

Modelación y simulación del tráfico vehicular usando el modelo FVDM

José Mauricio Alvarenga Rodríguez

Tegucigalpa, Honduras

Abstract

Desde hace varias décadas se han presentado múltiples esfuerzos en modelar el tráfico vehicular con el objetivo de aplacar el congestionamiento vial, un enfoque de modelación llamado *car following* (*seguimiento vehicular*) ha proliferado trayendo consigo importantes aportes a la simulación y modelación del tráfico. En este trabajo se ha conseguido aprovechar el esfuerzo realizado por una agencia gubernamental de Estados Unidos dedicada a la recolección de información del tráfico en 4 zonas específicas de este país, consiguiendo validar los modelos FVDM de forma satisfactoria. Para poder realizar las simulaciones se contribuye con un pequeño marco computacional diseñado para implementar los modelos FVDM en python.

Keywords: seguimiento vehicular; modelación; simulación.

1. Introducción

Desde hace varias décadas se han realizado importantes avances en ciencia con el propósito de modelar el tráfico vehicular, con este objetivo han surgido principalmente tres enfoques o modelos para abordar este problema: los modelos macroscópicos, los microscópicos (*car following*) y los provenientes de autómatas celulares, los primeros dos modelos son continuos mientras que el último es un modelo discreto. En este documento se ha decidido explorar el modelo microscópico puesto que presenta una buena versatilidad para modelar situaciones locales del tráfico en contraste con los modelos macroscópicos, que puede modelar sistemas globales. Los autómatas celulares tienen varias similitudes con los

modelos microscópicos.

Como es común en todos los modelos aplicados a algún fenómeno físico, estos evolucionan a través del tiempo, normalmente en dos direcciones, uno de estos aspectos comprende el ajuste del mismo, es decir hacer variaciones que cada vez ajusten más el modelo para que encaje mejor con el comportamiento real del fenómeno de estudio y un segundo aspecto esta relacionado con el esfuerzo de extender este modelo a situaciones más complejas; los modelos microscópicos para el tráfico vehicular no son la excepción, la siguiente reseña intenta seguir la dinámica temporal que atañen a estos dos aspectos, es así que uno de los primeros trabajos en los modelos de seguimiento vehicular lo hicieron Chandler, Herman y Montroll en [1], aquí ellos proponen lo siguiente:

1. Se dispone en principio de un conjunto de carros del mismo tipo (misma masa). Las curvas que describen el movimiento de cada uno de los vehículos son funciones que dependen del tiempo, $x_n(t)$, donde el subíndice n es una etiqueta que discrimina a cada vehículo dentro del sistema, además $x_{n-1}(t) \leq x_n(t)$ ¹, para todo tiempo, lo cual indica además que los automóviles *no se rebasan*.
2. Se supone que existe una velocidad v y una distancia d entre vehículos, tales que si todos los automóviles alcanzan estos valores en algún instante de tiempo, entonces esto se mantendría así invariablemente, esto último representa un estado estable del sistema.
3. Se definen las funciones $u_n(t) = x'_n(t) - v$ (desviación de la velocidad estable) y $y_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t)$ (distancia entre vehículos).

Con lo anterior se propone el **modelo de seguimiento vehicular**:

$$Mu_n''(t) = F(u_n(t), u_{n-1}(\tau) - u_n(\tau), y_n(\tau)).$$

Lo anterior es la fuerza debido a la aceleración. Como todos los vehículos son iguales entonces estos tienen la misma masa M . La variable τ es menor

¹En muchos trabajos esto no es una regla, es decir en ocasiones se establece que $x_n(t) \leq x_{n-1}(t)$

o igual que t , donde $t - \tau$ es un valor que representa un pequeño retraso en el tiempo, producto de la demora del conductor al momento de frenar o acelerar. Esta claro que la elección de la función F genera un espectro amplio de modelos microscópicos, en [1] se presentan diferentes formas para la función F , como ejemplo tenemos:

1. *Control proporcional:* En este apartado se propone que

$$F(u_n(t), u_{n-1}(\tau) - u_n(\tau), y_n(\tau)) = \lambda(u_{n-1}(t) - u_n(t))$$

Como se puede observar esta propuesta establece que la aceleración depende únicamente de la diferencia entre las velocidades del vehículo y el que tiene en frente.

