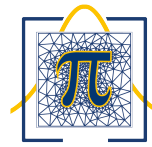


Universidad Nacional Autónoma de Honduras  
Facultad de Ciencias  
Maestría en Matemática  
Departamento de Matemática Aplicada



**UNAH**  
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE HONDURAS



Maestría en  
**Matemática**

**Efecto de las inhomogeneidades espaciales en la sensibilidad de la concentración  
de carbono por actividad antropogénica**

**Tesis presentada por**

Myrian Sadith González Orellana

Para obtener el grado de Máster en Matemática  
con Orientación en Ingeniería Matemática

**Director de tesis**

Dr. Jorge Velázquez Castro

Tegucigalpa, Honduras, 2020

## Resumen

Diferentes investigaciones se han centrado en cuantificar la sensibilidad y retroalimentación del carbono en el sistema climático, pero no se ha abordado considerando la estructura espacial de las emisiones de carbono que las definen, condición necesaria en el diseño de políticas más justas y estimaciones de responsabilidades ante el calentamiento global. En esta investigación se analiza la influencia de las inhomogeneidades espaciales de las emisiones de carbono en las retroalimentaciones. Para tal propósito se utilizó una extensión de un modelo analítico del ciclo global de carbono con acoplamiento radiativo en el sistema climático; para capturar la influencia espacial en tal extensión, y como aportación novedosa, al modelo se le han incluido términos de difusión e información espacial en una variable. Se realizó un análisis de inestabilidad de Turing a fin de estudiar la composición atmosférica, con esto se determinó que no se forman patrones de dióxido de carbono en base a los experimentos realizados. Como punto focal de esta investigación se incluyó el cómputo y análisis de algunas medidas estándares de retroalimentación de carbono por medio de derivadas direccionales generalizadas. Se concluyó que la retroalimentación del carbono está condicionada por tal estructura espacial, probando así que la no homogeneidad espacial de las emisiones de carbono es determinante en el ciclo del carbono y, consecuentemente, en el modelado y proyecciones del cambio climático.

## Abstract

Several investigations have focused on quantifying the sensitivity and feedback of carbon in the climate system, but it has not been approached considering the spatial structure of the carbon emissions that define them, a mandatory condition in the design of fairer policies and provisions of responsibilities aiming at facing global warming. This research analyzes the influence of spatial inhomogeneities of carbon emissions on feedbacks. For this purpose, an extension of an analytical model of the global carbon cycle with radiative coupling in the climate system was used; to capture the spatial influence in such extension, and as a new contribution, terms of diffusion have been included as well as spatial information in one variable. A Turing instability analysis was carried out in order to study the atmospheric composition, with this it was determined that carbon dioxide patterns are not formed based on the experiments carried out. As a focal point of this research, the calculation and analysis of some carbon feedback metrics by generalized directional derivatives was included. It was concluded that carbon feedback is conditioned by such spatial structure, thus proving that the spatial inhomogeneity of carbon emissions is a determining factor in the carbon cycle and, consequently, in the modeling and projections of climate change.

A mi madre, la luz que ilumina mi vida

## Agradecimientos

Mi agradecimiento al Dr. Fernando Macías Romero, quien en su condición de Coordinador del Posgrado en Matemática y anteponiendo su buena voluntad, contribuyó diligentemente para brindarme un director de tesis dentro de los profesores de Matemática de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Mi eterna gratitud a mi asesor Dr. Jorge Velázquez por brindarme su valiosa e incansable supervisión durante todo el proceso, sin su ayuda no habría sido posible concretar mi tesis tal como es presentada en este documento.

Mi agradecimiento es también inmensurable al Comité Académico de UEconomía de la Universidad de Chile, especialmente al Director Académico Prof. Oscar Landerretche, a la Directora Ejecutiva Ghislaine Tisné, a la Coordinadora Académica Nickol Opazo Gómez y al Director Académico Camilo Navarro Ceardi, por aportar a mi formación en este apasionante tema mediante la beca de desarrollo profesional que me fue concedida para cursar el Diploma en Economía del Desarrollo Sostenible y Cambio Climático.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>5</b>
1.1. Cambio climático, calentamiento global y la comunidad internacional . . . . .	5
1.2. Avances en los modelos del estudio del clima . . . . .	9
1.3. Modelos precursores . . . . .	12
<b>2. Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Ecuaciones de reacción-difusión . . . . .	15
2.2. Inestabilidad de Turing . . . . .	16
2.3. Derivadas funcionales . . . . .	19
<b>3. Planteamiento del modelo, linealización y estabilidad</b>	<b>22</b>
3.1. Caracterización del modelo . . . . .	22
3.2. Formulación del modelo . . . . .	24
3.2.1. Dinámica del carbono terrestre . . . . .	24
3.2.2. Dinámica del carbono en océanos . . . . .	26
3.2.3. Dinámica del carbono en la atmósfera . . . . .	29
3.3. Linealización . . . . .	31
3.4. Análisis de estabilidad . . . . .	32
3.5. Flujos y reservorios de carbono en el sistema . . . . .	34
<b>4. Modelo con términos de difusión e información espacial</b>	<b>39</b>
4.1. Inclusión de términos de difusión . . . . .	39
4.2. Inclusión de dependencia espacial . . . . .	40

4.3. Análisis de inestabilidad de Turing para el modelo . . . . .	41
4.4. Estimación de la solución usando el método de elemento finito . . . . .	42
<b>5. Análisis de retroalimentación</b>	<b>49</b>
5.1. Retroalimentación del ciclo del carbono . . . . .	49
5.2. Cómputo de los coeficientes de retroalimentación . . . . .	53
5.3. Estimaciones numéricas . . . . .	59
<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
<b>Trabajos futuros</b>	<b>68</b>
<b>A. Escenarios de emisiones</b>	<b>70</b>
<b>B. Métricas para las retroalimentaciones del ciclo del carbono</b>	<b>73</b>
<b>C. Tablas de coeficientes de retroalimentación para diferentes funciones de prueba</b>	<b>78</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Lista de figuras

3.1. Modelo con una perturbación de 5 % en el carbono atmosférico del estacionario . . . . .	33
3.2. Modelo con una perturbación de 25 % en el carbono atmosférico del estacionario . . . . .	33
3.3. Flujos de carbono y cambio de temperatura en el tiempo . . . . .	36
3.4. Almacenamiento de carbono y cambio de temperatura en el tiempo . . . . .	38
4.1. Esquema para la selección de los coeficientes de difusión . . . . .	41
4.2. Distribución de la parte real de los autovalores del polinomio característico del modelo extendido	42
4.3. Caracterización de las funciones base usadas en el MEF . . . . .	43
4.4. Flujos de carbono y cambio de temperatura del modelo en espacio y tiempo para el RCP2.6.	45
4.5. Flujos de carbono y cambio de temperatura en espacio y tiempo para el RCP4.5. . . . .	45
4.6. Flujos de carbono y cambio de temperatura en espacio y tiempo para el RCP6.0. . . . .	46
4.7. Flujos de carbono y cambio de temperatura en espacio y tiempo para el RCP8.5. . . . .	46
4.8. Superficie de aproximación de la solución del problema de referencia y solución exacta . . . .	47
4.9. Comportamiento del logaritmo del error en contraste con el logaritmo del salto . . . . .	48
5.1. Diagrama de los bucles de retroalimentación del ciclo global del carbono . . . . .	51
5.2. Factor de retroalimentación de la concentración de carbono-océanos considerando difusión . .	61
5.3. Factor de retroalimentación de carbono terrestre-clima considerando difusión . . . . .	62
5.4. Factor de retroalimentación de carbono océanos-clima considerando difusión . . . . .	62
5.5. Coeficiente de sensibilidad del carbono en océanos a la concentración del CO <sub>2</sub> atmosférico. . .	64
5.6. Coeficiente de sensibilidad del carbono en océanos por cambios en el clima . . . . .	65
A.1. Forzamiento radiativo antropógeno proyectado por diferentes escenarios de las familias IS92, SRES y RCP hasta el año 2100 . . . . .	72

