

Un modelo de flujo de tráfico vehicular en una red vial

Jose Alvarenga^a

Tegucigalpa, Honduras

^ajose.alvarenga@unah.edu.hn

Abstract

Desde la década de los cuarenta se han desarrollado diferentes enfoques teóricos y prácticos para entender la dinámica del tráfico vehicular, todos estos esfuerzos se ven reunidos en una teoría conocida con el nombre de modelos continuos del tráfico vehicular. Este trabajo se encuentra en el contexto de los *modelos macroscópicos*; una de las principales ramas de los modelos continuos en donde el tráfico se entiende como un fluido gobernado por una ecuación de transporte. En este artículo se estudio un modelo macroscópico para una red de carreteras basado en el trabajo [5], integrando una función de flujo que depende de la variable espacial.

Por otro lado se desarrollo un marco computacional para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales inherente al modelo.

Keywords: Red vial, flujo vehicular, modelos macroscópicos, dependencia espacial, condiciones de flujo, optimización en la frontera, problema de Riemann.

1. Introducción

Cuando se asume que algunas de las cantidades asociadas al tráfico vehicular (e.g. velocidad del tráfico) dependen continuamente del tiempo, entonces se dice que el modelo que se está estudiando es continuo.

Todos los modelos continuos de tráfico vehicular tienen un origen común en el trabajo realizado por Greenshields en [1], donde se midieron las velocidades promedio de un conjunto de vehículos, sometidos a diferentes escenarios. Como una de las conclusiones importantes de este trabajo se extrajo que la velocidad promedio depende de las distancias entre los vehículos del sistema. La forma precisa en la que esta relación se sostiene, es un aspecto que está lejos de ser trivial, este es uno de los puntos que hace que en la actualidad se disponga de un amplio abanico de formas en las que estas dos cantidades están relacionadas.

Un último aspecto define a los modelos continuos del tráfico vehicular, y esto recae explícitamente en la palabra *continuo*, además de que en principio se asume que diferentes variables del tráfico se encuentran relacionadas, también se presume que es posible predecir la evolución de algunas de las variables del tráfico en función del tiempo, esta última característica es la que da lugar a dos ramas sobresalientes de esta teoría; los modelos macroscópicos y microscópicos. En los modelos macroscópicos se entiende al tráfico

como un flujo dinámico controlado por una ecuación de transporte con flujo no lineal y esta será la óptica desde la que se desarrollará este trabajo.

2. Descripción del modelo

La visión macroscópica del tráfico vehicular proviene de la mecánica de fluidos y se le puede atribuir a Michael James Lighthill y Gerald Whitham, su trabajo se puede encontrar plasmado en los artículos [2, 3].

Además de las dos publicaciones de Whitham y Lighthill, de manera independiente, Richards desarrolla en [4] un modelo del tráfico desde la óptica, nuevamente, de los fluidos mecánicos; en este trabajo se modela al tráfico como un fluido compresible (la densidad no necesariamente se mantiene constante) donde la velocidad del fluido depende únicamente de la densidad, es por esto que a este tipo de modelos se les conoció en sus inicios como los modelos LWR (Lighthill-Whitham-Richards).

Uno de los principales atractivos del enfoque macroscópico es su capacidad para representar características complejas del tráfico con una formulación compacta y sencilla, esto hace que este modelo tenga preferencia ante situaciones en las que no se requiere una resolución alta de la dinámica del tráfico vehicular, como es el caso de redes de tráfico vehicular.

En términos precisos la dinámica del tráfico en el enfoque macroscópico viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$q_t(x, t) + [f(x, t)]_x = 0, \quad (1)$$

donde $q(x, t)$ representa la densidad vehicular promedio (número de vehículos por unidad de longitud) y $f(x, t)$ es el flujo vehicular (número de carros por unidad de tiempo) en el tiempo t a la altura del punto x . Además $f(x, t) = q(x, t)V(x, t)$, donde a la función $V(x, t)$ se le conoce como campo de velocidades.

Formalmente el modelo matemático que se estudió, se encuentra descrito en el trabajo [1], donde el flujo se relaciona con la densidad por medio de una expresión parabólica, específicamente esta relación se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(x, t) \equiv f(q(x, t)) = v_{max}q(x, t) \left(1 - \frac{q(x, t)}{q_{max}} \right), \quad (2)$$

donde q_{max} y v_{max} representan respectivamente la densidad y la velocidad máxima. Aquí se observa que el campo de velocidades viene representado en la ecuación (2) por $V(x, t) = v_{max} \left(1 - \frac{q(x, t)}{q_{max}} \right)$.

Una de las mejoras que se introducen en este trabajo, en comparación con el modelo expuesto en [1], es la posibilidad de captar la sensibilidad del flujo vehicular a la variable espacial, esta característica se puede conseguir haciendo variar el parámetro de la velocidad máxima; se introduce entonces, la variación de la velocidad máxima, a través de la función $v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde L es la longitud de la carretera de estudio. De esta forma se define el flujo que depende de la variable espacial:

$$f(q, x) = v(x)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right). \quad (3)$$

En este artículo se considerará una dependencia de la siguiente forma:

$$v(x) = ax + b \quad (4)$$

La ecuación (4) supone dos ventajas, una es que la dependencia no aumenta demasiado la complejidad, al ser lineal en la variable espacial, otra es que cumple con la funcionalidad de captar la sensibilidad del flujo en aspectos propios de la carretera de estudio y no de la densidad únicamente.

Con lo anterior la dinámica del tráfico vendría dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$q_t(x, t) + \left[(ax + b)q(x, t) \left(1 - \frac{q(x, t)}{q_{max}} \right) \right]_x = 0. \quad (5)$$

En lo que sigue de esta sección se definirá la dinámica del modelo matemático del tráfico para un sistema de carreteras, para ello se uso uno de los primeros trabajos en esta dirección. Holden y Risebro en [5] proponen un modelo de esta clase donde un conjunto de carreteras se visualiza como un grafo dirigido, ver Figura 1.

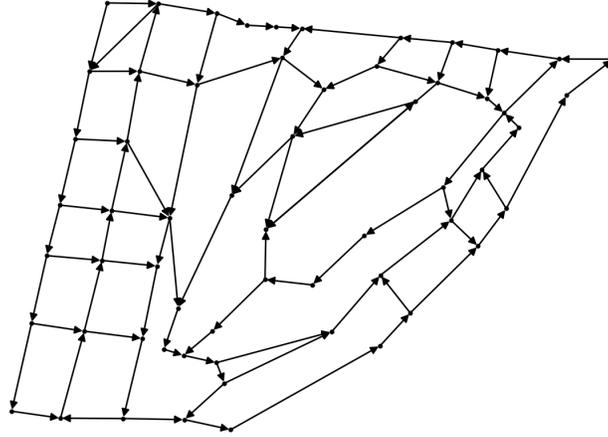


Figura 1: Grafo dirigido.

