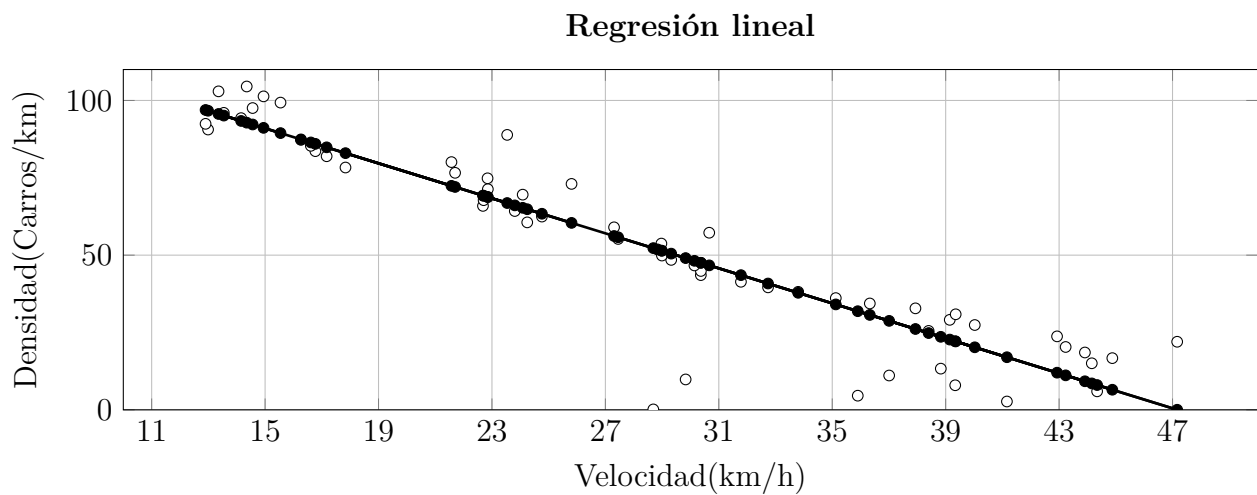


Figura 4.4: En la figura se observan las densidades promedio con las respectivas velocidades promedio de los carros que circularon por el carril 1 de la calle I-80, además la línea continua muestra la regresión lineal para esta información.

La siguiente tabla contiene la información obtenida en las variables D y V de la línea 5.

En la Figura 4.3 se puede apreciar la gráfica de los puntos anteriores, se advierte una evidente relación entre la densidad y la velocidad. Asumiendo una relación de naturaleza lineal se ha hecho una regresión lineal con ayuda de la función *LinearRegression* de *sklearn* en *Python*. Los resultados muestran que la relación entre densidad y velocidad viene dada por la siguiente ecuación:

$$v = 133.41033 - 2.8281\rho. \tag{2.1}$$

Con lo anterior se puede conjeturar que la dinámica de la densidad en el carril uno de la carretera I-80 viene dada por la ecuación diferencial siguiente:

$$\rho_t + [\rho(133.41033 - 2.8281\rho)]_x = 0, \quad (2.2)$$

desde luego asumiendo que no hay entradas ni salidas de la sección de carretera.

3 Caso de estudio carretera I-80, línea 2, Estados Unidos

En este experimento, al igual que antes, se consideró la información proveniente del proyecto NGSIM. Aquí se usó la información que proviene de la línea dos de la carretera I-80.

Inicialmente se particionó el plano espacio-densidad, justo como se hace en el caso cuando

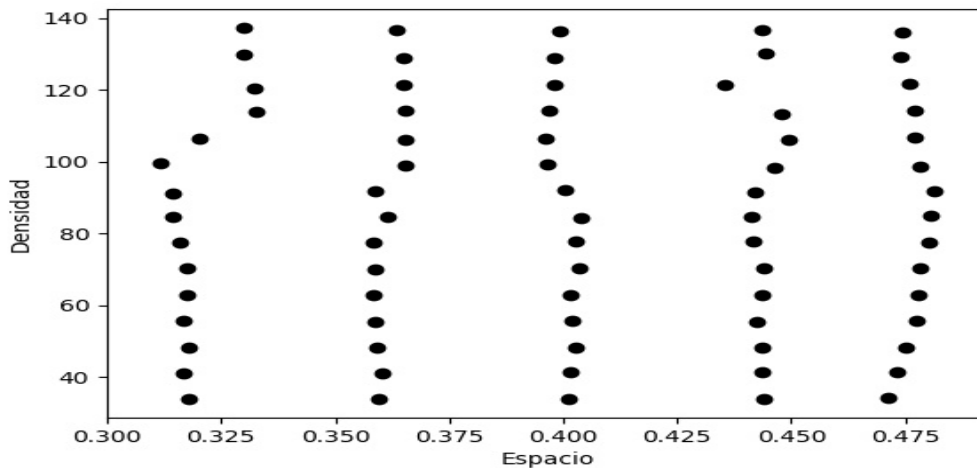


Figure 4.5: Promedios de la partición espacio-densidad

solo se considera la densidad y la velocidad. Luego se buscaron por medio de una rutina, aquellos puntos en el plano espacio-densidad dentro de cada rectángulo, para finalmente calcular el promedio en cada rectángulo, gráficamente se puede apreciar este procedimiento en la Figura 4.5.

Como se puede ver en la Figura 4.5, se hizo una partición de 5×15 . Con la información ya promediada, se procedió a la estimación de los parámetros, el problema en cuestión es el siguiente:

Definición 3.1 (Modelo Densidad-Espacial)

Suponga que se tiene un conjunto de tripletas de la forma, (x_i, q_i, v_i) para $i = 1, \dots, n$, donde x_i corresponde con la posición de un vehículo, v_i es su velocidad y q_i es la densidad con respecto al vehículo en frente de este. Se define el problema correspondiente al modelo con flujo dependiente de la variable espacial como sigue:

$$\min_{(a,b,q_{max})} \sum_{i=1}^n \left[(ax_i + b) \left(1 - \frac{q_i}{q_{max}} \right) - v_i \right]^2.$$

Por medio de la función `least_squares` de la librería `python`, fue posible resolver este problema con ayuda de la base de datos proveniente de la carretera I-80. La información en la siguiente tabla recoge los parámetros encontrado, y además se compara con el modelo donde el flujo depende únicamente de la densidad.

Tabla de estimación de parámetros

Modelo	Flujo	ECM
Flujo densidad-espacial	$(23.68x + 18.64)q(1 - q/154.04)$	40.2
Flujo densidad	$98.42q(1 - q/71.32)$,	46.88

En la tabla anterior se observa que error cuadrático medio es menor en el modelo con flujo dependiente de la variable espacial comparado con el modelo que solo depende de la densidad, además por la forma de la función $v(x) = ax + b$ se puede interpretar que las velocidades de los vehículos aumentan a medida llegan al extremo de salida de la sección de estudio.

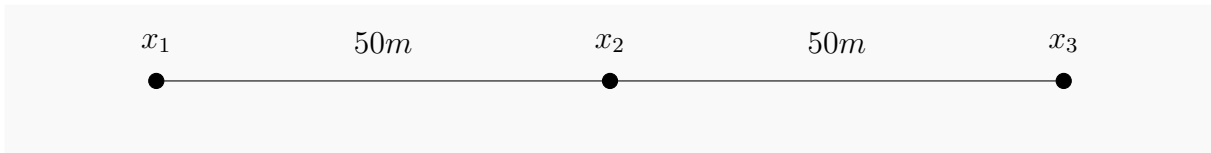
Para terminar este estudio se consideró hacer algunas estimaciones sobre la media del error. Con ayuda de la función `sms` de la librería `statsmodels.stats.api` de python se logró calcular un intervalo de confianza, con lo cual se concluye finalmente con una confianza del 95%, el promedio de los errores para el modelo con flujo dependiente de la variable espacial se encuentra en el intervalo $[4.83, 6.26]$ mientras que el error promedio para el modelo con flujo dependiente de la densidad (únicamente) se encuentra en el intervalo $[3.08, 7.83]$.

4 Caso de estudio Anillo Periférico, Greenshield

Este experimento se hizo en el carril izquierdo de una sección del anillo periférico de Tegucigalpa donde no se observa intención de parte de los conductores de cruzar el carril en el que se encuentran. Para llevar a cabo la tarea se usó la cámara de un teléfono y un editor

de video, con el objetivo de calcular las cantidades asociados a los modelos que se estudiaron en este trabajo; es decir, cantidades como la velocidad, la densidad, la posición.

Inicialmente se grabaron 5 minutos continuos de una sección del anillo periférico, entre los puntos $x_1=14^\circ02'58.0''N$ $87^\circ12'01.2''W$ y $x_3=14^\circ03'00.9''N$ $87^\circ12'05.3''W$ (datos proporcionados por Google Maps), la distancia comprendida entre estos dos puntos es de aproximadamente 150 metros, información que se pudo obtener con la herramienta de medición de *Google Maps*. El tramo donde se hizo la grabación se dividió en dos partes de longitudes aproximadamente iguales(50 metros cada parte), para más detalle refiérase a la siguiente figura.



Se observaron exactamente 144 vehículos en la duración completa del video, con ayuda de el editor de video *Kdenlive* se estimaron los valores de salida $\tau(c_i, x_j)$ para $i \in \{1, 2, \dots, 144\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$. La información se ve condensada en el cálculo del flujo a través de los tres puntos. Para calcular el flujo se dividió el intervalo de tiempo $[0, \tau]$ en 13 partes iguales. Para medir el flujo absoluto se usó la condición de cruce (1.1). Los datos obtenidos se presentan en la Tabla 4.1.

Flujos

x_1	x_2	x_3
9	10	9
10	9	10
10	10	9
10	10	10
12	10	11
9	10	10
12	12	11
8	9	10
13	12	11
10	11	11
8	9	9
9	8	9
8	8	7
12	10	12

Tabla 4.1: Flujos de una sección de carretera de Tegucigalpa.