# Lista de tablas

1.	Lista de símbolos y valores de parámetros . . . . .	IX
5.1.	Resumen de los coeficientes de retroalimentación utilizados . . . . .	54
5.2.	Valores numéricos simulados y de referencia para el factor de retroalimentación del modelo sin difusión . . . . .	60
5.3.	Valores numéricos simulados y de referencia para los coeficientes de sensibilidad del modelo sin difusión. . . . .	64
A.1.	Caracterización de los escenarios RCP . . . . .	71
B.1.	Signo de los parámetros de sensibilidad de retroalimentación del ciclo global del carbono . . . . .	76
C.1.	Coefficientes de retroalimentación tomando como función de prueba $\eta(t) = t$ . . . . .	79
C.2.	Coefficientes de retroalimentación tomando como función de prueba $\eta(t) = e^t$ . . . . .	79
C.3.	Coefficientes de retroalimentación tomando como función de prueba $\eta(t) = \text{sen}(t)$ . . . . .	79



### Lista de símbolos y valores de parámetros

Símbolo	Nombre	Valor
<b>VARIABLES Y VALORES INICIALES</b>		
$C_a$	Carbono en atmósfera	—
$C_t$	Carbono en suelos (terrestre)	—
$C_m$	Carbono en la capa mixta superior de los océanos	—
$C_M$	Carbono en total en océanos	—
$C_s$	Carbono total del sistema climático	—
$T$	Temperatura	—
$\hat{t}$	Tiempo considerado para computar los coef. de retroalimentación	100 años
$C_{a0}$	Carbono atmosférico estimado en la época preindustrial	589 PgC
$C_{t0}$	Carbono terrestre estimado en la época preindustrial	1875 PgC
$C_{m0}$	Carbono oceánico estimado en la época preindustrial	900 PgC
<b>PARÁMETROS USADOS PARA LA MODELACIÓN DEL CARBONO TERRESTRE</b>		
$Q_R$	Dependencia de la temperatura de la respiración terrestre	1.72
$NPP_0$	Absorción neta de carbono de la atmósfera en la época preindustrial	55 PgC/año
$K_c$	Efecto de la fertilización	0.3
<b>PARÁMETROS USADOS PARA LA MODELACIÓN DEL CARBONO EN OCEANOS</b>		
$B_0$	Bomba biológica en la época preindustrial	13 PgC/año
$B_T$	Temperatura dependiente de la bomba biológica	0.023/ $K$
$w_0$	Tasa de solubilidad de la bomba biológica	0.1/año
$w_T$	Debilitamiento de la solubilidad de la bomba biológica bajo el cambio climático	0.1/ $K$
$D_a$	Tasa de equilibrio de carbono en la capa mixta superior del océano	1/año
$D_T$	Efecto de la temperatura en la solubilidad	0.0423/ $K$
$r$	Factor de Revelle	12.5
<b>PARÁMETROS USADOS PARA LA MODELACIÓN DEL CAMBIO DE TEMPERATURA</b>		
$\tau$	Tiempo de respuesta para un retraso climático	4 años
$\lambda$	Factor de sensibilidad del clima	1.8 $K$

**Tabla 1** Símbolos y abreviaturas. Los valores numéricos de los parámetros se han tomado de [45]

# Introducción

El abordaje científico del cambio climático para la comprensión precisa de su dinámica se vuelve más importante a medida que pasa el tiempo, pues cada vez son más las evidencias que demuestran los efectos negativos de las actividades humanas en el sistema climático. Las perturbaciones del clima interfieren en el desarrollo socioeconómico de las comunidades y determinan las rutas a seguir para hacer un uso sostenible de los recursos naturales. En consecuencia, diversas agencias internacionales como la Organización de las Naciones Unidas (ONU) y la Agencia Europea de Medio Ambiente (AEMA), gobiernos e instituciones académicas han incluido el tema como parte de sus áreas prioritarias de trabajo.

El análisis de la interacción colectiva entre la atmósfera, los océanos, biósfera y la superficie terrestre ha permitido comprender mejor el sistema climático. Las componentes antes referidas inciden en el clima por la configuración de la composición de la atmósfera de la Tierra, lo que articula el balance energético del planeta [61]. Para comprender las interacciones que se dan en la atmósfera es especialmente importante estudiar el ciclo global del carbono, este ciclo cuantifica la transferencia de carbono entre unos y otros almacenes naturales [50], que podrían ser sumideros o fuentes y están ubicados en la atmósfera, la hidrósfera, la biósfera, la rizósfera y la litósfera.

Se sabe que los cambios en el ciclo del carbono constituyen una parte fundamental del sistema climático puesto que determinan la concentración atmosférica de dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) [22]. El  $\text{CO}_2$ , así como el vapor de agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ), el óxido nitroso ( $\text{N}_2\text{O}$ ), el metano ( $\text{CH}_4$ ), el ozono ( $\text{O}_3$ ), los clorofluorocarbonos (CFC), los hidrofluorocarbonos (HFC) e hidroclorofluorocarbonos (HCFC) son denominados gases de efecto invernadero (GEI), es decir, aquellos que absorben y emiten energía infrarroja promoviendo así el efecto invernadero en el planeta [4, 33]. Estudios realizados revelan que el clima terrestre muestra una elevada sensibilidad a las variaciones en el  $\text{CO}_2$  atmosférico [40], además se estima que el aumento de GEI en la atmósfera es la principal causa que promueve el cambio climático [13, 21], donde el  $\text{CO}_2$  emitido por las actividades humanas

es el GEI no natural que más ha contribuido en esta perturbación energética [36]; sin embargo, pese a su papel determinante, la inclusión de procesos biogeoquímicos, como el ciclo del carbono, en los modelos climáticos de amplio alcance apenas se ha dado a finales del siglo XX [21], aunque dichos modelos sean percibidos como la mejor herramienta disponible para cuantificar y proyectar los impactos de las actividades humanas en el clima [57].

Importantes incertidumbres existen en el modelamiento del cambio climático y del ciclo global del carbono [25]. En este sentido, no hay un conocimiento completo de las perturbaciones de carbono que modulan globalmente su liberación. Se sabe que con el aumentar de la concentración de CO<sub>2</sub> atmosférico se genera un aumento de la temperatura que favorece nuevamente la liberación de carbono [21], lo que completa un ciclo de *retroalimentación* del sistema. Aunque la dinámica básica de los bucles de retroalimentación de carbono es bien comprendida, el modelamiento de estos ciclos y la medición correcta de la intensidad de la retroalimentación todavía impone grandes desafíos, debido a la compleja naturaleza de las retroalimentaciones que por definición no se pueden medir ni observar directamente [21, 72]. Otra incertidumbre consiste en el desconocimiento del efecto de las inhomogeneidades espaciales, es decir, la dependencia de las retroalimentaciones a la estructura espacial de las perturbaciones de carbono.

El propósito principal de esta investigación es determinar la influencia de la distribución espacial de las emisiones de carbono en los procesos de retroalimentación de su ciclo global. Para alcanzar este objetivo se consideró un modelo analítico que emula, de manera simplificada, los flujos de carbono en tierra, océanos y atmósfera junto con un acoplamiento para la temperatura media global, basado en los aportes de [2, 32, 42, 45, 72]. Este modelo conserva como beneficio adicional la posibilidad de hacer cálculos analíticos, un atributo poco frecuente en esta área de investigación. De manera general, en el modelo se simula el flujo de carbono con la siguiente ecuación

$$\frac{dC}{dt} = E - (A_t + A_m),$$

donde  $C$  representa el carbono,  $E$  denota las emisiones prescritas en el modelo,  $A_t$  especifica la absorción de carbono terrestre, también llamado suelos, y  $A_m$  expresa la absorción de carbono en océanos.