Definición 1 (Red de tráfico vehicular). *Supóngase que en un sistema de calles se tienen N carreteras y n intersecciones, un grafo de carreteras es un grafo conexo $G = (V, A)$, donde el conjunto de aristas se asocia con las carreteras y los vértices son las intersecciones de estas.*

En la Definición 1 el grafo G contendrá los siguientes atributos:

1. Sea $l \in A$, entonces se denotará la densidad en esta carretera como $q_l(x, t)$.
2. Para cada arista $l \in A$ se tendrán los atributos q_{max}^l, a_l, b_l .

3. Para cada arista $l \in A$ la densidad $q_l(x, t)$ vendrá dada por la ecuación (5), es decir:

$$[q_l(x, t)]_t + [f_l(q_l(x, t), x)]_x = 0.$$

Donde $f_l(q_l(x, t), x) = (a_l x + b_l)q_l(x, t) \left(1 - \frac{q_l(x, t)}{q_{max}^l}\right)$.

4. Para cada arista $l \in A$ se denotará a la longitud de la carretera como L_l , con esto la función de densidad quedará definida para $x \in [0, L_l]$.

5. Además de considerar el modelo de [5], en trabajos posteriores a este, se considero incluir la intencionalidad del flujo en las intersecciones, como ejemplo considérese el trabajo [6]. Formalmente, para cada $i \in V$ sean C_i^e el conjunto de aristas de entrada y C_i^s el conjunto de aristas de salida del vértice i , entonces se asumirá que para cada $l \in C_i^e$ y cada $k \in C_i^s$ existirán unos coeficientes no negativos α_{lk}^i tales que:

(a) Para cada $l \in C_i^e$ se tiene que $\sum_{k \in C_i^s} \alpha_{lk}^i = 1$.

(b) Para cada $k \in C_i^s$ se tiene que $f_k(q_k(0, t), 0) = \sum_{l \in C_i^e} \alpha_{lk}^i f_l(q(L_l, t), L_l)$.

6. Con la consideración anterior se cumple que para todo $i \in V$:

$$\sum_{k \in C_i^s} f_k(q_k(0, t), 0) = \sum_{l \in C_i^e} f_l(q_l(L_l, t), L_l). \quad (6)$$

A la igualdad (6) se le conoce como condición de *Rankine-Hugoniot*, la cual expresa que el flujo en las intersecciones se deben conservar.

7. Sea $i \in V$ tal que $grad(i) = 1$ (solo existe una arista que tiene a este vértice como uno de sus elementos), entonces en este vértice no se impone la condición de *Rankine-Hugoniot*.

8. Para $i \in V$ denótese $grade(i)$ como el número de aristas de entrada al vértice i y $grads(i)$ como el número de aristas de salida del vértice i .

Con todo lo anterior se define formalmente el modelo matemático de estudio para este trabajo.

Definición 2 (Modelo matemático). *Para cada $k \in A$ se tiene la ecuación diferencial:*

$$[q_k(x, t)]_t + [f_k(q_k(x, t), x)]_x = 0$$

Sujeto a las siguientes condiciones:

- *Condición inicial : $q_k(x, 0) = g_k(x)$.*

Para cada $i \in V$:

- *Condición de frontera: Si $grade(i) = 1$ y $grads(i) = 0$ entonces $q_s(L_s, t) = h_s(t)$ donde $s \in C_i^e$.*
- *Condición de frontera: Si $grade(i) = 0$ y $grads(i) = 1$ entonces $q_s(0, t) = h_s(t)$ donde $s \in C_i^s$.*
- *Condición de flujo: Si $grade(i) + grads(i) \geq 2$, entonces para cada $k \in C_i^s$ se tiene que $f_k(q_k(0, t), 0) = \sum_{l \in C_i^e} \alpha_{lk}^i f_l(q(L_l, t), L_l)$.*

Donde las funciones g_k y h_s son dadas.

3. Análisis de la condición de flujo

En esta sección se hará un análisis que servirá para construir el marco computacional para el problema dado en la Definición 2.

3.1. Condiciones de frontera

Aquí se analizarán los requisitos suficientes para que una condición de frontera constante defina una solución consistente.

Se inicia con el siguiente resultado, el cual establece la solución implícita de un problema de valor en la frontera con condición constante.

Proposición 1. *Considérese el problema $q_t + [f(q, x)]_x = 0$ con condición de frontera, $q(\bar{x}, t) = \bar{q}$, donde \bar{x} y \bar{q} son constantes. Entonces la solución a este problema viene dada implícitamente por la ecuación*

$$f(q, x) = f(\bar{q}, \bar{x})$$

$$\text{donde } f(q, x) = (ax + b)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}}\right).$$

La siguiente proposición establece las condiciones suficientes para que la solución que se describe en la Proposición 1 este bien definida para cualquier x .

Proposición 2. *Suponga las mismas hipótesis que en la Proposición 1. Además defínanse las constantes $v_{max} = \max_x v(x)$ y $v_{min} = \min_x v(x)$, entonces el problema tiene al menos una solución, sí:*

$$v_{min}g(q_{opt}) \geq v_{max}g(\bar{q}),$$

$$\text{donde } q_{opt} = q_{max}/2 \text{ y } g(q) = q \left(1 - \frac{q}{q_{max}}\right).$$

Demostración. Se define inicialmente el polinomio:

$$r(q) = f(q, x) - f(\bar{q}, \bar{x}) = v(x)g(q) - v(\bar{x})g(\bar{q}).$$

En la definición anterior $r(q)$ es un polinomio cuadrático cóncavo hacia abajo, además nótese que:

$$-f(\bar{q}, \bar{x}) = r(0) = r(q_{max}).$$

De lo anterior se tiene que el vértice de este polinomio se encuentra entre 0 y q_{max} , no es difícil probar que esto sucede en $q = \frac{q_{max}}{2}$. Con el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} r\left(\frac{q_{max}}{2}\right) &= v(x)g\left(\frac{q_{max}}{2}\right) - v(\bar{x})g(\bar{q}) \\ &\geq v_{min}g(q_{opt}) - v_{max}g(\bar{q}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

se llega a que $r\left(\frac{q_{max}}{2}\right) \geq 0$. De esta forma se puede encontrar para cualquier x al menos un q que verifique la ecuación $r(q) = 0$, que es lo que se quería probar. \square

La proposición anterior se puede reescribir, afirmando que la siguiente condición es suficiente para que la solución dada en la Proposición 1 esté bien definida.

$$\bar{q} \in [0, q_{opt}(1 - \beta)] \cup [q_{opt}(1 + \beta), q_{max}] \quad (7)$$

donde $\beta^2 = 1 - \frac{v_{min}}{v_{max}}$.