Densidades		
$t(s)$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$
0	2	2
21.41	1	3
42.86	2	2
64.29	2	3
85.71	2	3
107.14	4	2
128.57	3	2
150	3	3
171.43	2	2
192.86	3	3
214.29	2	3
235.71	1	3
257.14	2	2
278.57	2	3
300	4	1

Tabla 4.2: Densidades en una sección de carretera de Tegucigalpa.

Al inicio del video se observa que $E(x_1, x_2, 0) = 2$ y que $E(x_2, x_3, 0) = 2$ con lo cual se puede estimar el número de vehículos en los tramos $(x_1, x_2]$ y $(x_2, x_3]$, dicho de otra forma se pueden calcular las densidades relativas en estos tramos de carretera, la información se presenta en la Tabla 4.2.

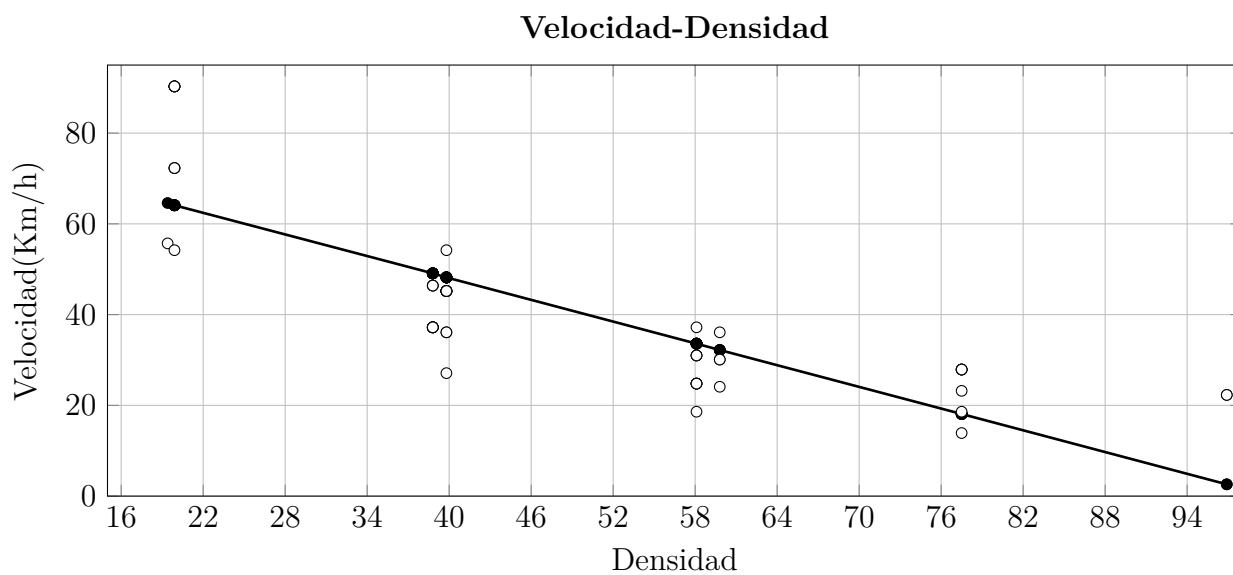


Figura 4.6: En la figura se observan las densidades comparadas con las respectivas velocidades del estudio (puntos blancos), los puntos negros representan una regresión lineal de estos puntos.

Densidades, flujos y velocidades

t	$f(x_2, \cdot)$	$\rho(x_2, \cdot)$	$v(x_2, \cdot)$	$f(x_3, \cdot)$	$\rho(x_3, \cdot)$	$v(x_3, \cdot)$
0	1680	38.752	43.352	1512	39.849	37.944
21.429	1512	19.376	78.034	1680	59.773	28.106
42.857	1680	38.752	43.352	1512	39.849	37.944
64.286	1680	38.752	43.352	1680	59.773	28.106
85.714	1680	38.752	43.352	1848	59.773	30.917
107.143	1680	77.504	21.676	1680	39.849	42.16
128.571	2016	58.128	34.682	1848	39.849	46.376
150	1512	58.128	26.011	1680	59.773	28.106
171.429	2016	38.752	52.023	1848	39.849	46.376
192.857	1848	58.128	31.792	1848	59.773	30.917
214.286	1512	38.752	39.017	1512	59.773	25.296
235.714	1344	19.376	69.364	1512	59.773	25.296
257.143	1344	38.752	34.682	1176	39.849	29.512
278.571	1680	38.752	43.352	2016	59.773	33.728

Table 4.3: Flujos, densidades y velocidades recolectadas de una sección del anillo periférico.

Con ayuda de la información recogida en la Tabla 4.2 y suponiendo que la relación densidad-flujo es correcta, fue posible encontrar los valores de la velocidad asociados a sus respectivas densidades y flujos. Esta información se presenta en la Tabla 4.3.

Como dos ejercicios de exploración, se han estimado los parámetros para el modelo de [6] y [5]. Usando la información recolectada en este trabajo, se observa que para el modelo de Greenberg se obtiene la siguiente relación entre velocidad y densidad:

$$V(q) = 37.284 \log(129.67/q). \quad (4.1)$$

De la ecuación anterior y la relación velocidad-flujo se obtiene que:

$$f(q) = 37.284q \log(129.67/q). \quad (4.2)$$

Dos observaciones importantes se pueden hacer a continuación, el argumento del logaritmo viene a ser lo que en la literatura se conoce como densidad de atascamiento o densidad máxima, $q_{max} = 129.67Vh/Km$, esto es, la máxima cantidad de vehículos que soporta esta carretera, en este caso particular se tiene que 130 vehículos por kilómetro es el máximo número de autos que soporta esta carretera. La segunda observación es sobre el flujo máximo de la carretera, este cálculo se puede hacer encontrando el punto donde la derivada de q respecto a q se hace cero,

esto es en $q = 47.703Vh/Km$.

Por otro lado, si se considera el modelo $f(q) = v_{max}q(1 - q/q_{max})$ y se realiza la regresión sobre los datos, se obtiene que $v_{max} = 80Km/h$ y $q_{max} = 100vh/Km$. Para este segundo modelo se aprecia fácilmente que el flujo óptimo se alcanza en $q = 50vh/Km$ y el flujo correspondiente a este valor es de 2000 vehículos por hora. A pesar de que algunos parámetros no coincidan con exactitud, si se tienen significativas similitudes entre los dos modelos; para ello se puede observar que el flujo óptimo en ambos casos se encuentra en valores similares de densidad.

5 Caso de estudio Anillo Periférico, Greenshield espacial.

En el siguiente apartado se siguió utilizando la información referida al caso anterior. Aquí se ha considerado la posibilidad de capturar a través del modelo que se desarrolló en este trabajo, un fenómeno particular que se da en esta sección de carretera del anillo periférico; sucede que en dicho tramo, el conductor tiene la sensación que al pasar por el primer extremo de tal sección con una velocidad relativamente alta, sin importar la densidad en ese instante, habitualmente requiere de disminuir su velocidad al salir de este segmento de carretera. La situación anterior dista completamente de ser un fenómeno raro, si se considera que en este tramo de carretera se encuentra a orillas de negocios que perturban el movimiento del tráfico, además de que el sector de carretera tiene una pequeña pendiente que evidentemente termina afectando a la dinámica.

Los modelos clásicos donde se tiene un flujo que solo depende de la densidad, no podrían representar por si solos esta situación. Al igual que el caso de estudio de la calle I-80, aquí se presenta un problema análogo al que se resolvió en ese caso de estudio:

Definición 5.1 (Modelo Densidad-Espacial)

Suponga que se tiene un conjunto de tripletas de la forma, (x_i, q_i, v_i) para $i = 1, \dots, n$, donde x_i corresponde a una marca en la carretera de estudio, q_i es la densidad en un entorno de este punto y v_i son las velocidades que pueden ser obtenidas de la relación entre velocidad, densidad y flujo. Se define el problema correspondiente al modelo con flujo dependiente de la variable espacial como sigue:

$$\min_{(a,b,q_{max})} \sum_{i=1}^n \left[(ax_i + b) \left(1 - \frac{q_i}{q_{max}} \right) - v_i \right]^2.$$

$$f = (ax + b)q(1 - q/q_{max}).$$

Usando la función *minimize* de la librería *scipy.optimize* se encontró que:

$$a = - 51.67,$$

$$b = 97.25,$$

$$\rho_{max} = 91.197.$$

Podemos apreciar que los resultados exhiben la dinámica de la que se estaba hablando, es decir podemos notar que la función de velocidad es decreciente como se esperaba. Por ejemplo se puede notar que la velocidad máxima en la entrada a la carretera es de 97.25km/h mientras que a la salida se tiene una velocidad máxima de 87.89Km/h , se observa entonces una disminución considerable en la velocidad debido a la ubicación de los vehículos.

Para finalizar este estudio se ha considerado calcular un intervalo de confianza para los errores, considerados como datos de una muestra. Para ello se ha usado la función *smc* de la librería *statsmodels.stats.api* para estimar el intervalo de confianza para la media de los errores. Haciendo lo que se mencionó antes, se concluyó que el error promedio se encuentra en el intervalo $[9.5, 13.05]$ con un nivel de confianza del 95%.