La retroalimentación de carbono es cuantificada en cuatro bucles principales, esto es, cambios en la captación de carbono en suelos y océanos inducidos por cambios en el carbono atmosférico y por el clima. Para cuantificar la retroalimentación se utilizaron dos métricas: una medida clásica que define el *factor y ganancia*

de retroalimentación propuesta en [32] y una medida estándar que define los *parámetros de retroalimentación de tiempo integrado* propuesta en [23]. Una descripción más amplia de estas y otras métricas es presentada en el Apéndice B.

Como punto de partida, en el Capítulo 1 se contextualiza esta investigación. En la primera parte, se hace un esbozo general del cambio climático, sus implicaciones y el interés de la comunidad internacional por abordar este problema. En la segunda parte se describen los avances en los modelos del clima y las retroalimentaciones, además se detallan dos modelos precursores del sistema dinámico utilizado en esta investigación.

Para la mejor comprensión de los resultados, en el Capítulo 2 se ofrecen algunos elementos matemáticos preliminares que han sido utilizados para obtener los resultados presentados en los capítulos subsiguientes. Estos tópicos preliminares son las ecuaciones de reacción-difusión, la inestabilidad de Turing y las derivadas funcionales de Gâteaux y Fréchet.

El planteamiento general del modelo y las simplificaciones realizadas se describen en el Capítulo 3, elementos por lo cuales esta representación constituye un modelo *estilizado* del ciclo global del carbono. Seguidamente, y como aporte de esta investigación, se presenta la linealización del modelo y un análisis de estabilidad enfocado en el carbono de la atmósfera. Simulaciones de los cambios en los flujos y reservorios naturales de carbono se incluyen al final de este capítulo, para esto se utilizaron datos históricos armonizados y diferentes escenarios de emisiones de carbono hasta el año 2100, más detalles de estos escenarios se presentan en el Apéndice A.

En el Capítulo 4 se propone una extensión del modelo descrito en el Capítulo 3, tal extensión captura la sensibilidad espacial de la distribución de carbono por medio de la inclusión de un término difusivo. Por consiguiente, el modelo utilizado para determinar el aporte de la configuración espacial de las emisiones de carbono en las retroalimentaciones tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbf{u}) + \delta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de las variables globales (dependientes del tiempo y el espacio) del ciclo del carbono para suelos, océano, atmósfera y temperatura,  $\mathcal{F}$  comprende el vector de las funciones que modelan los intercambios de carbono y el cambio de temperatura, y  $\delta$  representa la componente de difusión. Adicionalmente, se incluye

un análisis de inestabilidad de Turing del modelo modificado con el objeto de investigar la homogeneidad de las concentraciones de  $\text{CO}_2$  atmosférico. Al final del capítulo se explica el marco computacional construido para resolver de manera numérica el sistema con difusión (1) usando el método de elemento finito (MEF).

En el Capítulo 5 se describen a profundidad los mecanismos que definen los bucles de retroalimentación y las variables que interactúan en tales bucles. También se detalla el procedimiento que se realizó para estimar las métricas utilizadas para contrastar los efectos de la distribución espacial de las emisiones. Además, se incluyen las expresiones analíticas encontradas para los coeficientes de retroalimentación, el Apéndice C complementa estos hallazgos al presentar tablas con más estimaciones de estos coeficientes en otros casos. Algunas simulaciones realizadas a fin de evidenciar la influencia de la difusión en los coeficientes de retroalimentación se discuten en la parte final de este mismo capítulo.

Por medio del análisis de retroalimentación realizado y como resultado principal de esta investigación, se determinó que efectivamente existe dependencia de la estructura espacial de las emisiones de carbono en la retroalimentación, este resultado es importante porque históricamente los coeficientes de retroalimentación se han estimado asumiendo homogeneidad en las emisiones. En las conclusiones se detallan otros aportes que también se han obtenido con esta investigación.

Finalmente, se incluyen algunos trabajos futuros que, pese a la enorme complejidad del sistema climático y del ciclo del carbono, se consideran factibles de realizar.

# Capítulo 1

## Antecedentes

En este capítulo se contextualiza el tema de estudio por medio de dos vías. Primero, en la Sección 1.1 se presenta un resumen sobre el interés y preocupación internacional respecto al cambio climático y las acciones que se han tomado en diferentes niveles para contrarrestar los efectos adversos asociados. Segundo, se muestra un esbozo de los estudios precursores del sistema dinámico utilizado en esta investigación para la modelación del ciclo global del carbono; en este sentido, en la Sección 1.2 se describen algunos de los principales avances que se han realizado en los modelos del clima y en la Sección 1.3 se detallan dos de los modelos que anteceden al modelo presentado en el Capítulo 3.

### 1.1. Cambio climático, calentamiento global y la comunidad internacional

La noción científica de que las actividades humanas pueden alterar las componentes ambientales negativamente no es reciente. Desde el siglo XIX, se había advertido que ciertos gases atmosféricos absorben cantidades significativas de calor [3, 46]. Consecuentemente, se deseó investigar cómo impactaba la liberación antropogénica de  $\text{CO}_2$  debido a que se avistaban implicaciones potencialmente grandes en el sistema climático [21]. En 1937, el trabajo pionero del ingeniero inglés Guy Callendar estimó un incremento de la temperatura media a una tasa del  $0.003^\circ\text{C}$  por año [11]. Para la segunda mitad del siglo XX, diferentes investigaciones confirmaron que las actividades humanas habían perturbado el ciclo global del carbono. Uno de los trabajos destacados fue el estudio del químico estadounidense Charles Keeling, publicado en 1976 y realizado en el Observatorio Mauna Loa, Hawái, sobre las concentraciones de dióxido de carbono, entre los hallazgos encontrados se destacan: aumento de las concentraciones año con año y aceleración de la tasa de crecimiento de

las concentraciones, ambos fenómenos con presencia global [21, 42].

La preocupación latente sobre los eventuales peligros de un cambio climático que comprometa a la humanidad y su desarrollo condujo a la celebración de la I Conferencia Mundial sobre el Clima en 1979, convocada por la Organización Meteorológica Mundial (OMM) [51]. Posteriormente, en 1988, se crea el Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC por sus siglas en inglés) por la Organización Meteorológica Mundial y el Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA), formado por más de 4000 científicos multidisciplinarios que evalúan continua e integralmente los avances en conocimiento técnico y socioeconómico referentes al cambio climático [7].

Desde su creación, el IPCC ha publicado abundantes informes que suelen ser muy citados en una gran cantidad de investigaciones científicas sobre el sistema climático. Algunas de las publicaciones importantes son los 5 informes de evaluación: Primer Informe de Evaluación (FAR en inglés) en 1990, en el que se constató la variabilidad del clima; el Segundo Informe de Evaluación (SAR en inglés) de 1995 donde se sugiere la influencia humana en la variabilidad climática; el Tercer Informe de Evaluación (TAR en inglés) en 2001 que contrasta la intensidad de los cambios en el clima con y sin influencia humana; el Cuarto Informe de Evaluación (en inglés AR4) de 2007 en donde se sostiene que es muy probable que el aumento de la temperatura media mundial se deba al aumento de GEI [51]; y, en el 2013, el Quinto Informe de Evaluación (AR5 en inglés) en el que se afirma que el calentamiento global es inequívoco y que “la principal contribución al forzamiento radiativo total proviene del aumento en la concentración de CO<sub>2</sub> en la atmósfera que se viene produciendo desde 1750” [36].