3.2. Problema de Riemann en la frontera

En este apartado se analizará la solución de la ecuación diferencial (5) cuando se tiene una condición de frontera y una condición inicial constante. Se describe a continuación el problema:

$$\begin{aligned} q_t + \left[(ax + b)q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right) \right]_x &= 0, \\ q(x, t_0) &= q_0, \\ q(\bar{x}, t) &= q_1. \end{aligned}$$

La solución al problema con valor inicial del planteamiento anterior es:

$$q(x, t) = Q_0(t) \equiv \frac{q_0 q_{max}}{(q_{max} - q_0)e^{\alpha(t-t_0)} + q_0}. \quad (8)$$

Para la solución en la frontera se tiene que:

$$q(x, t) = Q_1(x) \equiv q_{opt} \pm \sqrt{\alpha(x)[q_{opt} - q_1]^2 + \bar{\alpha}(x)q_{opt}^2}, \quad (9)$$

donde $q_{opt} = \frac{q_{max}}{2}$, $g(q) = q \left(1 - \frac{q}{q_{max}} \right)$, $\alpha(x) + \bar{\alpha}(x) = 1$ y $\alpha(x) = \frac{a\bar{x} + b}{ax + b}$.

Para que la solución sea continua, se sigue la siguiente regla:

$$Q_1(x) = \begin{cases} q_{opt} + \sqrt{\alpha(x)[q_{opt} - q_1]^2 + \bar{\alpha}(x)q_{opt}^2} & \text{si } q_1 > q_{opt} \\ q_{opt} - \sqrt{\alpha(x)[q_{opt} - q_1]^2 + \bar{\alpha}(x)q_{opt}^2} & \text{si } q_1 < q_{opt} \end{cases}$$

De las relaciones (8) y (9) se puede observar que las curvas características provocadas por la condición inicial, son líneas rectas horizontales, mientras que las curvas características producidas por la condición de frontera, son líneas rectas verticales; a diferencia de los modelos donde el flujo solo depende de la densidad, aquí siempre se presentan este tipo de curvas características que a su vez producen el fenómeno conocido como *choque de curvas características*. El siguiente resultado describe la naturaleza de este choque.

Proposición 3. Considere el problema dado en la ecuación (5) con condición inicial $q(x, t_0) = q_0$ y condición de frontera $q(\bar{x}, t) = q_1$ para todo $t \geq t_0$. Sea $(x(t), t)$ una curva que divide el plano (x, t) de manera que la solución a un lado corresponde con la generada por el problema de valor inicial $q(x, t_0) = q_0$, la cual viene dada por la ecuación(8) y del lado restante, la solución generada por el problema de valor en la frontera $q(\bar{x}, t) = q_1$, la cual viene dada por la ecuación (9).

Entonces, para que la ley de conservación se mantenga, la curva debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{(ax(t) + b)(1 - Q_1(x(t)) - Q_0(t))}{q_{max}}$$

con condición inicial $x(t_0) = \bar{x}$.

Finalmente, si $x(t)$ cumple la ecuación diferencial que se mencionó antes, entonces la solución al problema de Riemman viene dada por la siguiente igualdad:

$$q(x, t) = \begin{cases} Q_0(t) & \text{si } x < x(t) \\ Q_1(x) & \text{si } x \geq x(t) \end{cases} .$$

Demostración. Como $q(x, t)$ verifica la ecuación de conservación integral, entonces se verifica que:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = f(q(a, t), a) - f((b, t), b). \quad (10)$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_a^{x(t)} q(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x(t)}^b q(x, t) dx \\ &= \int_a^{x(t)} q_t(x, t) dx + \int_{x(t)}^b q_t(x, t) dx + Q_0(t)x'(t) - Q_1(x(t))'(t) \\ &= - \int_a^{x(t)} [f(q(x, t), x)]_x dx - \int_{x(t)}^b [f(q(x, t), x)]_x dx + (Q_0(t) - Q_1(x(t)))x'(t) \\ &= -f(Q_0(t), x(t)) + f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b) + f(Q_1(x(t)), x(t)) + (Q_0(t) - Q_1(x(t)))x'(t), \end{aligned}$$

entonces se tiene la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx = -f(Q_0(t), x(t)) + f(q(a, t), a) - f(q(b, t), b) + f(Q_1(x(t)), x(t)) + (Q_0(t) - Q_1(x(t)))x'(t). \quad (11)$$

Comparando las ecuaciones 10 y 11 se llega a:

$$0 = -f(Q_0(t), x(t)) + f(Q_1(x(t)), x(t)) + (Q_0(t) - Q_1(x(t)))x'(t),$$

de esta última expresión se puede deducir el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{f(Q_1(x(t)), x(t)) - f(Q_0(t), x(t))}{Q_1(x(t)) - Q_0(t)} \\
&= \frac{(ax(t) + b)Q_1(x(t))(1 - Q_1(x(t))/q_{max}) - (ax(t) + b)Q_0(t)(1 - Q_0(t)/q_{max})}{Q_1(x(t)) - Q_0(t)} \\
&= \frac{(ax(t) + b)(1 - Q_1(x(t)) - Q_0(t))}{q_{max}}.
\end{aligned}$$

Esto último es lo que se quería probar. \square

Ahora se expondrán dos resultados que se usarán para poder determinar un dominio para las densidades en la frontera, de manera que estas se impongan sobre la condición inicial, en cierto sentido.

Para empezar supóngase que se tiene el problema (5) con condiciones $q(x, 0) = q_0$ para todo $x < \bar{x}$ y $q(t, \bar{x}) = q_1$ para todo $t > t_0$. Sea $x(t)$ la curva definida en la Proposición 3, las condiciones siguientes son suficientes para garantizar que $x'(t) < 0$ para algún intervalo de tiempo de la forma $[t_0, T]$ y que se verifique la Proposición 2:

- Si $q_0 \leq q_{opt}$ entonces $q_1 \in [\max\{\bar{q}_0, q_{opt}(1 + \beta)\}, q_{max}]$.
- Si $q_{opt} < q_0 \leq q_{opt}(1 + \beta)$ entonces $q_1 \in [q_{opt}(1 + \beta), q_{max}]$.
- Si $q_0 > q_{opt}(1 + \beta)$ entonces $q_1 \in [\bar{q}_0, q_{opt}(1 - \beta)] \cup [q_{opt}(1 + \beta), q_{max}]$.