Conclusiones y trabajos a futuro

1 Conclusiones

1. Al igual que en el artículo [8] de Holden y Risebro, aquí se encontraron las condiciones de acoplamiento para un sistema de carreteras, visto como un grafo donde las aristas son las calles y los vértices son las intersecciones de este. La principal diferencia entre el estudio hecho en [8] y el realizado en esta tesis, es que aquí se consideró hacer todo el análisis, usando un flujo vehicular que depende de la densidad y la variable espacial. Como resultado de este trabajo, se encontró en términos generales, el rango de valores para la densidad en los extremos de las secciones de carretera, de manera que el flujo vehicular se conserve en las intersecciones.
2. Una de las aplicaciones de la teoría de modelos continuos del tráfico vehicular, recae en generar simulaciones en tiempo real, y dado que los modelos macroscópicos son sugeridos para problemas a gran escala, como es el caso de una red de tráfico vehicular, se decidió implementar un método explícito para resolver la ecuación diferencial parcial asociada al modelo de estudio, puesto que este tipo de esquemas numéricos, toman ventaja de su bajo costo computacional en comparación con los métodos implícitos. En la teoría de volúmenes finitos se dispone de un conjunto de métodos explícitos, particularmente se logró implementar el esquema numérico de Godunov, esto último requirió de un esfuerzo extra, puesto que en la literatura no se encontraba explícitamente el flujo numérico asociado.
3. En este trabajo se implementó y validó el esquema de Godunov mencionado en el punto

anterior. Se pudo validar la convergencia del método a través de tres ejemplos con su solución exacta conocida.

4. Se desarrollaron dos estrategias metodológicas para la recolección de datos del tráfico, la primera metodología se construyó bajo el supuesto que los datos se obtendrían por medio de una cámara de video. La segunda estrategia consistió en dar tratamiento a una base de datos proporcionada por una organización pública de Estados Unidos, este trabajo requirió del desarrollo de código de programación para filtrar los datos relevantes para el modelo de estudio. Con las dos fuentes de datos para el tráfico vehicular, se estimaron los parámetros asociados al modelo de Greenshield y el modelo usado en este trabajo, además se usaron algunas herramientas de inferencia estadística, para comparar el error de ambos modelos, este último aspecto reveló un mejor ajuste por parte del modelo con flujo dependiente de la variable espacial.

2 Trabajos a futuro

1. Para realizar aplicaciones reales al tráfico vehicular usando modelos continuos del tráfico, es necesario recoger grandes cantidades de datos del mismo con el propósito de estimar los parámetros involucrados. En la actualidad existen grandes bancos de datos al respecto, un ejemplo claro es el usado en este trabajo, sin embargo, muchas veces el estudio del que se derivan los datos de estos bancos, se ha hecho en entornos relativamente pequeños, no siendo suficiente para el estudio de toda una red de carreteras de una ciudad. En algunos países, ni siquiera existen bases de datos robustas que permitan hacer un estudio de este tipo de modelos a gran escala. Es por esto, que en este punto se propone el desarrollo de estrategias metodológicas que permitan recabar datos a gran escala, cuidando la economía del proceso.
2. Un proyecto que ya se ha empezado después del trabajo realizado aquí y por lo tanto una labor a futuro, corresponde al desarrollo de una aplicación que permita extraer la información topológica de una ciudad por medios gratuitos como Google Map o Google Earth y luego utilizar esta información para el desarrollo de simulaciones sobre regiones arbitrarias de un sistema de carreteras.

3. En el aspecto computacional se propone el uso del flujo numérico desarrollado en este trabajo a través de otros esquemas numéricos, como los derivados de los métodos DG y LDG. Además se propone hacer la implementación de este tipo de esquemas numéricos en sus versiones con rejillas adaptativas.

Apéndice



1 Ecuaciones Cuasilineales

La siguiente sección comprende una revisión detallada de los capítulos *II* y *III* del libro [19], para tener una comprensión profunda de la ecuación diferencial cuasilineal asociada al problema de tráfico vehicular. Muchos de los métodos numéricos que se estudian en los capítulos posteriores están basados en la habilidad que se requiere para resolver un problema de esta naturaleza de forma exacta.

1.1 Superficies

Definición 1.1

Sea Ω abierto de \mathbb{R}^3 , el conjunto de puntos $S_c = \{(x, y, z) \in \Omega \mid F(x, y, z) = c\}$ define una superficie si $\text{grad}F \neq 0$ en Ω .

Un resultado importante relacionado con las superficies es el concerniente al vector normal en un punto de la superficie.

Proposición 1.1

Sea S_0 como en la definición (1.1) y suponga que $F \in C_1(\Omega)$ entonces $\text{grad}F$ es perpendicular a S_0 en todos sus puntos.

Demostración:

Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ tal que $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (esto se puede asumir sin pérdida de generalidad), entonces el teorema de la función implícita garantiza que existe un abierto U entorno de (x_0, y_0) y una función diferenciable $g : U \rightarrow W$ tal que $F(x, y, g(x, y)) = 0$ y $g(x_0, y_0) = z_0$. Considere ahora la recta $l(t) : (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ para $t \in \mathbb{R}$, esta es una recta que pasa por (x_0, y_0) en la dirección del punto (a, b) . Considérese ahora la función $f(t) = (l(t), g(l(t))) = (x_0 + ta, y_0 + tb, g(x_0 + ta, y_0 + tb))$, $f'(0)$ representa entonces el vector tangente a (x_0, y_0, z_0) en la dirección de (a, b) , en este caso $f'(0) = (a, b, ag_x(x_0, y_0) + bg_y(x_0, y_0))$, usando la regla de la cadena se obtiene que:

$$f'(0) = \left(a, b, -a \frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} - b \frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \right).$$

Finalmente se puede observar que $f'(0) \cdot \text{grad}F(x_0, y_0, z_0) = 0$ como se quería probar.

Considérese ahora dos superficies definidas por las: ecuaciones

$$F^1(x, y, z) = 0 \text{ y } F^2(x, y, z) = 0.$$

Intuitivamente se sabe que la intersección de dos superficies es una curva uniparamétrica.

Basándose en esta observación se establece el siguiente resultado:

Proposición 1.2

Sean F^1 y F^2 dos funciones $C^1(\Omega)$ para Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 . Si el producto cruz $\text{grad}F^1(x, y, z) \times \text{grad}F^2(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \Omega$ entonces existe una curva uniparamétrica que pertenece a las superficies definidas por F^1 y F^2 .

Demostración:

Sea $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, sin pérdida de generalidad se supone que

$$F_y^1(X_0)F_z^2(X_0) - F_z^1(X_0)F_y^2(X_0) \neq 0.$$

Se puede argumentar que $F_z^1(X_0) \neq 0$ y $F_y^2(X_0) \neq 0$ o que $F_y^1(X_0) \neq 0$ y $F_z^2(X_0) \neq 0$, sin pérdida de generalidad se supone que $F_z^1(X_0) \neq 0$ y $F_y^2(X_0) \neq 0$. Como $F_z^1(X_0) \neq 0$ entonces existe una función g tal que $F^1(x, y, g(x, y)) = 0$ y de igual dado que $F_y^2(X_0) \neq 0$, existe una función

h tal que $F^2(x, h(x, z), z) = 0$. Con las funciones anteriores defínase $G(x, y) = y - h(x, g(x, y))$, es claro que $G(x_0, y_0) = 0$ y además se asevera que se garantiza la existencia de una función en x , $k(x)$, tal que $G(x, k(x)) = 0$, para probar esto basta con observar que $G_y(x_0, y_0) \neq 0$, para ello se calcula implícitamente esta derivada parcial:

$$G_y(x, y) = 1 - h_y(x, g(x, y))g_y(x, y) = 1 - \frac{F_z^2(x, h(x, g(x, y)), g(x, y)) F_y^1(x, y, g(x, y))}{F_y^2(x, h(x, g(x, y)), g(x, y)) F_z^2(x, y, g(x, y))},$$

evaluando esta última expresión en el punto (x_0, y_0) se obtiene que:

$$G_y(x_0, y_0) = 1 - \frac{F_z^2(x_0, y_0, z_0) F_y^1(x_0, y_0, z_0)}{F_y^2(x_0, y_0, z_0) F_z^1(x_0, y_0, z_0)} = \frac{F_y^1(X_0)F_z^2(X_0) - F_z^1(X_0)F_y^2(X_0)}{F_y^2(X_0)F_z^1(X_0)},$$

bajo las suposiciones que se hicieron al inicio, tanto el numerado como el denominador son diferentes de cero, con esto se garantiza que $G_y(x_0, y_0) \neq 0$ como se quería probar. Se afirma a continuación que la curva:

$$l(x) : (x, k(x), g(x, k(x))),$$

es la curva uniparamétrica buscada.

Para notar que la curva $l(x)$ pertenece a ambas, obsérvese que $F^1(x, y, g(x, y)) = 0$, sustituyendo $y = k(x)$ en esta identidad se tiene que $F^1(x, k(x), g(x, k(x))) = 0$ lo cual evidencia que $l(x)$ pertenece a la primera superficie, para la segunda superficie sustitúyase $z = g(x, k(x))$ en la identidad $F^2(x, h(x, z), z) = 0$, al hacerlo se tiene que $F^2(x, h(x, g(x, k(x))), g(x, k(x))) = 0$ y dado que $k(x) = h(x, g(x, k(x)))$ entonces se llega a que $F^2(x, k(x), g(x, k(x)))$, con lo que se evidencia de nuevo que $l(x)$ pertenece a la segunda superficie.