2. *Retraso de respuesta:* La función F es similar al inciso anterior con el agregado del tiempo de retardo proveniente del conductor:

$$F(u_n(t), u_{n-1}(\tau) - u_n(\tau), y_n(\tau)) = \lambda(u_{n-1}(t - \Delta) - u_n(t - \Delta))$$

en este caso $\Delta = t - \tau$ y representa el retraso en el tiempo.

3. *Espacio constante entre vehículos:* En este enfoque la aceleración responde a la diferencia entre las distancias de los vehículos:

$$F(u_n(t), u_{n-1}(\tau) - u_n(\tau), y_n(\tau)) = Ky_n(t)$$

En [1] también se logran estimar los parámetros del modelo de *retraso de respuesta* utilizando datos reales provenientes de un experimento que se describe en tal trabajo, allí se obtuvieron las mediciones siguientes: $\lambda \approx 1.55$ y $\lambda/M \approx 0.368$. Con las observaciones anteriores esta justificado todo el esfuerzo en adaptar los modelos microscópicos a situaciones cada vez más reales es así que en [2] se agrega al modelo de seguimiento la cantidad conocida como *rango de visión*, este término intenta medir el tiempo de reacción (con respecto a la aceleración o desaceleración) del conductor en función del ángulo de visión, esto a su vez da lugar a los modelos que tienen como aceleración a una función racional que contiene la diferencia entre las posiciones como denominador y la

diferencia entre velocidades como numerador, la expresión en concreto es:

$$F(u_n(t), u_{n-1}(\tau) - u_n(\tau), y_n(\tau)) = c \frac{u_{n-1}(t) - u_n(t)}{(x_{n-1}(t) - x_n(t))^m} \quad (1)$$

donde $m \in \mathbb{N}$. En [2] se realizan diferentes relaciones que concluyen en (1) que la constante c es la velocidad promedio cuando el flujo vehicular es máximo, esto en el caso en el que $m = 1$. En los otros casos de manera indirecta también se establece que:

$$c = \frac{(m-1)v_0}{k_j^{m-1}}$$

donde v_0 representa la velocidad promedio cuando la densidad vehicular en una carretera es baja y k_j es la densidad máxima que puede soportar una carretera. La expresión de arriba es válida sin considerar la longitud de los vehículos, no considerarlo podría representar alguna pérdida de la realidad, desde luego no era el objetivo del trabajo en [2] hacer una consideración de esta naturaleza; haciendo unos discretos cálculos se puede encontrar una expresión que involucre el tamaño del vehículo :

$$c = \frac{(m-1)v_0(1 - k_j L)^{m-1}}{k_j^{m-1}} \quad (2)$$

donde L representa la longitud promedio de los vehículos.

Aunque las simulaciones hechas con los modelos anteriores, presentan excelentes resultados, es necesario mencionar que existe una pérdida de aproximación con la realidad con respecto a la aceleración de los vehículos.

En la década de los años 90, aparecieron una rama de modelos derivados del trabajo de [3], como se explica en [4], se podría decir que este conjunto de modelos han sido derivados en el siguiente orden:

$$OVM \rightarrow GFM \rightarrow FVDM \rightarrow FVADM.$$

De izquierda a derecha sus respectivos nombres son *Optimal Velocity Model*, *Generalized Force Model*, *full Velocity Difference Model* y *Full Velocity and Acceleration Model*. En [4] se hace una crítica a los dos primeros modelos, se

dice que ni GFM ni OVM se comportan bien ante el fenómeno que se da cuando el carro de atrás va más rápido que el de adelante, en estos modelos el carro que va a atrás no es capaz de frenar correctamente y "rebasa" al vehículo que tiene enfrente.