Donde $\bar{q}_0 = q_{max} - q_0$. Una condición suficiente para que se cumplan las condiciones anteriores se expresa a continuación:

$$q_1 \in [\max\{\bar{q}_0, q_{opt}(1 + \beta)\}, q_{max}]. \quad (12)$$

De forma similar, supóngase que se tiene el problema (5) con condiciones $q(x, 0) = q_0$ para todo $x > \bar{x}$ y $q(t, \bar{x}) = q_1$ para todo $t > t_0$. Sea $x(t)$ la curva definida en la Proposición 3, las condiciones siguientes son suficientes para garantizar que $x'(t) > 0$ para algún intervalo de tiempo de la forma $[t_0, T]$ y que se verifique la Proposición 2:

- Si $q_0 \geq q_{opt}$ entonces $q_1 \in [0, \min\{\bar{q}_0, q_{opt}(1 - \beta)\}]$.
- Si $q_{opt}(1 - \beta) \leq q_0 < q_{opt}$ entonces $q_1 \in [0, q_{opt}(1 - \beta)]$.
- Si $q_0 < q_{opt}(1 - \beta)$ entonces $q_1 \in [q_{opt}(1 + \beta), \bar{q}_0] \cup [0, q_{opt}(1 - \beta)]$.

Al igual que antes, una condición suficiente para que se cumplan las condiciones anteriores se expresa a continuación:

$$q_1 \in [0, \min\{\bar{q}_0, q_{opt}(1 - \beta)\}]. \quad (13)$$

Estas últimas observaciones son parte de las bases para la construcción de un marco computacional para el problema planteado en la Definición 2.

4. Marco computacional

En esta sección se desarrollarán un conjunto de herramientas numéricas que resolverán el problema dado en la Definición 2 usando los resultados de las secciones anteriores.

4.1. Método de volúmenes finitos

El problema que se quiere abordar numéricamente aquí, es el dado en la Definición 5 sujeto a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (x, t) &\in [0, L] \times [0, T], & q(0, t) &= q_1(t), \\ q(x, 0) &= q_0(x), & q(L, t) &= q_2(t). \end{aligned}$$

Para resolver este problema se usará el método de volúmenes finitos. Dentro de este tipo de métodos numéricos es necesario determinar una función conocida como *flujo numérico*, en [7] se describen una clase de flujos numéricos conocidos con el apellido del matemático aplicado Sergei Godunov, en lo que resta de este apartado se construirá el flujo numérico de Godunov para este tipo de problemas. Además se encontrará la región de estabilidad para este esquema numérico y se validará el código implementado.

Para aplicar el método de volúmenes finitos se realiza en espacio y tiempo la partición siguiente:

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, & \text{para } i &\in \{1, 2, 3, \dots, n+1\}, \\ t_j &= j\Delta t, & \text{para } j &\in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \end{aligned}$$

donde $x_0 = 0$, $x_{n+1} = L$, $t_0 = 0$ y $t_m = T$. Para implementar el método se necesitan ajustar los valores iniciales y de frontera de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_i^0 &\approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_0(x) dx, \\ L_j &\approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} q_1(t) dt, \\ R_j &\approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} q_2(t) dt. \end{aligned}$$

Se resalta que el método de volúmenes finitos intenta aproximar los valores Q_i^j en el siguiente sentido:

$$Q_i^j \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x, t_j) dx.$$

En los esquemas numéricos del método de volúmenes finitos se plantea que Q_i^j se puede aproximar de la siguiente forma:

$$Q_i^j = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(Q_i^j, Q_{i+1}^j, x_i) - F(Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i)). \quad (14)$$

Donde F viene a ser el flujo numérico. El flujo numérico de Godunov se puede encontrar resolviendo la siguiente integral:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(q(x_i, t), x_i) dt.$$

Esta integral se resuelve con la información promedio alrededor del punto x_i , es decir se resuelve el problema en 4 sujeto a $q(x, t_j) = Q_{i-1}^j$ para $x < x_i$ y $q(x, t_j) = Q_i^j$ para $x > x_i$. Se puede probar que el aporte a la solución, proveniente de los valores Q_i^j y Q_{i-1}^j es:

$$q(x, t) = \frac{Q_{i-1}^j q_{max}}{\bar{Q}_{i-1}^j e^{a(t-t_j)} + Q_{i-1}^j}, \quad (15)$$

$$q(x, t) = \frac{Q_i^j q_{max}}{\bar{Q}_i^j e^{a(t-t_j)} + Q_i^j}. \quad (16)$$

Donde la $\bar{Q}_i^j = q_{max} - Q_i^j$. Con la información anterior se puede calcular el flujo numérico:

$$F(Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i) \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(q(x_i, t), x_i) dt = \frac{v(x_i) Q_k^j \bar{Q}_k^j (e^{a\Delta t} - 1)}{a(\bar{Q}_k^j e^{a\Delta t} + Q_k^j) \Delta t}, \quad (17)$$

en la expresión anterior, k es una variable que puede tomar los valores de i o $i-1$; para poder determinar el valor correcto de k se necesitan resolver en la mayoría de casos, los choques que resultan de este problema. Si se sigue un razonamiento similar al expuesto en la Proposición 3 se llega a que la curva de choque, $x(t)$ es igual a:

$$x(t) = \frac{(ax_i + b)e^{-a(t-t_j)}(\bar{Q}_i^j e^{a(t-t_j)} + Q_i^j)(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a(t-t_j)} + Q_{i-1}^j) - bq_{max}^2}{aq_{max}^2}. \quad (18)$$

La derivada de esta curva viene dada por la siguiente expresión:

$$x'(t) = \frac{(\bar{Q}_i^j \bar{Q}_{i-1}^j e^{2a(t-t_j)} - Q_{i-1}^j Q_i^j) e^{-a(t-t_j)} (ax_i + b)}{q_{max}^2}.$$

De forma precisa $k = i - 1$ cuando $x'(t) > 0$ durante un tiempo mayor a t_j y $k = i$ si $x'(t) < 0$ durante algún mayor a t_j .