1.2 Curvas y superficies integrales

Se describirá un tipo especial de curva asociada a un campo vectorial

Definición 1.2

Una curva con derivada no nula $C : (x(t), y(t), z(t))$ definida en un conjunto abierto Ω es una **curva integral** de un campo vectorial $V(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$ si V es tangente a C en cada uno de sus puntos. Es decir:

$$(a(x(t), y(t), z(t)), b(x(t), y(t), z(t)), c(x(t), y(t), z(t))) = \kappa(t)(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Proposición 1.3

Si C es una curva integral del campo vectorial V entonces existe una reparametrización de C tal que:

$$(a(x(\tau), y(\tau), z(\tau)), b(x(\tau), y(\tau), z(\tau)), c(x(\tau), y(\tau), z(\tau))) = (x'(\tau), y'(\tau), z'(\tau)).$$

Demostración:

Supóngase que C es una curva integral de V , por la definición (1.2) se tiene que

$$(a(X(t), Y(t), Z(t)), b(X(t), Y(t), Z(t)), c(X(t), Y(t), Z(t))) = \kappa(t)(X'(t), Y'(t), Z'(t)).$$

Definanse $T(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t))$ y $V(t) = (a(X(t), Y(t), Z(t)), b(X(t), Y(t), Z(t)), c(X(t), Y(t), Z(t)))$, efectuando el producto punto por $T(t)$ en la relación anterior se tiene que:

$$\kappa(t) = \frac{T(t) \cdot V(t)}{|T(t)|^2}.$$

Considérese ahora el problema de encontrar una reparametrización $t(\tau)$ de la curva C , para ello se sustituye $t(\tau)$ en la primera relación:

$$V(t(\tau)) = \kappa(t(\tau))(X'(t(\tau)), Y'(t(\tau)), Z'(t(\tau))).$$

Si se hace la suposición de que $t'(\tau) = \kappa(t(\tau))$ y se define $x(\tau) = X(t(\tau))$, $y(\tau) = Y(t(\tau))$ y $z(\tau) = Z(t(\tau))$, entonces se llega a la relación:

$$V(t(\tau)) = (x'(\tau), y'(\tau), z'(\tau)),$$

o lo que es equivalente a escribir:

$$(a(x(\tau), y(\tau), z(\tau)), b(x(\tau), y(\tau), z(\tau)), c(x(\tau), y(\tau), z(\tau))) = (x'(\tau), y'(\tau), z'(\tau)).$$

Definición 1.3

Sean u una función $C^1(\Omega)$, u es llamada **primera integral** del campo vectorial V si para cada $(x, y, z) \in \Omega$, V es ortogonal al $\text{grad}(u)$, lo que es equivalente a:

$$Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0.$$

Definición 1.4

Se dice que dos funciones u^1 y u^2 pertenecientes a $C^1(\Omega)$ son **funcionalmente independientes** si para todo $(x, y, z) \in \Omega$ se tiene que:

$$\text{grad}(u^1) \times \text{grad}(u^2) \neq 0.$$

La siguiente proposición clasifica a todas las curvas integrales de un campo vectorial V , la demostración de este resultado se hace con bastante detalle en [19] y por lo tanto no se hará en este trabajo.

Teorema 1.1

Sean u^1 y u^2 funcionalmente independientes y primeras integrales del campo vectorial V . Entonces las ecuaciones

$$u^1(x, y, z) = c_1, \quad u^2(x, y, z) = c_2,$$

describen la colección completa de curvas integrales de V en Ω .

El sentido en el que estas dos ecuaciones proporcionan una curva viene de la proposición (1.2), donde se exigía justamente que u^1 y u^2 fuesen funcionalmente independientes para que estas definieran una curva uniparamétrica.

Proposición 1.4

Si $f(u, v)$ es una función diferenciable y u^1, u^2 primeras integrales de V entonces $w = f(u^1, u^2)$ también es una primera integral de V .

Para observar que el resultado es verdadero, basta sustituir w en la definición de primera integral

$$\begin{aligned}
Pw_x + Qw_y + Rw_z &= P(f_u(u^1, u^2)u_x^1 + f_v(u^1, u^2)u_x^2) + Q(f_u(u^1, u^2)u_y^1 + f_v(u^1, u^2)u_y^2) \\
&\quad + R(f_u(u^1, u^2)u_z^1 + f_v(u^1, u^2)u_z^2) \\
&= f_u(u^1, u^2)(Pu_x^1 + Qu_y^1 + Ru_z^1) + f_v(u^1, u^2)(Pu_x^2 + Qu_y^2 + Ru_z^2) \\
&= f_u(u^1, u^2)(0) + f_v(u^1, u^2)(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2

Sean u^1, u^2 funcionalmente independientes y primeras integrales de V en un abierto Ω . Sea u una primera integral de V en Ω y $w_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto particular en Ω . Entonces existe un abierto U que contienen a w_0 y una función H^1 diferenciable de dos variables $H^1(u, v)$ tal que:

$$u(x, y, z) = H^1(u^1(x, y, z), u^2(x, y, z)).$$

Demostración:

Puesto que esta prueba es relativamente grande se dividirá en varias partes.

1. Como una notación consensuada, el entorno abierto de un punto dado, w_0 , se escribirá como $U(w_0)$.
2. Primero asúmase $u_y^2(X_0)u_z^1(X_0) - u_z^2(X_0)u_y^1(X_0) \neq 0$. En la proposición (1.2) se observó que $u_z^1(X_0) \neq 0, u_y^2(X_0) \neq 0$ o $u_z^2(X_0) \neq 0, u_y^1(X_0) \neq 0$. Aquí se supone sin pérdida de generalidad que $u_z^1(X_0) \neq 0, u_y^2(X_0) \neq 0$.
3. Tómesese inicialmente un punto particular $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ y el valor constante $v_0 = u^1(x_0, y_0, z_0)$. Al definir la función $F(x, y, z, v) = v - u^1(x, y, z)$ se tiene que esta posee un cero en el punto (x_0, y_0, z_0, v_0) , es decir $F(x_0, y_0, z_0, v_0) = 0$, como $u_z^1(X_0) \neq 0$ (inciso (2)) entonces $F_z(X_0, v_0) \neq 0$ y por lo tanto existe un entorno $U(x_0, y_0, v_0)$ tal que para

todo (x, y, v) en dicho entorno hay un único $z \equiv f(x, y, z)$ tal que:

$$v - u^1(x, y, f(x, y, v)) = 0.$$

4. Definiendo la función $G(x, y, v, w) = w - u^2(x, y, f(x, y, v))$ y a $w_0 = u^2(x_0, y_0, z_0)$, entonces se puede notar que $G(x_0, y_0, v_0, w_0) = 0$. Sumado a lo anterior se observa que $G_y(x_0, y_0, v_0, w_0) \neq 0$, para observar que esto es cierto se calcula esta derivada usando la regla de la cadena y luego se aplica derivación implícita al resultado.

$$\begin{aligned} G_y(x, y, v, w) &= u_y^2(x, y, f(x, y, v)) + u_z^2(x, y, f(x, y, v))f_y(x, y, v) \\ &= u_y^2(x, y, f(x, y, v)) - u_z^2(x, y, f(x, y, v)) \frac{u_y^1(x, y, f(x, y, v))}{u_z^1(x, y, f(x, y, v))} \\ &= \frac{u_y^2(x, y, f(x, y, v))u_z^1(x, y, f(x, y, v)) - u_z^2(x, y, f(x, y, v))u_y^1(x, y, f(x, y, v))}{u_z^1(x, y, f(x, y, v))}. \end{aligned}$$

Evaluando esta derivada en el punto (x_0, y_0, v_0, w_0) se llega a:

$$G_y(x_0, y_0, v_0, w_0) = \frac{u_y^2(X_0)u_z^1(X_0) - u_z^2(X_0)u_y^1(X_0)}{u_z^1(X_0)}.$$

Por las aclaraciones que se hicieron en el inciso (2), $G_y(x_0, y_0, v_0, w_0) \neq 0$ por lo tanto existe un entorno $U(x_0, v_0, w_0)$ tal que para todo (x, v, w) en dicho entorno existe un único $y \equiv g(x, v, w)$ tal que:

$$w - u^2(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w))) = 0.$$

5. La siguiente suposición es bastante fuerte, se supone que g y f son funciones 1-1, lo anterior es clave para hacer la siguiente afirmación, existen entornos, $U(y_0)$ y $U(z_0)$ tales que para todo $y \in U(y_0)$ y $z \in U(z_0)$ existen únicos $(x, v, w) \in U(x_0, v_0, w_0)$ y $(x, y, v) \in U(x_0, y_0, v_0)$ tales que:

$$y = g(x, v, w) \text{ y } z = f(x, g(x, v, w), v),$$

con lo anterior es posible escribir la función u de la siguiente forma:

$$u(x, y, z) = u(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w), v)) \text{ para } (y, z) \in U(y_0) \times U(z_0).$$

6. Ahora se define la función $H(x, v, w) \equiv u(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w), v))$, se probará que la derivada de H respecto a x es igual a cero. Usando la regla de la cadena y luego derivando implícitamente se pueden probar las siguientes igualdades:

$$f_x(x, g(x, v, w), v) = -\frac{u_x^1(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w), v))}{u_z^1(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w), v))},$$

$$g_x(x, v, w) = \frac{u_z^2(X)u_x^1(X) - u_x^2(X)u_z^1(X)}{u_y^2(X)u_z^1(X) - u_z^2(X)u_y^1(X)} \text{ para } X = (x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w), v)).$$

Antes de calcular la derivada respecto a x de la función H , por simplicidad se usa la siguiente notación:

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(a, b)}(X) = u_a^1(X)u_b^2(X) - u_b^1(X)u_a^2(X).$$

Ahora se calcula la derivada respecto a x de la función H .

$$\begin{aligned} H_x(x, v, w) &= u_x(X) - u_y(X)g_x(x, v, w) \\ &\quad + u_z(X)[f_x(x, g(x, v, w), v) + f_y(x, g(x, v, w), v)g_x(x, v, w)] \\ &= u_x(X) - u_y(X)\frac{\frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, z)}(X)}{\frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X)} \\ &\quad + u_z(X)\left[-\frac{u_x^1(X)}{u_z^1(X)} + \frac{u_y^1(X)}{u_z^1(X)}\frac{\frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, z)}(X)}{\frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X)}\right]. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la relación anterior por $\frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X)$ (se sabe que este

término no es cero por hipótesis) se llega a:

$$\begin{aligned}
H_x(x, v, w) &= u_x(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X) - u_y(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, z)}(X) \\
&\quad + u_z(X) \left[-\frac{u_x^1(X)}{u_z^1(X)} \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X) + \frac{u_y^1(X)}{u_z^1(X)} \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, z)}(X) \right] \\
&= u_x(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X) - u_y(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, z)}(X) + u_z(X) \left[\frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, y)}(X) \right] \\
&= u_x(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(y, z)}(X) - u_y(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, z)}(X) + u_z(X) \frac{\partial(u^2, u^1)}{\partial(x, y)}(X) \\
&= \det(M(X)),
\end{aligned}$$

donde

$$M(X) = \begin{pmatrix} u_x(X) & u_y(X) & u_z(X) \\ u_x^1(X) & u_y^1(X) & u_z^1(X) \\ u_x^2(X) & u_y^2(X) & u_z^2(X) \end{pmatrix}.$$

Nótese que el sistema $M(X)W = 0$ tiene una solución no trivial, esta es $W = V(X)$, por lo tanto $\det(M(X)) = 0$, así queda claro que $H(x, v, w) \equiv H^1(v, w)$, no depende de x .