El IPCC también ha publicado informes especiales sobre fuentes de energía, fenómenos extremos y desastres, escenarios de emisiones, captura y almacenamiento de carbono; informes metodológicos sobre gestión de GEI, uso de la tierra y silvicultura también documentos técnicos sobre cambio climático y agua, tecnologías y políticas para mitigar el cambio climático. En este sentido, se manifiesta la necesidad de comprender cualquier proceso que pueda influir en la configuración del sistema climático. En la actualidad existen numerosas incertidumbres sobre dichos procesos [21], sin embargo, significativos avances se han logrado por medio de abundantes investigaciones científicas realizadas, como las utilizadas en los referidos informes de evaluación del IPCC, el perfeccionamiento de técnicas para la captación y procesamiento de datos, la creación de portales de apoyo para estudios de esta naturaleza que ofrecen datos de acceso libre como los usados en esta investigación, la apertura de observatorios de cambio climático a nivel mundial como el Observatorio

Universitario de Turismo Sostenible y Cambio Climático (OUTSCC) de la UNAH, etc.

Con respecto al calentamiento global, que refiere el aumento de la temperatura media de la superficie de la Tierra, si bien se sabe que la variabilidad de este parámetro meteorológico ha existido desde siempre [51], por medio de los informes del IPCC se conoce que la temperatura del planeta ha aumentado  $0.85^{\circ}\text{C}$  entre 1880 y 2012 y, que, según las diferentes proyecciones contempladas, se estima que esta temperatura aumentará entre  $1.8$  y  $4.0^{\circ}\text{C}$  para el año 2100 [14]. Tales proyecciones se basan en diferentes escenarios de emisiones de GEI sujetos a cambios demográficos, económicos y tecnológicos, más detalles pueden ser consultados en el Apéndice A.

En lo que se refiere a los esfuerzos de la comunidad internacional por atender frontalmente la problemática del cambio climático, en el marco de la Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente y el Desarrollo de 1992 se crea la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático (CMNUCC), conformada por más de 150 entidades gubernamentales o administraciones políticas, donde más de 30 son países de América Latina y el Caribe, incluyendo Honduras. La CMNUCC facilita fondos para proyectos de mitigación y adaptación al cambio climático, como el instrumento financiero de 1991 denominado Fondo Mundial para el Medio Ambiente (GEF) y en 2010 el Fondo Verde para el Clima, promueve el principio de equidad de responsabilidades comunes pero diferenciadas y establece obligaciones de cumplimiento regularizado entre todos los integrantes, como el Protocolo de Kioto.

Diversos programas han surgido con el propósito de adoptar decisiones con base científica, oportunas y eficaces acerca de actividades y prácticas de adaptación y mitigación para hacer frente al cambio climático, algunos de ellos son el Programa de Impactos Climáticos del Reino Unido (UKCIP) establecido en 1997 y en el 2005 el Programa de Trabajo de Nairobi (NWP), además de fondos multilaterales como el Programa Especial del Banco Interamericano de Desarrollo (BID) sobre energía sostenible y cambio climático (SECCI) lanzado en 2007 y en el 2008 el Fondo operativo para el Carbono de los Bosques (FCPF) del Banco Mundial. Con la ayuda de estas instituciones se han formalizado diferentes iniciativas que abordan el CC en diferentes sectores, en Latinoamérica algunos ejemplos incluyen el Proyecto Integrado de Adaptación Nacional (INAP) en 2005 en Colombia, en 2008 el Proyecto Regional Andino (PRRA) en Bolivia, Ecuador y Perú y el Plan Estatal de Acción ante el Cambio Climático en México (PEACC) de 2013.

Por lo tanto, se puede inferir cuan pertinente resulta ahondar en investigaciones sobre el cambio climático debido a la movilidad de recursos que ya ha suscitado y los posibles riesgos de pérdida o daño irreversibles



de estos, así como de otros recursos productivos y naturales que puedan ser afectados; consecuentemente, el cambio climático se ha vuelto para la mayor parte de la comunidad científica, tomadores de decisiones, creadores de políticas públicas y comunidad en general, un problema que requiere atención inmediata para poder asegurar un eficaz desarrollo sostenible en los sistemas sociales y naturales.

Para terminar esta sección, es importante mencionar que existen miembros de la comunidad científica y población en general que descalifican la relación entre el cambio climático y el CO<sub>2</sub>. A continuación se enlistan los principales argumentos de este paradigma escéptico del cambio climático junto con los argumentos utilizados para su negación.

- i. Se ha discutido durante mucho tiempo que los cambios en el CO<sub>2</sub> son muy diversos en contraposición a la temperatura que no ha variado tanto, se explica esta situación considerando que el sistema es especialmente sensible a los cambios en el CO<sub>2</sub> atmosférico cuando estos se producen en una atmósfera pobre en CO<sub>2</sub>.
- ii. Se ha argumentado que las temperaturas varían notablemente, pero el CO<sub>2</sub> no tanto, enfatizando lo ocurrido en la glaciación del hemisferio norte donde los niveles estimados de CO<sub>2</sub> parecen ser bajos, en este caso no se contemplan cambios importantes dados en el planeta durante esta época, como los cambios en la circulación oceánica producidos por aspectos geológicos que favorecen el transporte oceánico latitudinal de energía.
- iii. Se ha mencionado que algunas glaciaciones se producen en etapas muy ricas en CO<sub>2</sub>, como en el período del Paleozoico inferior, etapa que se caracterizó por altas concentraciones de CO<sub>2</sub> en la atmósfera. Un argumento detractor consiste en que esta glaciación se vio favorecida por la posición espacial de la masa continental de Gondwana y su proximidad con el océano, de tal manera que se promovieron las condiciones térmicas para favorecer la acumulación de hielo [50].

Sin embargo, es aceptado por la mayor parte de la comunidad científica que la variabilidad climática es demostrable, en concordancia el IPCC sostiene en [36] que el calentamiento observado en la atmósfera y en el océano, sumado a la pérdida de hielo, implican que *“es extremadamente improbable que el cambio climático global de los últimos 50 años pueda ser justificado sin considerar forzamientos externos y es muy probable que este no se deba únicamente a causas naturales”*. Ante este panorama, abundantes estudios se están desarrollando relacionados al sistema climático, así mismo cuantiosas agencias, instituciones educativas y centros de investigación priorizan sus estudios en este ámbito.

## 1.2. Avances en los modelos del estudio del clima

Considerando los efectos negativos que inducen los cambios observados en el sistema climático mundial, se persigue hacer estudios que ofrezcan predicciones oportunas de los impactos antropogénicos sobre el clima, desafortunadamente todavía existen muchas incertidumbres en la modelación del sistema climático. Por ejemplo, en cuanto al ciclo del carbono específicamente, presentan una limitante muy significativa: la información de los flujos de carbono que intentan reproducir algunos modelos se basa en indicadores geológicos indirectos que son muy difíciles de comprobar, como la tasa de la desgasificación volcánica o el enterramiento de la materia orgánica [2, 50]. Además, los modelos desarrollados han tratado pobremente la aceleración de la producción del carbono por la respiración del suelo condicionada por temperaturas más cálidas, el carbono liberado a la atmósfera por la destrucción de los bosques cuando las zonas atmosféricas se desplazan velozmente, el aporte de temperaturas oceánicas más cálidas y los cambios de circulación de los océanos [33], también representa gran incertidumbre los mismos escenarios de emisión de GEI utilizados en una gran cantidad de los modelos actuales [67].

Los modelos climáticos desarrollados poseen diferentes alcances en el sentido del número de componentes climáticos definidos en el mismo. Modelos de menor alcance se enfocan en un único componente, esto es ilustrado por los modelos de atmósfera que se caracterizan por estudiar los cambios y demás elementos relacionados al ciclo del carbono, mientras los modelos de mayor alcance tratan varias componentes del sistema climático conjuntamente.