4.2. Análisis de estabilidad

Considérese el problema de calcular de calcular $F(Q_i^j, Q_{i+1}^j, x_i) - F(Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i)$ en la expresión (14), es posible que en el proceso del cálculo de $F(Q_i^j, Q_{i+1}^j, x_i)$ y $F(Q_{i-1}^j, Q_i^j, x_i)$ las curvas de choque, inherentes a cada valor, coincidan para algún $t = T$ entre t_j y t_{j+1} , por lo que el cálculo en (17) sería

incorrecto. Suponiendo que las dos curvas de choque coinciden (es posible que esto no suceda) y usando la forma exacta de las curvas de choque dada en (18) se calculará el tiempo $t = T$ en que estas se cruzan:

$$\begin{aligned} \frac{v(x_i)e^{-a\Delta T}(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i-1}^j)(\bar{Q}_i^j e^{a\Delta T} + Q_i^j)}{aq_{max}^2} &= \frac{v(x_{i+1})e^{-a\Delta T}(\bar{Q}_i^j e^{a\Delta T} + Q_i^j)(\bar{Q}_{i+1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i+1}^j)}{aq_{max}^2}, \\ v(x_i)e^{-a\Delta T}(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i-1}^j)(\bar{Q}_i^j e^{a\Delta T} + Q_i^j) &= v(x_{i+1})e^{-a\Delta T}(\bar{Q}_i^j e^{a\Delta T} + Q_i^j)(\bar{Q}_{i+1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i+1}^j), \\ v(x_i)(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i-1}^j) &= v(x_{i+1})(\bar{Q}_{i+1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i+1}^j), \\ v(x_i)(\bar{Q}_{i-1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i-1}^j) &= (v(x_i) + a\Delta x)(\bar{Q}_{i+1}^j e^{a\Delta T} + Q_{i+1}^j), \\ e^{a\Delta T}[v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j] &= v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) + a\Delta xQ_{i+1}^j, \\ \Delta T &= \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) + a\Delta xQ_{i+1}^j}{v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j} \right), \end{aligned}$$

donde $\Delta T = T - t_j$ y $v(x) = ax + b$. Por lo tanto una condición necesaria para que las curvas de choque no se intercepten se expresa por la siguiente desigualdad:

$$\Delta t < \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) + a\Delta xQ_{i+1}^j}{v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j} \right). \quad (19)$$

Para que exista la posibilidad de que las curvas coincidan, se debe verificar que:

$$Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j > \frac{\max\{a\bar{Q}_{i+1}^j, -aQ_{i+1}^j\}\Delta x}{v}. \quad (20)$$

La condición (19) resulta poco práctica dado que compromete los índices de la partición. Se harán algunas estimaciones para encontrar una condición suficiente que garantice tal condición.

Si (20) se cumple, entonces la siguiente desigualdad también se mantiene:

$$\frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) + a\Delta xQ_{i+1}^j}{v(x_i)(Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j} \right) \geq \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)q_{max} + a\Delta xQ_{i+1}^j}{v(x_i)q_{max} - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j} \right). \quad (21)$$

Además se puede probar que:

$$\frac{1}{a} \ln \left(\frac{v(x_i)q_{max} + a\Delta xQ_{i+1}^j}{v(x_i)q_{max} - a\Delta x\bar{Q}_{i+1}^j} \right) \geq \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v_{max} + a\Delta x}{v_{max}} \right), \quad (22)$$

donde $v_{max} = \max_x v(x)$. Usando (22), (21) y (19) se llega a que una condición suficiente para que las curvas de choque no coincidan es:

$$\Delta t < \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v_{max} + a\Delta x}{v_{max}} \right). \quad (23)$$

Proposición 4. *La siguiente expresión es una condición suficiente para que el cálculo del flujo numérico de Godunov (17) sea correcto:*

$$\Delta t < \frac{1}{a} \ln \left(\frac{v_{max} + a\Delta x}{v_{max}} \right),$$

donde $v_{max} = \max_x(ax + b)$.

4.3. Condiciones de acoplamiento

Con el método descrito al inicio de esta sección se puede resolver, en parte, el problema dado en la Definición 2 en cada una de las aristas del grafo de carreteras. Para completar el marco computacional, se explicará en este apartado, como intervienen las condiciones de frontera en el acoplamiento de estas carreteras.

Como se hizo al inicio de esta sección, se creará una partición tanto en tiempo como en espacio para cada una de las carreteras, con esto se seguirá la siguiente notación: Para el grafo $G = (V, A)$ que define al sistema de carreras, sea $l \in A$, la notación de los elementos de la partición incorporarán un subíndice derecho para los elementos promedios de la densidad, es decir:

$${}^l Q_i^j \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_l(x, t_j) dx.$$

En la expresión anterior la partición en espacio podría ser diferente, sin embargo para evitar una notación cargada se decidió dejar la misma partición para todas las carreteras, por otro lado, la partición en tiempo si debe ser igual. En lo que resta de esta sección, aparecerán algunas constantes y variables con índices de carretera, para indicar su pertenencia a estas.

El principal objetivo de esta sección es determinar la información en la frontera, es decir, se desea conocer en cada instante de tiempo los valores en la frontera de cada carretera de manera que no violen la conservación de flujo en cada uno de los vértices. Para ser precisos se desean encontrar dos conjuntos de valores $\{R_j^l\}_{l \in A}$ y $\{L_j^l\}_{l \in A}$ de manera que R_j^l represente la información de lado derecho de la carretera l en el intervalo de tiempo de $[t_j, t_{j+1}]$ y que L_j^l represente la información de lado izquierdo de la carretera l en el intervalo de tiempo de $[t_j, t_{j+1}]$.

Sea $l = (u, v) \in A$. Si $grads(u) = 1$ y $grade(u) = 0$ entonces de acuerdo a la Definición 2:

$$L_j^l = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h_u(t) dt,$$

y si $grade(v) = 1$ y $grads(v) = 0$ entonces:

$$R_j^l = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_j}^{t_{j+1}} h_v(t) dt.$$

Los dos casos anteriores se resuelven directamente de la definición del problema. Por otro lado sea $i \in V$ tal que $grad(i) > 1$, entonces usando la Definición 2 se debe cumplir para cada $k \in C_i^s$ la siguiente igualdad:

$$f_k(L_j^k, 0) = \sum_{l \in C_i^e} \alpha_{lk}^i f_l(R_j^l, L_l). \quad (24)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla, es necesario que la información en la frontera se imponga sobre la información en el interior de la carretera y una condición para que esto sea así, fue establecida en (12) y (13). En términos del sistema de carreteras esto sería, para todo $k \in C_i^s$:

$$L_j^k \in [0, \min\{k\bar{Q}_0^j, q_{opt}^k(1 - \beta_k)\}], \quad (25)$$

y para todo $l \in C_i^e$:

$$R_j^l \in [\max\{l\bar{Q}_n^j, q_{opt}^l(1 + \beta_l)\}, q_{max}^l]. \quad (26)$$