7. Finalmente obsérvese que para $(y, z) \in U(y_0) \times U(z_0)$ como se especificó en el inciso (5) se tiene que:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w), v)) \\
&= H(x, v, w) \\
&= H^1(v, w) \\
&= H^1(u^1(x, y, f(x, y, v)), u^2(x, g(x, v, w), f(x, g(x, v, w)))) \text{ incisos (3) y (4)} \\
&= H^1(u^1(x, y, z), u^2(x, y, z)).
\end{aligned}$$

Definición 1.5

Se dice que la ecuación:

$$u(x, y, z) = c_1,$$

es una **superficie integral** del campo vectorial V si u es una primera integral de V .

Teorema 1.3

Si S es una superficie integral de $V = (P, Q, R)$ en un conjunto abierto Ω , entonces para todo punto de S perteneciente a una curva integral de V , pertenece a S . Por el contrario, si u es una función C^1 en Ω , con el atributo de que para todo $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ la curva integral pasando a través del punto (x_0, y_0, z_0) pertenece a la superficie de nivel pasando a través de (x_0, y_0, z_0) , entonces u es una primera integral de V .

Demostración:

Primero se probará la última parte del teorema. Sea $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva integral de V , por hipótesis $u(C(t)) = u(x_0, y_0, z_0)$, derivando esta expresión respecto a t y luego evaluando este resultado en $t = 0$ se llega a:

$$P(x_0, y_0, z_0)u_x^1(x_0, y_0, z_0) + Q(x_0, y_0, z_0)u_y^1(x_0, y_0, z_0) + R(x_0, y_0, z_0)u_z^1(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

lo cual evidencia que u^1 es una primera integral de V en Ω .

Para la primera parte del teorema basta con evaluar $C(t)$ en u y luego verificar que la derivada respecto a t es cero, implicando directamente que $u(C(t))$ no depende de t perteneciendo así a la superficie S definida por u .

El teorema anterior deja en su prueba una forma para encontrar primeras integrales, para advertir esto considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1

Encontrar dos primeras integrales funcionalmente independientes del campo vectorial

$$V(x, y, z) = (y, x, 1).$$

Se quiere encontrar la curva integral de V a través de la ecuación $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (y(t), x(t), 1)$. Como se explica en [19], este sistema de ecuaciones se puede escribir de una forma nemotécnica como:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1}.$$

De la primera igualdad se puede resolver usando separación de variables llegando a la

relación:

$$x^2(t) - y^2(t) = c_1,$$

reordenando las ecuaciones anteriores, también se llega a la siguiente igualdad:

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dz}{1}.$$

Aplicando nuevamente separación de variables se llega a:

$$e^{-z(t)}(x(t) + y(t)) = c_2.$$

En este punto se observa que las funciones $u^1(x, y, z) = x^2 - y^2$ y $u^2(x, y, z) = e^{-z}(x + y)$ verifican las hipótesis del teorema (1.3), por lo tanto estas dos funciones son primeras integrales del campo vectorial V . Comprobar que son funcionalmente independientes para algún conjunto abierto resulta fácil.

Proposición 1.5

Supóngase que V no es tangente a C en el punto (x_0, y_0, z_0) . En algún abierto Ω_0 de (x_0, y_0, z_0) , existe una única superficie integral de V conteniendo la parte de C en Ω_0 .

Demostración:

Sean u^1 y u^2 primeras integrales funcionalmente independientes de C . Sea $C : (x(t), y(t), z(t))$ con $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ y considérense las funciones:

$$G(u, t) = u - u^1(x(t), y(t), z(t)) \text{ y } H(v, t) = v - u^2(x(t), y(t), z(t)),$$

sucede que $G_t \neq 0$ o $H_t \neq 0$ en $t = 0$, suponiendo lo contrario se tendría que:

$$\text{grad } u^1(x_0, y_0, z_0) \cdot (x'(0), y'(0), z'(0)) = 0,$$

$$\text{grad } u^2(x_0, y_0, z_0) \cdot (x'(0), y'(0), z'(0)) = 0,$$

lo anterior implicaría que $(x'(0), y'(0), z'(0)) = \kappa V(x_0, y_0, z_0)$, puesto que u^1 y u^2 son primeras integrales de V , lo anterior contradice que V no es tangente a C en el punto (x_0, y_0, z_0) , por lo tanto como se dijo al inicio una de las dos derivadas son diferentes de cero, supóngase sin

pérdida de generalidad que $G_t(u^1(x_0, y_0, z_0), 0) \neq 0$, se tiene que existen abiertos $(u^1(x_0, y_0, z_0) - \delta, u^1(x_0, y_0, z_0) + \delta)$ y $(-\epsilon, \epsilon)$ tal que para todo $u \in (u^1(x_0, y_0, z_0) - \delta, u^1(x_0, y_0, z_0) + \delta)$ existe un único $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que:

$$u - u^1(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

como es habitual, lo anterior define una función $f : (u^1(x_0, y_0, z_0) - \delta, u^1(x_0, y_0, z_0) + \delta) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ tal que: $t = f(u)$, se asumirá adicionalmente que f es una función 1-1. Con lo anterior se puede escribir la siguiente relación:

$$u - u^1(x(f(u)), y(f(u)), z(f(u))) = 0.$$

Una observación importante derivada del hecho de que f se asume 1-1 es que existe la función $f^{-1} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (u^1(x_0, y_0, z_0) - \delta, u^1(x_0, y_0, z_0) + \delta)$, de manera que si $u \in (u^1(x_0, y_0, z_0) - \delta, u^1(x_0, y_0, z_0) + \delta)$ existe un único t tal que si se sustituye $u = f^{-1}(t)$ en la relación anterior, se obtiene:

$$f^{-1}(t) = u^1(x(t), y(t), z(t)).$$

Con todo lo anterior se define la siguiente superficie:

$$u^2(X, Y, Z) - u^2(x(f(u^1(X, Y, Z))), z(f(u^1(X, Y, Z))), z(f(u^1(X, Y, Z)))) = 0,$$

donde $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$ representa a la función de la curva. Por la proposición (2.2.2), la expresión de la izquierda es una primera integral del campo vectorial. Finalmente solo queda observar que la curva $C : (x(t), y(t), z(t))$ pertenece a esta superficie, para probarlo basta con sustituir en la ecuación:

$$\begin{aligned} & u^2(x(t), y(t), z(t)) - u^2(x(f(u^1(x(t), y(t), z(t))))), z(f(u^1(x(t), y(t), z(t))))), z(f(u^1(x(t), y(t), z(t)))))) \\ &= u^2(x(t), y(t), z(t)) - u^2(x(t), y(t), z(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior es válido puesto que antes se probó la igualdad $f^{-1}(t) = u^1(x(t), y(t), z(t))$.

Ahora se enuncia un resultado que determina una solución cuando la curva es tangente al campo vectorial.

Proposición 1.6

Supóngase que el campo vectorial $V = (P, Q, R)$ es tangente a la curva C en todo punto contenido en un entorno Ω_0 del punto (x_0, y_0, z_0) . Entonces existe un entorno $\Omega_1 \subset \Omega_0$ de x_0 de manera que existen infinitas superficies integrales de V conteniendo la parte de C en Ω_1 .

Demostración:

Sean u^1 y u^2 primeras integrales de V definidas en un entorno $\Omega_1 \subset \Omega_0$ de (x_0, y_0, z_0) , dado que V es tangente a C , entonces $V(x(t), y(t), z(t)) = \kappa(t)(x'(t), y'(t), z'(t))$, se puede comprobar fácilmente que al evaluar u^1 y u^2 en la curva C el resultado es independiente de t , para observarlo considérese hacer el cálculo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u^1(x(t), y(t), z(t)) &= x'(t)u_x^1(x(t), y(t), z(t)) + y'(t)u_y^1(x(t), y(t), z(t)) + z'(t)u_z^1(x(t), y(t), z(t)) \\ &= P(x(t), y(t), z(t))u_x^1 + Q(x(t), y(t), z(t))u_y^1 + R(x(t), y(t), z(t))u_z^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

El mismo cálculo se puede hacer para u^2 , de esta forma cualquier función $F \in C^1$ de dos variables que verifique la igualdad $F(u^1(x_0, y_0, z_0), u^2(x_0, y_0, z_0)) = 0$ definiría una superficie integral con la propiedad deseada. Como se puede garantizar fácilmente, cualquier superficie de la forma:

$$F(u^1, u^2) = 0,$$

garantiza las exigencias de la proposición.

Ejemplo 1.2

Encuentre la superficie integral de V en el Ejemplo (1.1) de manera que contenga a la curva $C(t) = (t, 1 - t, t)$.