En [4] introducen el modelo *FVADM* y se compara con el modelo *FVDM*, los resultados obtenidos muestran que se corrigen los aspectos poco reales de los dos modelos que les preceden. En este documento se utilizan estos modelos de la manera en que se presentan en [5], puesto que se capturan muchas propiedades del tráfico real. Una de las principales diferencias en la forma en que se plantean los modelos *FVADM* en ambos trabajos [4, 5] es que en uno incluyen el tiempo de retraso del conductor y en otro no. No utilizar el tiempo de retraso implica en apariencia una notable simplificación del modelo y así resulta atractivo, sin embargo eso no es todo, en [6] se realiza un estudio comparativo entre la inclusión de este parámetro a este tipo de modelos, se concluye que en densidades relativamente altas los efectos de el tiempo de reacción del conductor no son significativos, esto último es particularmente muy valioso puesto que habitualmente en los problemas del tráfico se intentan simular situaciones de atascamientos o vehículos que se mueven en densidades altas.

2. Validación del modelo *FVADM*

En la presente sección se definirá el modelo *FVADM* y además se elaborará un marco computacional para implementar tal modelo y luego validarlo con datos reales del tráfico.

Definición 1. *Suponga que $x_n(t)$ representa la posición del vehículo n y que este sigue a $x_{n+1}(t)$, un vehículo que se encuentra en frente, un modelo *FVDAM* (full velocity difference and acceleration model) asegura que la aceleración del vehículo n es igual a:*

$$\dot{v}_n = k[V_1 + V_2 \tanh(C_1(x_{n+1} - x_n - l) - C_2) - v_n] + \lambda(v_{n+1} - v_n) + \gamma\dot{v}_{n+1} \quad (3)$$

La ecuación anterior se puede escribir (más simple) como:

$$\dot{v}_n = k[V_1 + V_2 \tanh(C_1(\Delta x_n - l) - C_2) - v_n] + \lambda \Delta v_n + \gamma \dot{v}_{n+1}$$

En el trabajo hecho por [5] se utilizan los parámetros $l = 5m$, $k = 0.41s^{-1}$, $V_1 = 6.75m/s$, $V_2 = 7.91m/s$, $C_1 = 0.13m^{-1}$, $C_2 = 1.57$, $\lambda = 0.5s^{-1}$ y $\gamma \in [0, 1]$. Para validar el modelo anterior, se ha decidido utilizar la información de algunos vehículos modelos del proyecto NGSIM, la información completa se puede encontrar en ². Particularmente se utilizó la información disponible de la calle I-80 de este proyecto. Para desarrollar las simulaciones se utilizó la función *odeint* de *scipy*.

El problema que se desea resolver es el siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ k[V_1 + V_2 \tanh(C_1(x_l - x - l) - C_2) - v] + \lambda(v_l - v) + \gamma a_l \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde x_l , v_l y a_l son respectivamente la posición, velocidad y aceleración del vehículo líder. x y v representan la posición y velocidad del vehículo *seguidor*.

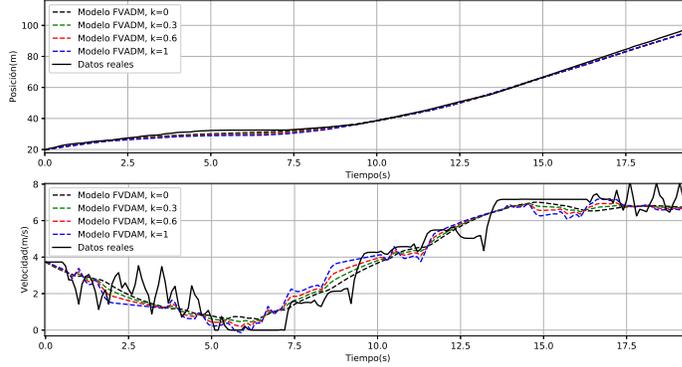


Figura 1: En la figura se observa la simulación del movimiento de un vehículo utilizando los modelos FVADM.

²<https://data.transportation.gov/Automobiles/Next-Generation-Simulation-NGSIM-Vehicle-Trajectory/Sect-6jqj>

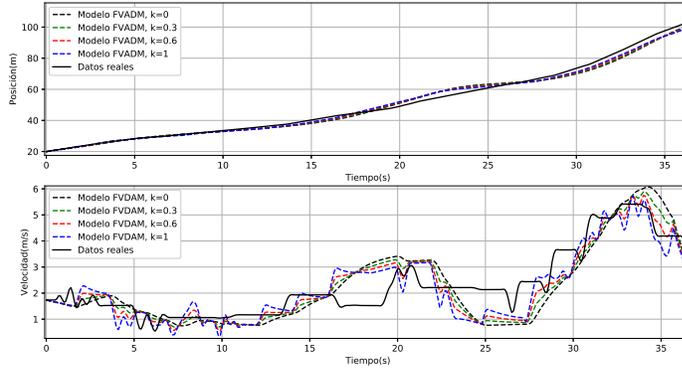


Figura 2: En la figura se observa la simulación del movimiento de un vehículo utilizando los modelos FVADM.