Dado que el flujo queda determinado de manera unívoca en los intervalos descritos en (25) y (26) la ecuación (24) se puede reformular en términos de flujos. Defínanse ${}_k\eta_{max}^j = f_k(\min\{k\bar{Q}_0^j, q_{opt}^k(1 - \beta_k)\}, 0)$, ${}_l\xi_{max}^j = f_l(\max\{l\bar{Q}_n^j, q_{opt}^l(1 + \beta_l)\}, L_l)$, $\eta_j^k = f_k(L_j^k, 0)$ y $\xi_j^l = f_l(R_j^l, L_l)$, en términos de estas variables la ecuación (24) quedaría expresada de la siguiente forma:

$$\eta_j^k = \sum_{l \in C_i^e} \alpha_{lk}^i \xi_j^l, \quad (27)$$

donde $\eta_j^k \in [0, {}_k\eta_{max}^j]$ y $\xi_j^l \in [0, {}_l\xi_{max}^j]$. Para poder encontrar tales flujos, en [5] se teoriza que los flujos deben maximizarse en las intersecciones bajo una cierta regla, esta regla podría ser directamente la suma de los flujos, o como se plantea en dicho artículo, una maximización a través de una función cóncava. En este trabajo se usa la suma de los flujos, la cual da lugar a un problema de optimización lineal. Formalmente se define a continuación, el problema que se quiere resolver:

Definición 3. Sean $i \in V$ con $grad(i) > 2$ y el intervalo de tiempo $[t_j, t_{j+1}]$. Considérese encontrar $(\eta_j^k)_{k \in C_i^s}$ y $(\xi_j^l)_{l \in C_i^e}$ de manera que se maximice la siguiente expresión:

$$\sum_{k \in C_i^s} \eta_j^k + \sum_{l \in C_i^e} \xi_j^l,$$

donde para todo $k \in C_i^s$ se cumple la ecuación (27).

El problema dado en la Definición 3 se puede escribir como un problema de programación lineal: Sean $C_i^s = \{k_1, k_2, \dots, k_u\}$, $C_i^e = \{l_1, l_2, \dots, l_v\}$, $\xi_i = (\xi_j^{l_1}, \xi_j^{l_2}, \dots, \xi_j^{l_v})^T$, $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$ donde la entrada (c, d) es α_{ldk_c} , $w = ({}_k\eta_{max}^i, {}_{k_2}\eta_{max}^i, \dots, {}_{k_u}\eta_{max}^i, {}_{l_1}\xi_{max}^i, {}_{l_2}\xi_{max}^i, \dots, {}_{l_v}\xi_{max}^i, 0, \dots, 0)^T$, $w \in \mathbb{R}^{u+2v}$. Con todo lo anterior se define el problema siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar : } \xi_i \\ & \text{Sujeto a : } \begin{pmatrix} A \\ I^{v \times v} \\ -I^{v \times v} \end{pmatrix} \xi_i \leq w \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, el problema anterior es un programa lineal, el cual se puede resolver usando la vasta teoría sobre optimización lineal.

5. Experimentos numéricos

Esta sección tiene como objetivo validar la implementación de un código elaborado en *python* y los resultados teóricos expuestos en (23) y (19). Para poder hacer tal experimento se ha usado un ejemplo del cual se conoce la solución exacta.

Ejemplo 1. Considere el problema (5) donde $a = -10$, $b = 120$ para $t \in [0, 1]$ y $x \in [0, 1]$, sujeto a las condiciones $q(x, 0) = q_0$ para $x < \frac{1}{2}$ y $q(x, 0) = q_1$ para $x > \frac{1}{2}$, donde q_0 y q_1 son constantes.

La solución al Ejemplo (1) viene dada por la siguiente expresión:

$$q(x, t) = \begin{cases} \frac{q_0 q_{max}}{(q - q_0)e^{at} + q_0} & \text{para } x(t) < \frac{1}{2} \\ \frac{q_1 q_{max}}{(q - q_1)e^{at} + q_1} & \text{para } x(t) > \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{donde } x(t) = \frac{\left(q_{max} e^{\frac{at}{2}} - 2q_0 \sinh\left(\frac{at}{2}\right) \right) \left(q_{max} e^{\frac{at}{2}} - 2q_1 \sinh\left(\frac{at}{2}\right) \right) - bq_{max}^2}{aq_{max}^2}.$$

Denótese por Q la solución aproximada usando el flujo numérico de Godunov descrito en el marco computacional para el problema descrito en el Ejemplo 1. Usando esta aproximación es posible medir el error de la siguiente forma:

$$Error = \|q - Q\|_{1,h} = \Delta x \sum_{i=0}^n |q_i - Q_i^n|, \quad (28)$$

donde:

$$q_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x, T) dx.$$

Usando esta definición y el código implementado, se obtuvo la Tabla 1 donde se hicieron tres experimentos, en el primero se fijó la densidad máxima en 120, en el segundo se fijó en 140 y en el tercero 100. La Tabla 1 posee tres secciones; "Región de no estabilidad", "Región de estabilidad" y "Condición suficiente", para la primer sección se escogieron pares $(\Delta x, \Delta t)$ de manera que no se cumpliera la condición (19), en la segunda estos pares verifican la condición (19) y en la última se verifica el resultado de la Proposición 4. Para cada sección y experimento se utilizó una relación de la forma $\Delta x = A \ln(1 + B\Delta x)$ en dirección con el resultado encontrado en la Proposición 4.

Como se puede apreciar en la Tabla 1, se validan los resultados teóricos encontrados con la condición (19) y la Proposición 4. Particularmente se puede notar que en la región de no estabilidad, a pesar de que los valores Δt y Δx se hacen pequeños, aun así, no se logra alcanzar la convergencia del método.

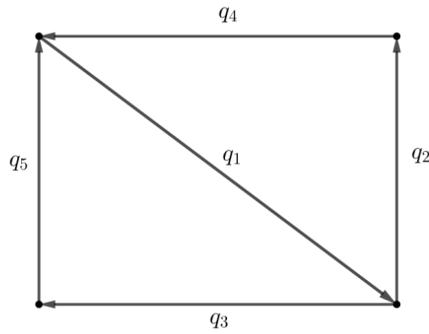
En [7] se puede encontrar (capítulo de estabilidad no lineal) que la tasa de convergencia del método de volúmenes finitos usando el flujo de Godunov, es coherente con la tasa encontrada en los experimentos.