Concerniente a los modelos atmosféricos, expertos del IPCC y otros investigadores han desarrollado modelos de amplio alcance que estudian la concentración de GEI, ciclo del carbono y su retroalimentación, el forzamiento radiativo resultante de las concentraciones de gases de efecto invernadero y la respuesta de la temperatura media mundial al forzamiento radiativo calculado [33]. Es de suma importancia la comprensión del forzamiento radiativo y los procesos de retroalimentación de carbono, puesto que estas componentes en combinación con las reacciones climáticas y el almacenamiento de energía por parte del sistema climático, determina la velocidad y la magnitud del cambio climático global [13, 36].

Como se ha mencionado previamente, el proceso de comprender mejor el ciclo del carbono es fundamental porque caracteriza la concentración de  $\text{CO}_2$  que es uno de los principales GEI. Modelar las concentraciones de GEI considerando las emisiones existentes implica modelar la transformación de gases en la atmósfera y su

eliminación [36], para ello se han diseñado modelos que se pueden clasificar en dos grandes grupos: primero, los estudios que se centran en el cambio climático actual y su evolución en escalas temporales de generaciones humanas, estos tienen como finalidad entender y cuantificar los rápidos flujos del carbono que se producen en el sistema climático a corto plazo, y que involucran fuentes y sumideros de la hidrósfera, la atmósfera, la biósfera y los suelos; y, el segundo grupo que incluye los modelos del ciclo del carbono definidos en escalas de millones de años y que cuantifican mecanismos de intercambio más lentos. Esos se refieren a la transferencia de carbono entre la litósfera y el sistema superficial terrestre, es decir, el sistema que agrupa la atmósfera, los océanos, la biósfera y los suelos [50].

Atendiendo a la finalidad que persigue este estudio, el modelo que se ha considerado está definido para escalas temporales de generaciones humanas, es decir, modela procesos que cambian en años o décadas. Adicionalmente, las simulaciones del ciclo del carbono en los Modelos del Sistema de la Tierra (EMS en inglés) pueden ser obtenidas en base a la concentración o a las emisiones de este elemento. Las simulaciones basadas en la concentración se desarrollan desde una óptica tradicionalista donde la evolución temporal del  $\text{CO}_2$  atmosférico es un parámetro dado para el modelo. Por otro lado, las simulaciones definidas por medio de las emisiones incluyen un conjunto más amplio de modelos, en estos las emisiones de carbono en la atmósfera son simulados por el mismo modelo, más detalles de este tipo de aproximaciones matemáticas pueden consultarse en [20], un modelo que ilustra el tipo antes referido fue desarrollado por Lade et al. [45].

La presente investigación centra principalmente su atención en extender los resultados presentados en [45], en donde las emisiones antropogénicas de carbono son obtenidas a partir de datos históricos tanto como de futuros escenarios de emisiones, mientras que los intercambios de carbono se modelan con los parámetros de mayor confianza, en lugar de utilizar aquellos valores que mejor se ajustan a los datos históricos como suele hacerse en otros modelos. Otro estudio de este tipo es presentado por Lenton en [48], el modelo incluye una gama de mecanismos de retroalimentación entre el  $\text{CO}_2$  atmosférico, la temperatura de la superficie y el ciclo de carbono en la tierra y el océano, con el fin de evaluar su efecto sobre el cambio global impulsado por las emisiones antropogénicas de  $\text{CO}_2$ . Una descripción simplificada del modelo de Lenton y otro que sigue la misma naturaleza se presenta en la Sección 1.3.

En los últimos años se han elaborado modelos sofisticados relativos al carbono y su interacción en el sistema climático [33]. En términos generales, los modelos del ciclo global del carbono estudian los flujos de carbono entre la atmósfera, suelos y el océano [13], usualmente con un acoplamiento no lineal del intercambio

de masa, energía y momento [37]. Algunos también incluyen configuraciones espaciales como la desgasificación en los trópicos y absorción en las latitudes medias y altas [2, 20, 45]. En cuanto a los modelos utilizados por el IPCC, importantes avances en se han incorporado paulatinamente como la incorporación del ciclo del carbono, inclusión de más procesos y mejor acoplamiento de la atmósfera con los océanos [37].

También destacan progresos en otros modelos como el de Siegenthaler y Joos [63], en donde se analiza explícitamente los procesos de química oceánica y del flujo vertical del carbono mediante un modelo de difusión afloramiento; el modelo de Jain et al. [38] en el cual las posibles consecuencias del calentamiento de efecto invernadero inducido por el  $\text{CO}_2$  se estudian comparando las tendencias en los resultados del modelo de circulación general (GCG) del Laboratorio de Dinámica de Fluidos Geofísicos (GFDL, por sus siglas en inglés); y, el modelo de Jones et al. [41], en donde se emplea una representación razonable de la captación del carbono y su interacción con el océano, además muestra los patrones de cambio de temperatura regional en el siglo XX.

Otro enfoque en la modelación matemática del sistema climático centra su atención en tratar conceptos más teóricos relacionados a los procesos de este sistema, tal es el caso del modelo presentado por Anderies et al. en [2], tal estudio no tiene como propósito predecir la dinámica global del carbono como ocurre en el planeta, sino construir una representación conceptual coherente para analizar umbrales peligrosos para el sistema climático por medio de una investigación del espacio de estados y parámetros.

En lo que se refiere al estudio formal de las retroalimentaciones de un proceso, las primeras nociones de este concepto se remontan a 1864, cuando el científico escocés James Croll en [16] ya dejaba entrever que existía la posibilidad de que mecanismos internos en el sistema climático pudieran tener repercusiones que reforzaran algunas respuestas del sistema, por otro lado, en 1896, el científico sueco ganador del premio Nobel en química Svante Arrhenius mostró en [3], resultados interesantes sobre el aumento de la temperatura generado por el aumento de carbono, en su estudio también estudiaba el efecto del vapor de agua como agente forzador. Sin embargo, se le atribuye al ingeniero eléctrico estadounidense Harold S. Black en 1927 una construcción abstracta de este concepto [59], aunque en la práctica ya se había empleado en diferentes áreas del conocimiento, incluso los romanos o griegos utilizaron herramientas que incluían implícitamente el concepto de retroalimentación.

Para 1960 ya se había incluido de forma categórica el concepto de retroalimentación como mecanismo fundamental que modula la respuesta climática en una amplia gama de investigaciones. En la década de

1980 se publican estudios orientados a diseñar métricas para cuantificar la retroalimentación, como es el caso de [32], publicado en 1984 por Hansen et al., en donde se definen el coeficiente de ganancia y el factor de retroalimentación de carbono, ambos coeficientes considerados en la actualidad como medidas clásicas de retroalimentación.

Posteriormente se sucintaron estudios innovadores que siguen siendo muy útiles hasta el día de hoy, como la publicación en 1985 del profesor de ciencias atmosféricas Michael E. Schlesinger donde hace un estudio de retroalimentación considerando un balance energético con modelos de radiación [62] y la investigación presentada en [46] del científico Daniel A. Lashof, publicada en 1989, en donde se trata por primera vez una forma de cuantificar la retroalimentación del ciclo clima-carbono [21].

En los años siguientes las investigaciones dedicadas a medir las retroalimentaciones en estos sistemas siguen una marcha constante pero no cuantiosa, diversas y profundas incertidumbres todavía se conservan, tal que, en algunos casos, definir bien los mecanismos de retroalimentación y las métricas precisas para su medición tiene más relevancia científica que la obtención de la medida misma [59].