Con el código desarrollado se han modelado cuatro automóviles tomados al azar de la calle I-80, los resultados se aprecian en las Figuras 1, 2, 3, 4. Como se puede notar en las figuras se observan un excelente ajuste en las posiciones y velocidades de sus vehículos.

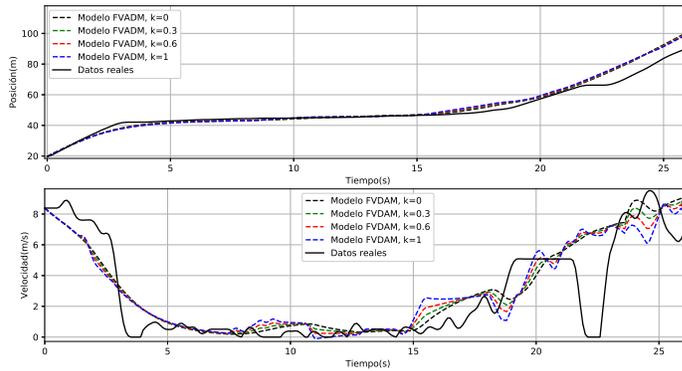


Figura 3: En la figura se observa la simulación del movimiento de un vehículo utilizando los modelos FVADM.

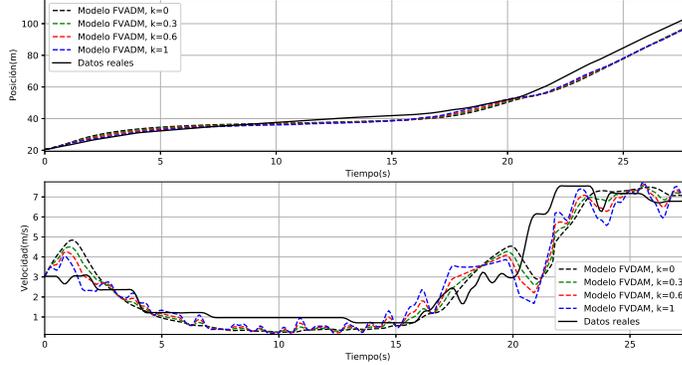


Figura 4: En la figura se observa la simulación del movimiento de un vehículo utilizando los modelos FVADM.

3. Sistema de un conjunto de vehículos

Para poder realizar diferentes tipos de simulaciones, es necesario definir el sistema de ecuaciones diferenciales que se quiere resolver. Como premisa se supone que se tiene la información sobre velocidades posiciones y aceleraciones de un vehículo líder, aquí se denotan como $x_l(t)$, $v_l(t)$, $a_l(t)$, además se conocen un conjunto de velocidades y posiciones de los vehículos que van a ser simulados, denotense por $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0$ y $v_0^0, v_1^0, \dots, v_{n-1}^0$. A través del modelo 3 se intenta entonces predecir las posiciones y velocidades de n vehículos que siguen a un líder, $x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)$ y $v_0(t), v_1(t), \dots, v_{n-1}(t)$ en un conjunto de tiempos $t_0, t_1 \dots t_m$. Para poder acoplar el conjunto de ecuaciones diferenciales provenientes del modelo 3, se reescriben de la siguiente forma:

$$\dot{v}_n - \gamma \dot{v}_{n+1} = k[V_1 + V_2 \tanh(C_1(x_{n+1} - x_n - l) - C_2) - v_n] + \lambda(v_{n+1} - v_n), \quad (5)$$

con lo anterior se pueden acoplar todas las ecuaciones dando como resultado el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & D \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \bar{g} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} x &= (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T, \\ v &= (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})^T, \\ \bar{g} &= (g_0, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} + \gamma a_l)^T, \\ g_i &= k[V_1 + V_2 \tanh(C_1(x_{i+1} - x_i - l) - C_2) - v_i] + \lambda(v_{i+1} - v_i), \end{aligned}$$

I : Es la matriz identidad de tamaño $n - 1$,

D : Es una matriz con dos diagonales; la central esta compuesta por unos,
la superior esta compuesta por $-\lambda$,

O : Es la matriz de ceros de tamaño $n - 1$.