Tabla de convergencia											
Δt	Δx	Error	Tasa	Δt	Δx	Error	Tasa	Δt	Δx	Error	Tasa
Experimento 1				Experimento 2				Experimento 3			
Región de no estabilidad											
4.25e-03	1.25e-01	NaN	NaN	2.52e-03	1.25e-01	NaN	NaN	4.245e-03	1.25e-01	NaN	NaN
2.11e-03	6.25e-02	NaN	NaN	1.26e-03	6.25e-02	NaN	NaN	2.108e-03	6.25e-02	NaN	NaN
1.05e-03	3.12e-02	NaN	NaN	6.27e-04	3.12e-02	NaN	NaN	1.047e-03	3.125e-02	NaN	NaN
5.23e-04	1.56e-02	NaN	NaN	3.13e-04	1.56e-02	NaN	NaN	5.233e-04	1.562e-02	NaN	NaN
2.6e-04	7.81e-03	NaN		1.57e-04	7.81e-03	NaN		2.599e-04	7.812e-03	NaN	
Región de estabilidad											
1.15e-03	1.25e-01	1.04e-05	1.0	1.05e-03	1.25e-01	1.85e-05	1.0	1.145e-03	1.25e-01	1.036e-05	1.0
5.69e-04	6.25e-02	5.17e-06	1.0	5.23e-04	6.25e-02	9.21e-06	1.0	5.687e-04	6.25e-02	5.169e-06	1.0
2.84e-04	3.12e-02	2.58e-06	1.0	2.6e-04	3.12e-02	4.60e-06	1.0	2.844e-04	3.125e-02	2.582e-06	1.0
1.42e-04	1.56e-02	1.29e-06	1.0	1.3e-04	1.56e-02	2.3e-06	1.0	1.422e-04	1.562e-02	1.290e-06	1.0
7.11e-05	7.81e-03	6.45e-07		6.5e-05	7.81e-03	1.15e-06		7.109e-05	7.812e-03	6.450e-07	
Condición suficiente											
1.05e-03	1.25e-01	9.49e-06	1.0	8.99e-04	1.25e-01	1.58e-05	1.0	1.047e-03	1.25e-01	9.491e-06	1.0
5.23e-04	6.25e-02	4.74e-06	1.0	4.46e-04	6.25e-02	7.89e-06	1.0	5.233e-04	6.25e-02	4.737e-06	1.0
2.6e-04	3.12e-02	2.37e-06	1.0	2.23e-04	3.12e-02	3.94e-06	1.0	2.599e-04	3.125e-02	2.367e-06	1.0
1.3e-04	1.56e-02	1.18e-06	1.0	1.12e-04	1.56e-02	1.97e-06	1.0	1.299e-04	1.562e-02	1.183e-06	1.0
6.5e-05	7.81e-03	5.91e-07		5.58e-05	7.81e-03	9.85e-07		6.496e-05	7.812e-03	5.913e-07	

Tabla 1: Información sobre la convergencia del método de volúmenes finitos.

Con ayuda del marco computacional se construyó un código en python para encontrar la solución al modelo descrito en la Definición 1. Los dos siguientes experimentos validan el código implementado.

Ejemplo 2. *Considérese una red tráfico vehicular con 5 carreteras, como se muestra a continuación:*



Sujeto a las siguientes condiciones:

1. *Condiciones iniciales:* $q_2(x, 0) = q_3(x, 0) = q_4(x, 0) = q_5(x, 0) = 0$ y $q_1(x, 0) = 110e^{-15(2x-1)^2}$.
2. *Condiciones de frontera:* El flujo de la carretera correspondiente a la densidad q_1 se divide por igual en las carreteras correspondientes a las densidades q_2 y q_3 .
3. *Con referencia a la Definición 1,* se tiene que $a_l = -10$, $b_l = 70$ y $q_{max}^l = 120$ para todas las carreteras.

4. La longitud de cada carretera es de un kilómetro y la dinámica se estudia durante seis minutos.

Al utilizar el código implementado en este trabajo, se obtuvo la evolución de la densidad en el tiempo para este grafo de carreteras, esto se muestra en la Figura 2.

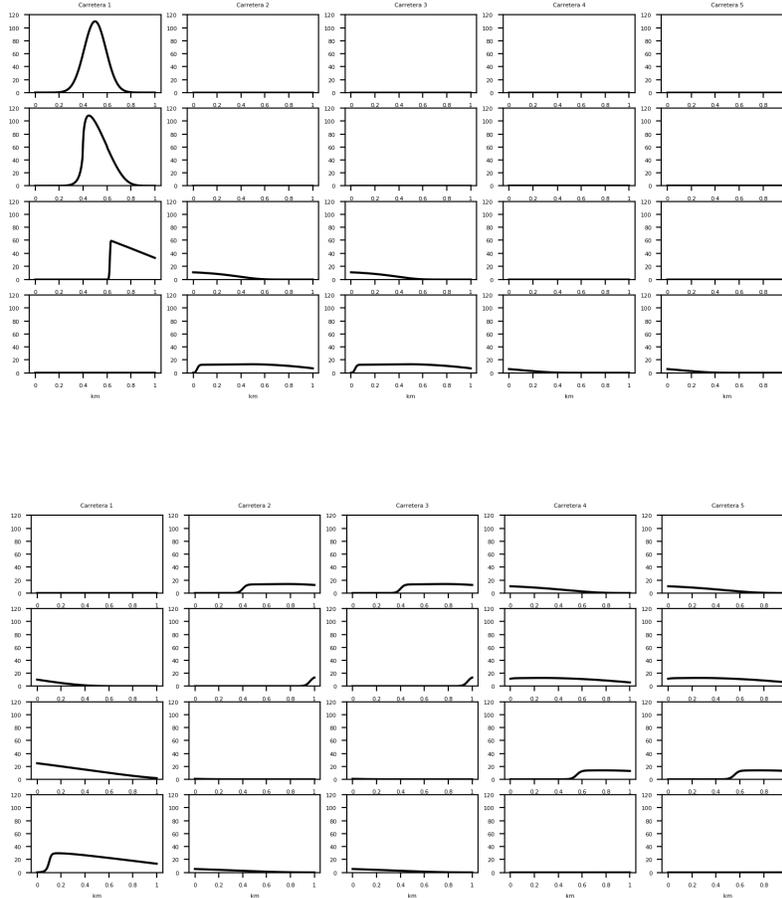


Figura 2: En las imágenes se muestra la evolución de la densidad en cada una de las carreteras en los tiempos $t = 0, 4, 43, 86, 108, 144, 180$ y 216 (medidos en segundos) de arriba a abajo respectivamente.