### 1.3. Modelos precursores

Conforme a su complejidad, los ESM se pueden distinguir básicamente en tres categorías, a saber, los modelos más complejos que incluyen modelos de circulación general del clima, los de complejidad intermedia y los modelos ESM simples. En esta sección se introduce el modelo que se estudia en el Capítulo 3 por medio de dos ESM simples considerados como precursores.

Timothy Lenton, en el año 2000, publica un modelo simple del ciclo global del carbono acoplado con una aproximación del balance energético para estimar el cambio de la temperatura media de la superficie de la Tierra [48]. Este modelo se dice que está definido en siete *cajas*, o áreas de interacción del carbono, estas son: atmósfera ( $C_a$ ), vegetación ( $C_v$ ), suelos ( $C_s$ ), superficie del océano de bajas ( $C_l$ ) y altas ( $C_h$ ) latitudes, océano de la capa intermedia ( $C_i$ ) y océano profundo ( $C_d$ ). Para definir el intercambio de carbono en la biósfera en [48], se utiliza el siguiente balance

$$\frac{dC_v}{dt} = P(C, T) - R_p(C_v, T) - L(C_v), \quad (1.1)$$

tal que  $P$  es una función que describe la síntesis de  $\text{CO}_2$  ( $C$ ) por las plantas en configuración con la tempera-

tura  $T$ ,  $R_p$  es la respiración de las plantas y  $L$  denota el carbono, por la caída de hojarasca y muerte de plantas.

En el caso del balance de masa que describe el carbono en los suelos, el flujo se describe así

$$\frac{dC_s}{dt} = L(C_v) - R_s(C_s, T), \quad (1.2)$$

$R_s$  denota la respiración de las plantas, esto se refiere a los mecanismos llevando a cabo por los autótrofos para mantener vivas sus raíces y en los cuales es liberado carbono.

La configuración del intercambio de carbono en océanos es más compleja que en la biósfera y en los suelos, por lo cual su representación matemática no es tan sencilla como la mostrada en las ecuaciones (1.1) y (1.2). Para el propósito de esta investigación no es relevante detallar el modelo usado para el intercambio de carbono en océanos propuesto en [48], en donde el modelado se realizó mediante 4 regiones oceánicas: superficie latitudinal (baja y alta) y profundidad (océano intermedio y profundo). Una estructura general utilizada para modelar el intercambio del carbono entre atmósfera y océanos se encuentra en [44].

En el caso del carbono en atmósfera, se considera la ecuación

$$\frac{dC_a}{dt} = -P + R_p + R_s - F_{aw} - F_{ac},$$

tal que  $F_{aw}$  y  $F_{ac}$  refieren los flujos para la absorción de carbono en las latitudes altas y bajas respectivamente.

Completa el modelo una ecuación para el promedio de la temperatura global, diseñado a partir de un planteamiento similar al presentado en [32, 59].

Siguiendo las ideas anteriores para el modelado del carbono, Anderies et al. en el año 2012 presentaron en [2] un modelo de estructura similar, pero con el propósito de analizar la *topología de los límites*, es decir, un espacio operativo seguro para el desarrollo de las actividades humanas.

Definen el flujo de carbono en suelos ( $C_t$ ) como se muestra en la ecuación

$$\frac{dC_t}{dt} = NEP(p(T, C_a), r, C_t) - H,$$

en este caso, a diferencia de Lenton, el carbono en suelos se estima por una única ecuación diferencial que depende de la función  $NEP$  que modela la producción neta del ecosistema y  $H$  expresa el flujo de carbono liberado a la atmósfera por todas las actividades desarrolladas en la superficie terrestre como la forestación e incendios forestales. Particularmente,  $NEP$  depende de una función que modela la tasa de fotosíntesis  $p(T, C_a)$  y la respiración del suelo  $r$  donde se incluye la respiración de plantas y suelo propiamente dicho.

Las ecuaciones que definen los flujos de carbono en los océanos ( $C_r$ ) y el carbono total ( $C_T$ ), definidas con la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\frac{dC_r}{dt} &= D(C_a, C_m) \\ \frac{dC_T}{dt} &= I,\end{aligned}$$

completan el modelo. En este caso, la función  $D$  caracteriza el intercambio entre el carbono en la atmósfera y la superficie de los océanos, definida como  $D(C_a, C_m) = a_m(C_a - C_m)$  con  $a_m$  constante de mejor ajuste, mientras que  $I$  describe el carbono geológico liberado como la combustión de combustibles fósiles. Además se asume que  $C_T = C_a + C_m + C_t$ .

El modelo estudiado se construye partiendo de las ideas presentadas en los dos modelos previos, pero con algunas diferencias significativas. Se mantiene la propuesta del modelo de Lenton, pero en 3 y no 7 cajas. Por otra parte, además del ciclo del carbono también se añade un acoplamiento radiativo; sin embargo, la representación de los flujos de carbono en océanos es más simple que la de Lenton, pero más realista que la propuesta de Anderies et al. para este reservorio.

Al igual que Anderies et al. no se hace una diferenciación específica para los intercambios de carbono por las latitudes altas y bajas oceánicas y la respiración de plantas y suelos en el modelo estudiado, en su lugar se considera una única expresión tanto para la difusión de  $CO_2$  en océanos como para la respiración, también la configuración del carbono en atmósfera se plantea como en Anderies et al.

## Capítulo 2

# Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos matemáticos útiles para la comprensión de las secciones posteriores. En la Sección 2.1 se describe de manera general la naturaleza de las ecuaciones de reacción-difusión, tópico que es utilizado en la primera parte del Capítulo 4. En la Sección 2.2 se explica la metodología seguida para hacer un análisis de inestabilidad de Turing, con este procedimiento se hizo un estudio de la homogeneidad de la composición atmosférica y de la estabilidad del modelo cuando se incluye difusión, los resultados obtenidos se discuten en la Sección 4.3. Finalmente, en la Sección 2.3 se presentan conceptos importantes sobre las derivadas funcionales de Gâteaux y Fréchet, estas derivadas fueron necesarias en el cálculo y análisis de los coeficientes de retroalimentación del Capítulo 5.

### 2.1. Ecuaciones de reacción-difusión

Un modelo matemático de reacción-difusión es un problema que está determinado por la siguiente ecuación

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{F}(\mathbf{u}) + \delta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

de tal manera que incluye algún término para cada uno de los procesos descritos a continuación.

#### i. *Reacción*

Usualmente el proceso de reacción se asocia a fenómenos químicos, sin embargo, puede representar fenómenos de otra naturaleza, como el crecimiento de alguna población, variación en la concentración de un gas, etc. Entonces, de acuerdo con el fenómeno que se modele, el término para la reacción puede tener diferentes interpretaciones. En la ecuación (2.1) la representación matemática de la reacción, según las estimaciones e idealizaciones realizadas del fenómeno, es descrita por la función  $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ , donde



$\mathbf{u} = u(\mathbf{x}, t)$  es, en general, la función que se desea conocer para modelar el problema en cuestión y  $\mathbf{u}_t$  su derivada respecto al tiempo. En el contexto de esta investigación, se considera a  $\mathbf{u}$  como una cantidad que mide el stock de carbono en el sistema de reacción controlado por la función  $\mathcal{F}$ , que caracteriza el cambio del carbono en los reservorios de su ciclo global a través del tiempo.

## ii. *Difusión*

La difusión refiere el proceso generado por partículas que se mueven de una región de alta densidad a otra de menor densidad. Las ecuaciones con términos de difusión tienen útiles aplicaciones en diversos campos, como en fisiología, para el estudio de la mecánica de fluidos fisiológicos en el sistema circulatorio y tejidos [10, 65]; en ecología, para estimar el movimiento de especies invasoras y competencias de especies en espacio y tiempo [5]; en economía, para capturar múltiples cantidades de variables macroeconómicas a fin de analizar comportamientos oscilatorios y estados de equilibrio [27], etc.