En el ejercicio de referencia se encontraron las primeras integrales:

$$u^1(x, y, z) = x^2 - y^2 \text{ y } u^2(x, y, z) = e^{-z}(x + y).$$

Estas son independientes en el abierto $\Omega = \{(x, y, z) | x + y > 0\}$, se puede notar que $C(t)$ se encuentra completamente contenida en este conjunto. Se puede comprobar también que $C(t)$

no es tangente a V , por lo tanto se tiene un mecanismo para encontrar la superficie integral, el primer paso consiste en sustituir la curva en las primeras integrales:

$$\begin{aligned}u^1(x(t), y(t), z(t)) &= t^2 - (1 - t)^2 = c_1, \\u^2(x(t), y(t), z(t)) &= e^{-t}(t + (1 - t)) = c_2,\end{aligned}$$

de la primera relación se puede despejar t , obteniendo $t = (c_1 + 1)/2$, y sustituyendo este valor en la segunda relación, se obtiene que:

$$e^{-\frac{c_1+1}{2}} - c_2 = 0.$$

Como se establece en la proposición (1.5), la superficie integral buscada es:

$$e^{-\frac{x^2-y^2+1}{2}} - e^{-z}(x + y) = 0.$$

1.3 Ecuación diferencial parcial cuasilineal

En este apartado se analizarán los aspectos teóricos relacionados con la ecuación diferencial

$$a(x, t, z)z_x + b(x, t, z)z_y = c(x, y, z), \tag{1.1}$$

la cual se conoce en la literatura como ecuación diferencial parcial cuasilineal, el término se deriva naturalmente de las ecuaciones diferenciales parciales lineales, diferenciándose de este problema en que los coeficientes de las derivadas parciales dependen ahora de la variable dependiente.

El objetivo consiste en encontrar una solución apropiada para esta ecuación diferencial. El camino para llegar a la solución de este problema consiste en encontrar una superficie integral tal que la función que la define sea primera integral del campo vectorial asociado de la ecuación diferencial en cuestión.

La ecuación diferencial asociada al problema de tráfico vehicular tiene la forma estándar:

$$u_t + f(u)u_t = g(u, x, t),$$

donde se puede apreciar que esta corresponde genuinamente a una ecuación diferencial cuasilineal, es por esto que se tiene interés en entender el comportamiento de las soluciones de este problema.

Definición 1.6

Por una solución al problema (1.1) se entiende: encontrar una función $z \in C^1(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, tal que z verifique la ecuación (1.1).

Para resolver este problema se supone que el punto $(x, y, z(x, y))$ pertenece a una superficie de la forma:

$$u(x, y, z) = c_1,$$

donde $z(x, y)$ es solución de la ecuación (1.1). Para garantizar que $z(x, y)$ se puede despejar de la ecuación de la superficie se exige que $u \in C^1(\Omega)$ tal que para todo $(x, y, z) \in \Omega$ se tenga que $u_z(x, y, z) \neq 0$. De ser ciertas todas las suposiciones anteriores se tendrá que (1.1) se puede reescribir en la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= a(x, y, z)z_x + b(x, y, z)z_y - c(x, y, z) = a \left(-\frac{u_x(x, y, z)}{u_z(x, y, z)} \right) + b \left(-\frac{u_y(x, y, z)}{u_z(x, y, z)} \right) - c \\ &= \frac{-au_x(x, y, z) - bu_y(x, y, z) - u_z(x, y, z)c}{u_z(x, y, z)}. \\ au_x(x, y, z) + bu_y(x, y, z) + cu_z(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

En esta última expresión se evidencia que en realidad u debe ser una primera integral del campo vectorial $V(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$.

Ahora supóngase que se desea resolver el problema (1.1) considerando la condición:

$$z(x(t), y(t)) = f(t),$$

es decir, se asume que se conocen los valores de la función $z(x, t)$ en una curva uniparamétrica

del plano. Con lo anterior esta curva debe cumplir con la ecuación de la superficie integral asociada al problema:

$$u(x(t), y(t), f(t)) = 0,$$

derivando la última expresión respecto a t se tiene que:

$$x'(t)u_x(C(t)) + y'(t)u_y(C(t)) + f'(t)u_z(C(t)) = 0,$$

además se tiene que u es una primera integral de (a, b, c) , por ende:

$$a(C(t))u_x(C(t)) + b(C(t))u_y(C(t)) + c(C(t))u_z(C(t)) = 0,$$

donde $C(t) = (x(t), y(t), f(t))$. De lo anterior, considérese la siguiente línea de razonamiento:

$$\begin{aligned} u_x(C)(a(C)y' - b(C)x') &= [u_x(C(t))a(C(t))]y'(t) - [u_x(C(t))x'(t)]b(C(t)) \\ &= - [b(C)u_y(C) + c(C)u_z(C)]y' + [y'u_y(C) + f'(t)u_z(C)]b(C) \\ &= - c(C(t))u_z(C(t))y'(t) + b(C(t))f'(t)u_z(C(t))f'(t) \\ &= u_z(C(t))(b(C(t))f'(t) - c(C(t))y'(t)). \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} z_x(C(t)) &= - \frac{u_x(C(t))}{u_z(C(t))} \\ &= - \frac{b(C(t))f'(t) - c(C(t))y'(t)}{a(C(t))y'(t) - b(C(t))x'(t)}. \end{aligned}$$

De lo anterior se desprenden dos conclusiones. La primera es que $a(C(t))y'(t) - b(C(t))x'(t) \neq 0$ para que la derivada de la solución respecto a x esté bien definida y por último el término $a(C(t))y'(t) - b(C(t))x'(t)$ corresponde con la tercera componente del producto cruz del campo vectorial con el vector tangente de la curva, de esta forma al imponer esta condición también se establece que el campo vectorial no sea tangente a la curva $C(t)$, de la proposición (1.5) se deriva que es posible encontrar una única superficie integral que contenga a la curva $C(t)$, se llega a la misma conclusión encontrando la derivada respecto a y .

Ejemplo 1.3 (Ecuación de Burger)

En el problema del tráfico vehicular se encuentra un tipo de ecuación con la siguiente forma:

$$q_t + qq_x = 0,$$

donde q representa la densidad del tráfico vehicular. Se supone habitualmente que se tiene una densidad inicial, es decir $q(x, 0) = g(x)$. Encuentre la superficie integral de este problema que contiene a la condición inicial.

Como se analizó antes, se desea encontrar una superficie definida por la función $u(x, t, q)$ tal que:

$$qu_x + u_t + 0u_q = 0,$$

esta superficie debe contener a la curva $C(x) = (x, 0, g(x))$ puesto que esta curva representa la condición inicial. La condición necesaria para que las primeras derivadas estén bien definidas es:

$$\begin{aligned} 0 &\neq a(x, 0, g(x))y'(x) - b(x, 0, g(x))x'(x) \\ &= g(x)(0) - 1 \cdot 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Se pueden calcular las primeras integrales resolviendo el sistema:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dt}{1} = \frac{dq}{0},$$

este último sistema tiene por solución

$$\begin{aligned} q &= c_1 \\ x - qt &= c_2, \end{aligned}$$

sustituyendo la condición inicial en las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$g(x) = c_1 \text{ y } x = c_2,$$

de lo anterior se tiene que $g(c_2) = c_1$, esta última expresión define la superficie integral buscada:

$$g(x - qt) = q.$$

Definición 1.7

Supóngase que se tiene el problema (1.1), sea S_0 una superficie definida por la función u que define implícitamente a la solución de (1.1), además suponga que $(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$ pertenece a la superficie S_0 , cualquier curva en el plano (x, y) que mantenga constante el valor de z se conoce como curva característica.

En el ejemplo (1.3) se observó que la solución del problema era:

$$g(x - qt) = q,$$

por lo tanto las curvas características para este problema sean aquellas que hacen constante a q , es decir $q = c_1$ y si g no fuera una función constante $x - c_1t = c_2$ (constante), de la ecuación de la superficie se observa que $g(c_2) = c_1$, de lo anterior se tiene que las curvas características de este problema, son de la forma:

$$x - g(c_2)t = c_2,$$

en esta curva la función siempre toma el valor de $g(c_2)$.

1.4 Choque de curvas características

En el estudio del tráfico vehicular muchas veces cuando se modela la densidad q a través de un modelo continuo macroscópico, aparece una ecuación diferencial de la forma:

$$q_t + a(q)q_x = 0, \text{ sujeto a } q(x, 0) = g(x).$$

Con la teoría anterior se puede derivar fácilmente la superficie integral asociada a la solución, esta es

$$q = g(x - a(q)t).$$

Para los resultados que se analizarán a continuación se usará la siguiente notación:

$$\gamma(x_0, t) = (x_0 + a(g(x_0))t, t),$$

evidentemente $\gamma(x_0, t)$ es una curva característica. Suponga ahora que $\gamma(x_0, t)$ y $\gamma(x_1, t)$ se cortan en un punto (\hat{x}, \hat{t}) , además considere que $g(x_0) \neq g(x_1)$, por ende tendrían dos soluciones, lo cual genera una solución inconsistente.