$g(x_a, v_a, x_b, v_b) =$. Se puede probar que el sistema anterior es equivalente al que se presenta a continuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \bar{h} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= (h_0, \dots, h_{n-2}, g_{n-1} + \gamma a_l) \\ h_i &= \sum_{k=i}^{n-1} \gamma^{k-i} g_i + \gamma^{n-i} a_l \end{aligned}$$

4. Simulaciones

A continuación se simulará la dinámica de 50 vehículos que se mueven en una sección de carretera con un longitud de 800 metros, se dividirá la sección en dos partes, una con baja densidad y otra con densidad alta, al hacerlo de esta manera se estará emulando una situación cotidiana en la que los vehículos se mueven de una zona de poco tráfico a otra que esta congestionada. El vehículo líder tendrá las siguiente características:

$$x_l(t) = 8t + 800$$

la condición anterior implica que $v_l = 80$ y que $a_l = 0$. Los vehículos de la sección con baja densidad serán 20 y tendrán velocidades que rondan en el intervalo $[10, 12]$ y estarán ubicados en la primera mitad de la sección de carretera, para la última sección de carretera se considerarán 30 vehículos con velocidades en el intervalo cerrado $[6, 8]$. Con esta simulación se quiere estimar cuanto tiempo es necesario para que los vehículos ubicados en la primera sección atraviesen el área de estudio. La Figura 5 muestra como se desarrolla la dinámica de estos 50 vehículos con las condiciones anteriores, se observar que el último vehículo abandona la sección que comprende los 800 metros en aproximadamente 114 segundos. Cuatro simulaciones más se hicieron cambiando la velocidad del vehículo líder a 7m/s, 6m/s, 3m/s y 2m/s, se pueden observar respectivamente en 8, 7, 6.

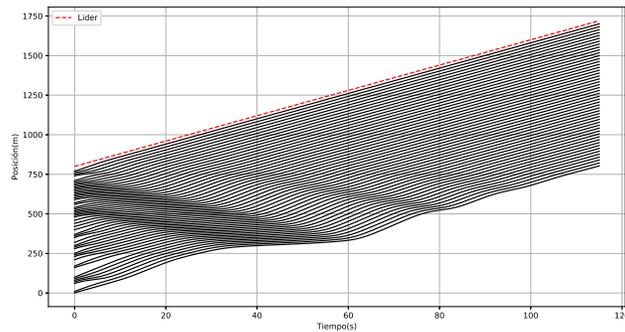


Figura 5: En la figura se observa la simulación del movimiento de 50 vehículos utilizando los modelos FVADM.

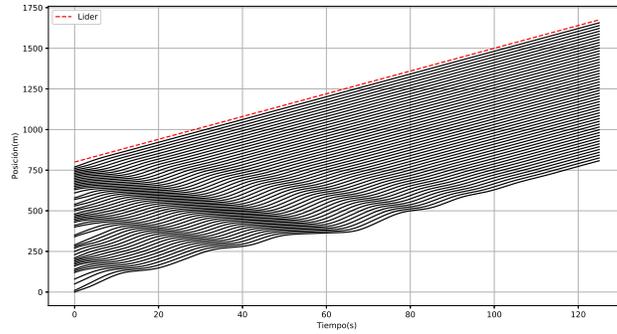


Figura 6: En la figura se observa la simulación del movimiento de 50 vehículos utilizando los modelos FVADM.