Ya que el proceso de difusión puede considerar diferentes escenarios físicos tales como la transferencia de masa, transferencia de energía por conducción en forma de calor, entre otros, entonces diferentes leyes físicas, como la ley de Fourier o la ley de Fick, conducen a la ecuación diferencial de difusión:

$$\mathbf{u}_t = \delta \nabla^2 \mathbf{u},$$

donde  $\delta$  es un coeficiente que rige la difusión.

En el Capítulo 4 se usará una ecuación diferencial del tipo (2.1) para estudiar la influencia de la inhomogeneidad espacial de la distribución de carbono en las retroalimentaciones.

## 2.2. Inestabilidad de Turing

En esta sección se explica un procedimiento por el cual se puede hacer un análisis de Turing para una ecuación de la forma (2.1), a continuación se presenta este procedimiento y otros detalles de interés.

Suele ser importante en diversos problemas de ciencias e ingeniería comprender el comportamiento de la difusión en términos del espacio. Una estrategia que ha sido utilizada para abordar este tipo de problemas se remonta a los trabajos desarrollados en el año de 1952 por el matemático británico Alan Turing comúnmente denominada como *patrones de Turing*.

Mediante algunos análisis de estabilidad Turing pretendía comprender mejor el funcionamiento de los patrones que se forman en la superficie exterior del cuerpo de algunos animales e insectos. Un trabajo precedente en esta área lo desarrolló en 1917 el biólogo escocés D'Arcy Thompson [69]. Naturalmente, estos patrones son importantes debido a los servicios de defensa y comunión que brindan a la especie que los presenta. Si bien la aplicación inicial de los patrones de Turing fue en biología, pronto fueron utilizados para comprender mejor otros procesos de reacción difusión en áreas como neurología [12], genética [26], química [64], entre otras.

A través del estudio de las reacciones químicas que propiciaban los patrones, Turing estableció que en los sistemas se podían presentar diferentes inestabilidades, a saber, aquellas que oscilan en el tiempo, pero son independientes del espacio, las que varían en espacio pero no en tiempo y las que oscilan tanto en tiempo como en espacio [68]. De esta manera, Turing determinó que los patrones en la piel de algunas especies de animales se hacían presentes cuando ocurría una *inestabilidad por difusión* estacionaria en el tiempo, también denominada *inestabilidad de Turing* [28, 68], es decir, un tipo de inestabilidad que se presenta cuando existen pequeñas perturbaciones espaciales del sistema con difusión, pero sin difusión es estable a las mismas perturbaciones [54]. Al dominio del espacio de parámetros que permite que el modelo sea inestable a ciertas perturbaciones espaciales se le denomina *espacio de Turing*.

Existe amplia literatura dedicada a la inestabilidad de Turing en modelos de reacción difusión de diferentes áreas [54, 66]; para un primer acercamiento, sistemas unidimensionales de dos especies como el de Schnakenberg o el de Gierer-Meinhardt pueden resultar altamente valiosos por los aportes metodológicos que ofrece su relativa simplicidad [68].

Por la naturaleza del modelo estudiado en el presente trabajo, se describe la inestabilidad de Turing en el caso de un modelo unidimensional en el espacio, para más de dos especies se sugiere consultar [34, 54]. En este sentido, se considera el sistema en una dimensión espacial de reacción difusión

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}) + D\nabla^2 \mathbf{u}, \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

tal que  $\mathbf{u} : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $T$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  es el término no lineal que expresa la reacción,  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario y  $D$  es la matriz diagonal cuyos componentes constituyen los parámetros de difusión.

Considerando que la inestabilidad de Turing se presenta cuando el estado estacionario es estable si no hay difusión, entonces se suprime del modelo el término  $D\nabla^2\mathbf{u}$ , obteniendo

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}), \quad (2.2)$$

para luego encontrar los estados estacionarios  $\mathbf{u}_0$ , esto es cuando  $f(\mathbf{u}) = 0$ .

Como se desea garantizar la estabilidad con una pequeña perturbación del estado estacionario, se considera el vector  $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  tal que  $|\mathbf{z}|$  es pequeño. Sustituyendo  $\mathbf{z}$  en (2.2) y haciendo un desarrollo en series de Taylor de orden 2, se obtiene

$$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{J}\mathbf{z}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana evaluada en  $\mathbf{u}_0$ . De (2.3) se pueden obtener soluciones de la forma  $e^{\lambda t}$ , con  $\lambda$  autovalor de  $\mathbf{J}$ . Teoría robusta desarrollada en [34] establece que la estabilidad está garantizada siempre y cuando  $Re(\lambda) < 0$ , a partir de esta condición se obtienen algunas desigualdades que limitan el espacio de Turing del modelo.

Continuando con el análisis de estabilidad, se prosigue a estudiar el sistema considerando la difusión. Con un procedimiento para la linealización similar al descrito previamente se obtiene

$$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{D}\nabla^2\mathbf{z}. \quad (2.4)$$

Para resolver (2.4) inicialmente se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} Z''(x) + k^2Z(x) = 0 \\ Z'(0) = Z'(a) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Las ecuaciones de (2.5) definen un clásico problema de Sturm-Liouville, cuya solución es de la forma  $\cos(n\pi x/a)$  donde  $k = n\pi/a$ , más detalles pueden ser consultados en [55]. En este contexto, a los valores de  $k$  se les denomina autovalores del problema (2.5).

A continuación, se conjetura que (2.4) tiene por solución

$$\mathbf{z} = \mathbf{v}e^{\lambda t}Z(x), \quad (2.6)$$

donde  $Z(x)$  es la solución de (2.5),  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (fijo y no nulo) y tanto  $\mathbf{v}$  como  $\lambda$  son incógnitas.

Sustituyendo (2.6) en (2.4) se llega a que las incógnitas  $\mathbf{v}$  y  $\lambda$  deben satisfacer la siguiente igualdad

$$(\lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D})\mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

Para encontrar una solución no trivial de (2.7) se debe cumplir que la matriz  $\lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D}$  sea singular, es decir,  $\det(\lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D}) = 0$ . Para que se dé la inestabilidad de Turing es suficiente garantizar que al menos una de las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D}, \quad (2.8)$$

tenga parte real positiva. De esta manera, es posible obtener otras condiciones que limitan el espacio de Turing.

## 2.3. Derivadas funcionales

En el presente apartado se describirán de manera breve las definiciones básicas que conducen a la definición de la derivada de un funcional, utilizadas en el Capítulo 5. Las definiciones expresadas en este apartado fueron tomadas de [19].

**Definición 1** (Funcional). *Sea  $\mathcal{F}$  un espacio de Banach. Una función  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  tal que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ , se denomina con el nombre de funcional. El número asociado a  $f$  por medio del funcional  $F$  se denota por  $F[f]$ .*

Algunos ejemplos clásicos de funcionales se muestran en la siguiente lista:

- i. Para  $\mathcal{D} \subset C[a, b]$  y defina  $F$  de la siguiente forma:

$$F[f] = \int_a^b f(x) dx.$$

Está claro que  $F$  es un funcional atendiendo a la definición.

- ii. Una forma más general del funcional anterior es el siguiente:

$$F[f] = \int_a^b w(x) f(x) dx,$$

donde  $w, f \in C[a, b]$  y  $w$  está fija.

iii. Defina  $\mathcal{D}$  como el conjunto de las funciones de variable real, cuyo dominio contiene al valor fijo  $x_0$ . El siguiente funcional:

$$F[f] = f(x_0),$$

simplemente retorna el valor de la función evaluada en el punto fijo  $x_0$ . Este funcional suele representarse en la forma del inciso ii. por medio del objeto matemático  $\delta_{x_0}(x)$ , denominado Delta de Dirac centrada el punto  $x_0$ :

$$F[f] = \int_a^b \delta_{x_0}(x) f(x) dx.$$

**Definición 2** (Derivada de Gâteaux). Sean  $\mathcal{F}$  un espacio normado y  $\mathcal{U}$  un subconjunto abierto de  $\mathcal{F}$ . Sean  $F$  un funcional definido sobre  $\mathcal{U}$ ,  $f \in \mathcal{U}$  y  $\eta \in \mathcal{F}$ . Considérese el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F[f + t\eta] - F[f]}{t}.$$

Si este límite existe entonces se dice que  $F$  tiene derivada en  $f$  en la dirección de  $\eta$  y se denota por  $\frac{\delta F}{\delta f}[\eta]$ .