Cuando dos curvas características se interceptan (chocan), se dice que se forma un choque entre curvas características. Como una solución a este problema se define el concepto de curva de choque. Supóngase que el primer choque de curvas características se da en el punto (x_0, t_0) , como se presenta en la siguiente Figura:¹

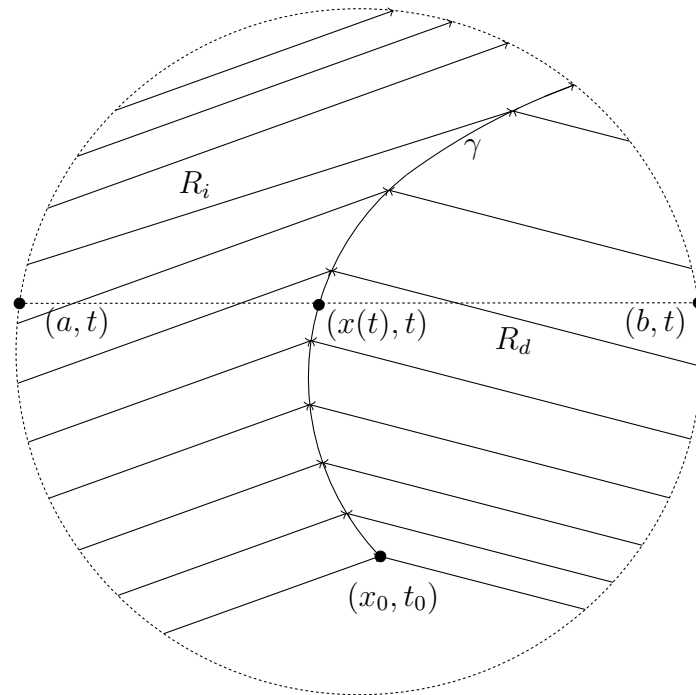


Figure 6.1: En la figura se pueden observar a las curvas características coincidiendo y siendo separadas por la curva γ .

Se ajusta una curva $\gamma : (x(t), t)$ tal que pasa por (x_0, t_0) y divide localmente al plano $x-t$ en dos regiones, R_i y R_d (izquierda y derecha respectivamente sen la anterior), tal que sobre ambas regiones la solución $q(x, t)$ es continuamente diferenciable. El siguiente resultado establece una condición suficiente para que la curva de choque separe correctamente a la información aportada

¹Esta imagen es de la propiedad del autor.

por las curvas características.

Proposición 1.1

Sean $q^+ = q(x(t)^+, t)$ y $q^- = q(x(t)^-, t)$ de manera que $q(x, t)$ es solución de la ley de conservación integral que deriva en la ecuación diferencial parcial $q_t + f(q)_x = 0$. Defínase a $x(t)$ como antes, entonces

$$x'(t) = \frac{f(q^+) - f(q^-)}{q^+ - q^-}.$$

Para hacer la demostración de este resultado se requiere la siguiente regla:

Lema 1.1 (Regla de Leibniz)

Suponga que $f(x, y)$ es continua, $h(y)$ y $g(y)$ funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dy} \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx = \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(h(y), y)h'(y) - f(g(y), y)g'(y). \quad (1.2)$$

Demostración de la proposición 1.1.

En toda la demostración refiérase a la Figura 6.1. Como q verifica la ecuación de la ley de conservación integral, entonces se verifica que:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t). \quad (1.3)$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_a^{x(t)} q(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x(t)}^b q(x, t) dx \\ &= \int_a^{x(t)} q_t(x, t) dx + \int_{x(t)}^b q_t(x, t) dx + q(x(t)^-, t)x'(t) - q(x(t)^+, t)x'(t) \\ &= - \int_a^{x(t)} f(q(x, t))_x dx - \int_{x(t)}^b f(q(x, t))_x dx + (q(x(t)^-, t) - q(x(t)^+, t))x'(t) \\ &= -f(q^-) + f(q(a, t)) - f(q(b, t)) + f(q^+) + (q^- - q^+)x'(t). \end{aligned}$$

Entonces se tiene la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = -f(q^-) + f(q(a, t)) - f(q(b, t)) + f(q^+) + (q^- - q^+)x'(t). \quad (1.4)$$

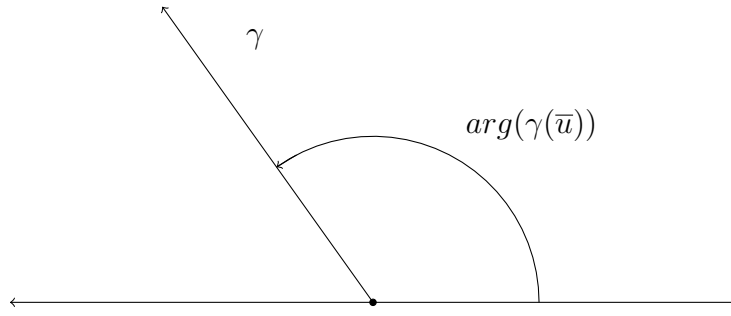


Figura 6.2: Definición de argumento.

Comparando (1.3) y (1.4) se llega la relación buscada. \square

2 Red de tráfico vehicular

En esta sección se expondrán con detalle algunos resultados relevantes para el desarrollo de este trabajo respecto a la teoría del tráfico vehicular en una red vial. Particularmente aquí se detallarán los resultados relacionados con los flujos en las intersecciones.

Uno de los objetivos de este apartado es probar que la densidad en las intersecciones pertenece a un rango específico, para ello consideremos la ecuación cuasilineal $u_t + f(u)_x = 0$ con condición inicial $u(x, t_0) = \bar{u}$. Como se discutió en la sección anterior una curva característica asociada a esta ecuación cuasilineal puede tener la forma $\gamma : f'(\bar{u})(t - t_0) + x_0 + it$.

Definición 2.1 (Argumento)

Sea γ una curva característica y $u = \gamma(t) - (x_0, z_0)$ con $t > t_0$, entonces se define el argumento de esta curva característica como $Arg(u)$ y se denota por $arg(\gamma(\bar{u}))$.

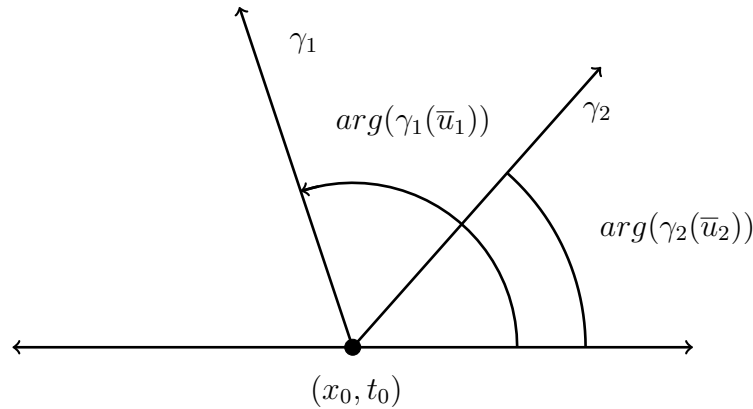
El valor de $arg(\gamma(\bar{u}))$ se interpreta geoméricamente en la siguiente figura:

Proposición 2.1

Sean γ_1 y γ_2 dos curvas características provenientes de la misma ecuación cuasilineal pero con diferentes condiciones iniciales, \bar{u}_1, \bar{u}_2 y que además pasan por el punto (x_0, y_0) . Si $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$ entonces $arg(\gamma_1) > arg(\gamma_2)$.

Demostración. Sea σ el valor en el que se maximiza $f(u)$, suponiendo que $f''(u) < 0$ entonces $f'(\bar{u}_2) > f'(\bar{u}_1)$ con lo cual $f'(\bar{u}_2)(t - t_0) + x_0 > f'(\bar{u}_1)(t - t_0) + x_0$, esto implica

gráficamente que:



gráficamente se observa que $arg(\gamma_1) > arg(\gamma_2)$. □

Como se define en [8], $\tau(u)$ es el punto dentro del intervalo $[0, 1]$ tal que $f(u) = f(\tau(u))$. El resultado (2.2) se ha probado con el propósito de clarificar la teoría, su enunciado original se puede encontrar entre líneas en [8] sin una demostración.

La proposición 2.2 se relaciona con una red de tráfico vehicular. Si se supone que i es una arista de entrada en el vértice J con una condición inicial constante igual a u_{i0} entonces el siguiente resultado es válido.

Proposición 2.2

Sea \bar{u}_i una condición de frontera en el extremo derecho de la arista i de salida.

1. Si $u_{i0} \in [0, \sigma]$ entonces $\bar{u}_i \in \{u_{i0}\} \cup (\tau(u_{i0}), 1]$.
2. Si $u_{i0} \in [\sigma, 1]$ entonces $\bar{u}_i \in [\sigma, 1]$.

Demostración.

1. Inicialmente considérese $u_{i0} \in [0, \sigma]$. Con esta primera suposición se tiene que $f'(u_{i0}) \geq 0$.

A continuación se argumentará porque \bar{u}_i pertenece a un rango específico.

- (a) $\bar{u}_i \in [0, u_{i0})$: Para este inciso se tiene que $f'(\bar{u}_i) > 0$ y $f'(u_{i0}) > 0$, como $u_{i0} > \bar{u}_i$ el resultado (2.2) establece que las curvas características chocan. Dado que $f(u)$ es

creciente para $u < \sigma$ podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{i0} > \bar{u}_i &\Rightarrow f(u_{i0}) > f(\bar{u}_i) \\ &\Rightarrow 0 > f(\bar{u}_i) - f(u_{i0}) \\ &\Rightarrow 0 < (f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})) / (\bar{u}_i - u_{i0}). \end{aligned}$$

Con lo anterior se observa que la información de la frontera no es consistente con el problema.

- (b) $\bar{u}_i \in (u_{i0}, \sigma]$: Para este inciso se tiene que $f'(\bar{u}_i) > 0$ y $f'(u_{i0}) > 0$, como $u_{i0} < \bar{u}_i$ el resultado (2.2) establece que las curvas características chocan. Dado que $f(u)$ es creciente para $u < \sigma$ podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{i0} < \bar{u}_i &\Rightarrow f(u_{i0}) < f(\bar{u}_i) \\ &\Rightarrow 0 < f(\bar{u}_i) - f(u_{i0}) \\ &\Rightarrow 0 < (f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})) / (\bar{u}_i - u_{i0}). \end{aligned}$$

Con lo anterior se observa que la información de la frontera no es consistente con el problema.