Al igual que en el Ejemplo 1, aquí se desea medir el error de la solución encontrada. Una de las dificultades para medir el error en este ejemplo, se da debido a que no es sencillo conseguir una solución analítica del problema (Ejemplo 2). Una de las formas en las que se puede medir la solución en este tipo de casos, consiste en hacer una partición bastante fina en el tiempo y considerar a esta aproximación numérica como si fuese la solución, al hacer esta suposición se espera que con particiones relativamente más gruesas se de un comportamiento similar al contrastar estas soluciones con la solución verdadera. Además este tipo de experimentos siempre debe ir acompañado de observar un comportamiento apropiado en las

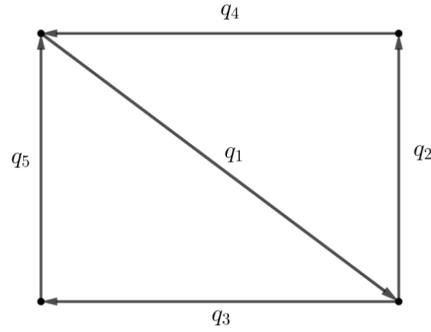
soluciones numéricas; para este ejemplo se puede afirmar que las soluciones tienen un comportamiento esperado, basándose en lo observado en la Figura 2.

En la Tabla 2 se puede observar el error definido en (28) para cada una de las carreteras, además se calcularon las tasas, producto de las diferentes aproximaciones. Se puede observar que en cada una de las carreteras el error tiene un comportamiento decreciente a medida que Δt se hace más fino y el valor aproximado de la tasa es coherente con los resultados encontrados en el Ejemplo 1.

Tabla de convergencia										
Δt	Error 4	Error 2	Error 3	Error 1	Error 5	Tasa 4	Tasa 2	tasa 3	Tasa 1	tasa 5
5.e-05	2.5e-01	1.0e-01	1.0e-01	9.7e-02	2.5e-01	1.07	1.06	1.06	1.04	1.07
2.5e-05	1.2e-01	4.9e-02	4.9e-02	4.7e-02	1.2e-01	1.04	1.04	1.04	1.03	1.04
1.3e-05	5.8e-02	2.4e-02	2.4e-02	2.3e-02	5.8e-02	1.04	1.03	1.03	1.03	1.04
6.3e-06	2.8e-02	1.2e-02	1.2e-02	1.1e-02	2.8e-02	1.06	1.05	1.05	1.05	1.06
3.1e-06	1.4e-02	5.6e-03	5.6e-03	5.5e-03	1.4e-02	1.11	1.1	1.1	1.1	1.11

Tabla 2: Información

Ejemplo 3. *Considérese una red tráfico vehicular con 5 carreteras, como se muestra a continuación:*



Sujeto a las siguientes condiciones:

1. *Condiciones iniciales:* $q_2(x, 0) = q_3(x, 0) = q_4(x, 0) = q_5(x, 0) = 0$ y $q_1(x, 0) = 110e^{-15(2x-1)^2}$.
2. *Condiciones de frontera:* El flujo de la carretera correspondiente a la densidad q_1 se divide por las carreteras con densidades q_2 y q_3 en los porcentajes de 35 y 65 por ciento respectivamente.
3. *Con referencia a la Definición 1, se tiene que:*

$$\begin{aligned}
 (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= (-20, -30, 10, 5, -10), \\
 (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) &= (80, 100, 90, 100, 70), \\
 (q_{max}^1, q_{max}^2, q_{max}^3, q_{max}^4, q_{max}^5) &= (120, 100, 130, 80, 140).
 \end{aligned}$$

4. *La longitud de cada carretera es de un kilómetro y la dinámica se estudia durante doce minutos.*

Tabla de convergencia										
Δt	<i>Error 4</i>	<i>Error 2</i>	<i>Error 3</i>	<i>Error 1</i>	<i>Error 5</i>	<i>Tasa 4</i>	<i>Tasa 2</i>	<i>tasa 3</i>	<i>Tasa 1</i>	<i>tasa 5</i>
5.e-05	5.1e-03	9.7e-02	5.0e-02	2.9e-01	1.7e-02	1.1	0.97	0.98	1.07	1.09
2.5e-05	2.4e-03	4.9e-02	2.6e-02	1.4e-01	8.0e-03	1.04	1.01	1.01	1.04	1.03
1.3e-05	1.1e-03	2.4e-02	1.3e-02	6.7e-02	3.9e-03	1.07	1.04	1.04	1.06	1.06
6.3e-06	5.5e-04	1.2e-02	6.2e-03	3.2e-02	1.9e-03	1.11	1.1	1.1	1.11	1.11
3.1e-06	2.5e-04	5.6e-03	2.9e-03	1.5e-02	8.7e-04	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23

Tabla 3: Información

A diferencia del Ejemplo 2, en este experimento se impusieron condiciones asimétricas. El comportamiento decreciente del error se sigue presentando aun en estas condiciones como se muestra en la Tabla 3.

6. Conclusiones

En este trabajo se logró desarrollar un marco computacional para un modelo del tráfico vehicular en una red de carreteras desde la visión de los modelos macroscópicos, considerando un flujo dependiente linealmente de la variable espacial. Para la elaboración del marco computacional se utilizó el método de volúmenes finitos. Particularmente se calculó el flujo numérico de Godunov para el tipo de ecuación diferencial parcial presente en el modelo.

Se encontraron dos condiciones, una suficiente y otra necesaria, para garantizar la estabilidad del método de volúmenes finito y se validaron tales resultados teóricos por medio de algunos experimentos numéricos.

Se encontraron las condiciones sobre el flujo en las intersecciones similares a las expuestas por Holden y Risebro, ahora considerando el flujo dependiente linealmente de la variable espacial.

Se validó el código implementado en *python* por medio de dos experimentos sobre una red de carreteras en un circuito cerrado.

Referencias

- [1] e. a. Greenshields, B. D., A study of traffic capacity, in: Highway research board proceedings, volume 1935, National Research Council (USA), Highway Research Board, 1935.
- [2] G. B. Lighthill, M. J. y Whitham, On kinematic waves i. flood movement in long rivers, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 229 (1955) 281–316.
- [3] G. B. Lighthill, M. J. y Whitham, On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 229 (1955) 317–345.
- [4] P. I. Richards, Shock waves on the highway, Operations research 4 (1956) 42–51.

- [5] N. H. Holden, H. y Risebro, A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads, SIAM Journal on Mathematical Analysis 26 (1995) 999–1017.
- [6] G. M. y P. B. Coclite, G. M., Traffic flow on a road network, SIAM journal on mathematical analysis 36 (2005) 1862–1886.
- [7] R. J. LeVeque, Randall J y Leveque, Numerical methods for conservation laws, volume 132, Springer, 1992.