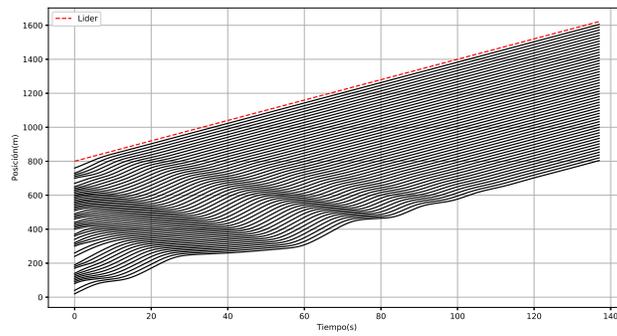


Figura 7: En la figura se observa la simulación del movimiento de 50 vehículos utilizando los modelos FVADM.

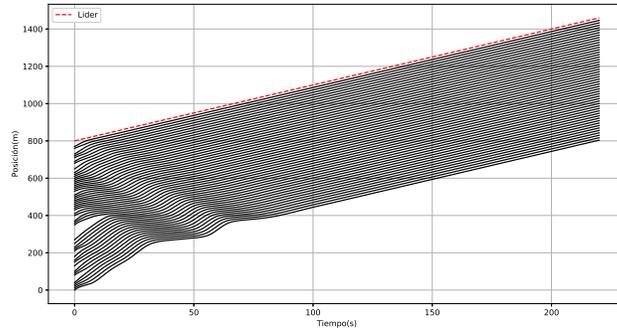


Figura 8: En la figura se observa la simulación del movimiento de 50 vehículos utilizando los modelos FVADM.

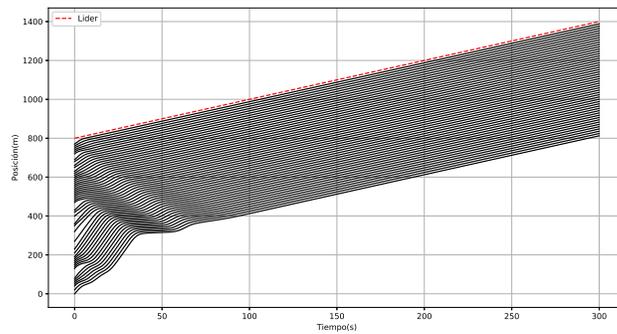


Figura 9: En la figura se observa la simulación del movimiento de 50 vehículos utilizando los modelos FVADM.

Para las últimas simulaciones se observó que al último vehículo pasa por la marca de los 800 metros en aproximadamente 124s cuando el líder tenía una velocidad de 7m/s, 136s para 6m/s, 220s para 3m/s y 300s para 2m/s. Con estas observaciones se puede evidenciar como este modelo captura este fenómeno, es decir, como afecta la influencia del vehículo líder en una fila de vehículos.

5. Conclusiones

En este trabajo se lograron modelar la trayectorias de algunos vehículos del banco de datos del proyecto NGSIM usando el modelo FVADM, se concluye que tienen una alta resolución en situaciones donde se modela un vehículo. Es importante mencionar que difícilmente un modelo microscópico capture todas las posibles situaciones en el tráfico real, es así que la finalidad de estos modelos es más bien simular aquellas propiedades más usuales e influyentes en el tráfico.

Se logró plantear de manera exitosa el sistema de ecuaciones diferenciales generados por el modelo FDVAM, se resalta que el marco computacional que se dejó es claro y que podría servir de base para realizar otros trabajos con el fin de validar métodos numéricos diferentes a los que se utilizaron aquí.

Para finalizar, las simulaciones demostraron que el modelo FDVAM es capaz de representar casos reales en el tráfico. Los gráficos de las trayectorias muestran las usuales "jorobas" que se forman en el tráfico cuando se pasa de una región de baja densidad a otra de alta densidad.

References

- [1] R. E. Chandler, R. Herman, E. W. Montroll, Traffic dynamics: studies in car following, *Operations research* 6 (2) (1958) 165–184.
- [2] L. A. Pipes, Car following models and the fundamental diagram of road traffic, *Transportation Research/UK/* (1966).
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Physical review E* 51 (2) (1995) 1035.
- [4] X.-m. Zhao, Z.-y. Gao, A new car-following model: full velocity and acceleration difference model, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 47 (1) (2005) 145–150.
- [5] S. Yu, Q. Liu, X. Li, Full velocity difference and acceleration model for a car-following theory, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18 (5) (2013) 1229–1234.
- [6] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, Analysis of optimal velocity model with explicit delay, *Physical Review E* 58 (5) (1998) 5429.