- (c) $\bar{u}_i \in (\sigma, \tau(u_{i0}))$: En este caso se forma un choque puesto que $f'(\bar{u}_i) < 0$ y $f'(u_{i0}) > 0$.

La pendiente de la curva de choque es igual a:

$$\frac{f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})}{\bar{u}_i - u_{i0}}.$$

Éste último valor es positivo por el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \tau(u_{i0}) > \bar{u}_i &\Rightarrow f(\tau(u_{i0})) < f(\bar{u}_i) \\ &\Rightarrow f(u_{i0}) < f(\bar{u}_i) \\ &\Rightarrow (f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})) / (\bar{u}_i - u_{i0}) > 0. \end{aligned}$$

Con esta información se puede observar el valor en la frontera no se ajusta correctamente al problema, dicho de otra forma la información no es relevante para

la situación.

- (d) $\bar{u}_i \in (\tau(u_{i0}), 1]$: En este caso $f'(\bar{u}_i) < 0$ mientras que $f'(u_{i0}) > 0$ y por lo tanto se forma un choque de curvas características; este problema se puede resolver usando los resultados de la sección anterior. La pendiente de la curva de choque es igual a:

$$\frac{f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})}{\bar{u}_i - u_{i0}}.$$

Este último valor es negativo por el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \tau(u_{i0}) < \bar{u}_i &\Rightarrow f(\tau(u_{i0})) > f(\bar{u}_i) \\ &\Rightarrow f(u_{i0}) > f(\bar{u}_i) \\ &\Rightarrow (f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})) / (\bar{u}_i - u_{i0}) < 0. \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que la pendiente del choque es negativa y como estamos en el extremo derecho de una entrada entonces la información del choque es relevante para el problema.

- (e) $\bar{u}_i = u_{i0}$: En este caso $f'(\bar{u}_i) = f'(u_{i0})$ y con esto las curvas características están alineadas por lo cual no se forma ningún choque ni una rarefacción y la solución es perfectamente válida.

2. Finalmente considérese $u_{i0} \in [\sigma, 1]$. Con esta suposición se tiene que $f'(u_{i0}) \leq 0$ y $\tau(u_{i0}) < \sigma$. A continuación se argumentará porque \bar{u}_i pertenece a $[\sigma, 1]$.

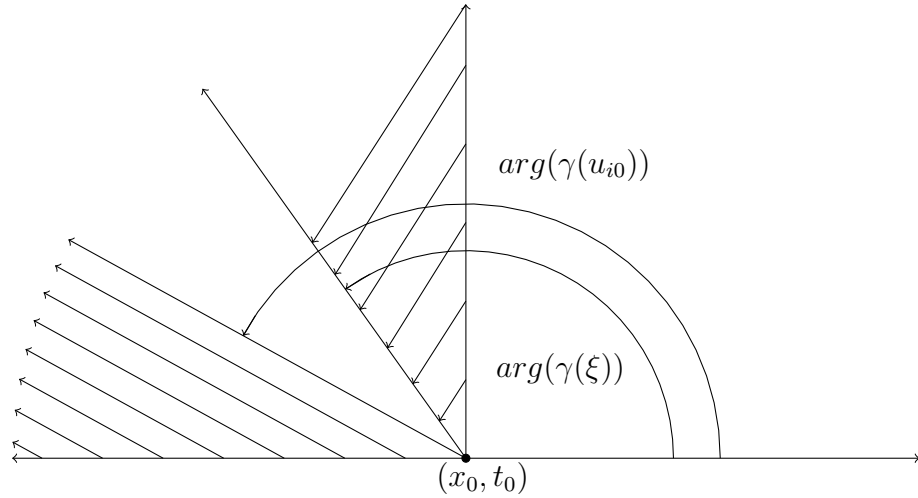
- (a) $\bar{u}_i \in [0, \tau(u_{i0})]$: Bajo esta hipótesis $f'(\bar{u}_i) > 0$ así que se forma un choque, como f es creciente en el intervalo $f(\bar{u}_i) < f(\tau(u_{i0})) = f(u_{i0})$, entonces $f(u_{i0}) - f(\bar{u}_i) > 0$. Como $u_{i0} > \tau(u_{i0})$ entonces $u_{i0} - \bar{u}_i > 0$, así la pendiente de la curva de choque es positiva y esto es inconsistente con los valores en la frontera.

- (b) $\bar{u}_i \in (\tau(u_{i0}), \sigma)$: Con esta suposición, nuevamente se forma un choque, puesto que

$f'(\bar{u}_i) > 0$. Además,

$$\begin{aligned} f(\bar{u}_i) > f(\tau(u_{i0})) &\Rightarrow f(\bar{u}_i) > f(u_{i0}) \\ &\Rightarrow f(\bar{u}_i) - f(u_{i0}) > 0 \\ &\Rightarrow (f(\bar{u}_i) - f(u_{i0})) / (\bar{u}_i - u_{i0}) < 0. \end{aligned}$$

Este caso es interesante, puesto que aparentemente la pendiente negativa del choque es coherente con el valor en la frontera, pero sucede que esto no es suficiente para que la información sea consistente; para notarlo consideremos lo siguiente: $\exists \xi \in (\bar{u}_i, u_{i0})$ tal que $f'(\xi) = (f(u_{i0}) - f(\bar{u}_i)) / (u_{i0} - \bar{u}_i)$, así se tiene que $f'(\xi) < 0$ y esto garantiza que $\xi \in (\sigma, u_{i0})$. Como $\xi < u_{i0}$ se tiene por el resultado (2.2) que el argumento de las curvas características es mayor que el argumento de la curva característica generada por ξ , esto es inconsistente, para verificar esto, se puede observar la siguiente figura.



□

Una proposición similar se puede obtener para las aristas de entrada.

Proposición 2.3

Sea \bar{u}_i una condición de frontera en el extremo derecho de la arista i de entrada.

1. Si $u_{i0} \in [\sigma, 1]$ entonces $\bar{u}_i \in \{u_{i0}\} \cup [0, \tau(u_{i0}))$.
2. Si $u_{i0} \in [0, \sigma]$ entonces $\bar{u}_i \in [0, \sigma]$.

Los resultados anteriores se pueden resumir en estos dos puntos:

1. Si i es una arista de salida, entonces $\bar{u} \in [\max(\sigma, \tau(u_{i0})), 1]$.
2. Si i es una arista de entrada, entonces $\bar{u} \in [0, \min(\sigma, \tau(u_{i0}))]$.

Como se menciona en [8], en un cierto contexto si se considera que $\bar{u}_i = u_{i0}$ o $\bar{u}_i = \tau(u_{i0})$ se generaría exactamente la misma solución, esto sucede debido a que la pendiente de la curva de choque es cero cuando $\bar{u}_i = \tau(u_{i0})$, por lo tanto resulta igual a que $\bar{u}_i = u_{i0}$.

Bibliografia

- »—————«
- [1] BRACKSTONE, MARK Y MCDONALD, M. Car-following: a historical review. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour* 2, 4 (1999), 181–196.
 - [2] COCLITE, G. M., G. M. Y. P. B. Traffic flow on a road network. *SIAM journal on mathematical analysis* 36, 6 (2005), 1862–1886.
 - [3] DAGANZO, C. F. The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *transpn. res.-b.* 28b (4), 269–287.
 - [4] F. DAGANZO, C. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transportation Research Part B: Methodological* 29, 4 (1995), 277–286.
 - [5] GREENBERG, H. An analysis of traffic flow. *Operations research* 7, 1 (1959), 79–85.
 - [6] GREENSHIELDS, B. D., E. A. A study of traffic capacity. In *Highway research board proceedings* (1935), vol. 1935, National Research Council (USA), Highway Research Board.
 - [7] HABERMAN, R. *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*, vol. 21. Siam, 1998.
 - [8] HOLDEN, H. Y RISEBRO, N. H. A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 26, 4 (1995), 999–1017.
 - [9] LEBACQUE, J. P. A two phase extension of the lwr model based on the boundedness of traffic acceleration. In *Transportation and traffic theory in the 21st century. Proceedings of the 15th international symposium on transportation and traffic theory* (2002), pp. 697–718.

- [10] LEVEQUE, RANDALL J Y LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservation laws*, vol. 132. Springer, 1992.
- [11] LIGHTHILL, M. J. Y WHITHAM, G. B. On kinematic waves i. flood movement in long rivers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 229, 1178 (1955), 281–316.
- [12] LIGHTHILL, M. J. Y WHITHAM, G. B. On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 229, 1178 (1955), 317–345.
- [13] NGSIM, P. P. S. D. U. *Department of Transportation Intelligent Transportation Systems Joint Program Office (JPO). Washington, D.C.* (2006).
- [14] NGSIM, P. P. S. D. U. S. <https://data.transportation.gov/Automobiles/Next-Generation-Simulation-NGSIM-Vehicle-Trajectory/8ect-6jqj>.
- [15] PORTAL DE ESTADÍSTICA, . <https://www.statista.com/statistics/281134/number-of-vehicles-in-use-worldwide/>.
- [16] RICHARDS, P. I. Shock waves on the highway. *Operations research* 4, 1 (1956), 42–51.
- [17] SMULDERS, S. Control of freeway traffic flow by variable speed signs. *Transportation Research Part B: Methodological* 24, 2 (1990), 111–132.
- [18] THOMSON, IAN Y BULL, A. *La congestión del tránsito urbano: causas y consecuencias económicas y sociales*. CEPAL, 2001.
- [19] ZACHMANOGLU, ELEFThERIOS C Y THOE, D. W. *Introduction to partial differential equations with applications*. Courier Corporation, 1986.
- [20] ZHANG, P. Y LIU, R. Hyperbolic conservation laws with space-dependent flux: I. characteristics theory and riemann problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 156, 1 (2003), 1–21.