Otras formas de denotar la derivada presentada en la definición anterior son  $\delta F_f[\eta]$  o  $\delta F(f, \eta)$ . Por otro lado, se puede establecer si una función es diferenciable en el sentido también de Gâteaux si cumple con los requisitos de la siguiente definición:

**Definición 3** (Diferenciable Gâteaux). Si a la Definición 2 se le agrega que  $\frac{\delta F}{\delta f}[\eta]$  está definida para todo  $\eta \in \mathcal{F}$  y resulta que la aplicación

$$\eta \longrightarrow \frac{\delta F}{\delta f}[\eta],$$

es lineal y continua, entonces  $F$  se dice diferenciable en el sentido de Gâteaux. A esta aplicación lineal se le denota por  $F'[f]$ .

Relacionada a la derivada de Gâteaux se define la derivada de Fréchet:

**Definición 4** (Derivada de Fréchet). Bajo las mismas hipótesis que en la definición de la derivada de Gâteaux. Si existe una aplicación lineal  $L$  tal que verifique la siguiente relación:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|F[f + \eta] - F[f] - L(\eta)|}{\|\eta\|} = 0,$$

entonces se dice que  $F$  es diferenciable en  $f$  en el sentido de Fréchet. A esta aplicación lineal se le denota por  $\delta F_f^F$ , también se le denota por  $DF(f)$ .

Finalmente, por lo expuesto en la Definición 2 y la Definición 4 se puede ver la estrecha relación entre ambas derivadas, las dos proposiciones siguientes expresan cuando un funcional  $F$  diferenciable en el sentido de Gâteaux es también diferenciable en el sentido de Fréchet y viceversa.

**Proposición 1** (Derivada de Fréchet y Gâteaux). *Sea  $F$  diferenciable en el sentido de Fréchet. entonces  $F$  también es diferenciable en el sentido de Gâteaux y  $F'[f] = \delta F_f^F$ .*

**Proposición 2** (Derivada de Fréchet y Gâteaux). *Sea  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en el sentido de Gâteaux en un entorno de  $f$ , entonces  $F$  también es diferenciable de Fréchet en  $f$  y  $F'[f] = \delta F_f^F$ .*

Las demostraciones de las proposiciones 1 y 2 están disponibles en [19], para ilustrar mejor los dos resultados de estas proposiciones se exponen los ejemplos que se muestran a continuación:

i. Dado el funcional  $F[f] = f(0)$ , donde  $f$  es una función con dominio en los reales. Se puede probar fácilmente que  $\frac{\delta F}{\delta f}[\eta] = \eta(0)$ . Esta aplicación no es continua, lo cual implica que  $F$  no es diferenciable en el sentido de Gâteaux y por lo tanto tampoco es diferenciable en el sentido de Fréchet.

ii. Considérese el funcional:

$$F[f] = \int_a^b f(x)dx,$$

donde  $f \in L^2[a, b]$ . Usando la Definición 2 se calcula inicialmente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta f}[\eta] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_a^b f(x) + t\eta(x)dx - \int_a^b f(x)dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_a^b t\eta(x)dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \eta(x)dx \\ &= \int_a^b \eta(x)dx. \end{aligned}$$

Como la derivada de Gâteaux es lineal y continua para toda  $f$ , entonces la derivada de Fréchet existe y es igual a esta aplicación lineal en todo  $f$ . Es decir  $\delta F_f^F(\eta) = F'[f](\eta) = \int_a^b \eta(x)dx$ .

## Capítulo 3

# Planteamiento del modelo, linealización y estabilidad

En este capítulo se presenta un estudio detallado del sistema que se ha usado para la modelación del ciclo global del carbono y sus bucles de retroalimentación. El modelo utilizado fue publicado en el año 2018 en [45], a su vez, se basa en otros modelos precursores que se describieron al final del Capítulo 1. La elección de este modelo se debe a dos criterios: primero, es de los pocos sistemas dinámicos en este campo que permite desarrollos analíticos; y, segundo, brinda la oportunidad de hacer estimaciones numéricas en sistemas computacionales de no grandes prestaciones. El estudio del modelo inicia con su caracterización presentada en la Sección 3.1. Seguidamente, en la Sección 3.2 se brinda una descripción detallada de cada uno de los términos que lo definen. Luego, en la Sección 3.3 se presenta la linealización del modelo por medio de la cual se estudió su estabilidad en la Sección 3.4. Finalmente, en la Sección 3.5 se presentan gráficas de la solución aproximada del sistema para los flujos de carbono y cambios de masa en los reservorios naturales.

### 3.1. Caracterización del modelo

El modelo presentado en este documento conserva las siguientes características:

- i. El sistema modela una representación idealizada del ciclo global del carbono incluyendo perturbaciones antropogénicas del balance natural del carbono. Dichas perturbaciones se concentran, como suele ser natural en estos modelos, en dos procesos: la *emisión de carbono por medio del uso del suelo*, que incluye también el cambio del uso de la superficie terrestre y la silvicultura [49] y la *emisión del carbono fósil*, donde se incluye uso de combustibles fósiles, procesos industriales y uso y producción de productos (cemento, acero, químicos y urea) [15].

- ii. En términos temporales, el modelo se desarrolla para el período comprendido entre el año 1750 y 2100. Se elige al año 1750 como punto de partida porque esta fecha ha sido mundialmente aceptada como el inicio de la industrialización, mientras que se toma al 2100 como año final porque es la fecha en que finalizan los conjuntos de datos proyectados por la fase quinta del Proyecto de Intercomparación de Modelos de Clima Acoplados (CMIP5 por sus siglas en inglés).
- iii. Los parámetros tienen una interpretación directa, aunque en muchos procesos no se han estimado los subprocesos inherentes sino que se ha recurrido a hacer una estimación general; por ejemplo, en lugar de cuantificar todas las fases que componen la emisión de carbono por uso del suelo, se recurre a una estimación mundial anual.
- iv. Para el modelamiento del carbono en suelos no se han incluido algunos procesos que condicionan, en casos particulares, la fijación de carbono terrestre como la interacción, competencia y migración de especies, estacionalidad de cultivos, etc.
- v. En el caso del modelamiento del carbono en océanos, el modelo no incluye explícitamente factores como el grosor de las capas de estratificación oceánica, la variación espacial de la estratificación, los cambios en la circulación oceánica debidos a la fuerza del viento, la fuerza del agua dulce o los procesos de hielo marino. Además, considerando que el carbono se mantiene en la profundidad durante un tiempo muy prolongado, el modelo contempla al océano profundo como un depósito de carbono y la dinámica de carbono se estudia exclusivamente para la capa mixta superior, es decir, el estrato superficial del océano donde la temperatura es más cálida y existe mayor movimiento del agua.
- vi. El modelo no está diseñado para estudiar la sensibilidad climática, consecuentemente no se ha trabajado en el cambio de parametrizaciones, en su lugar cada proceso se modela con la mejor información disponible (expresión matemática y magnitud de parámetros) sobre ese proceso de tal forma que no se intenta forzar el modelo para que se ajuste a los datos históricos.

Como elemento final en la caracterización se señala que, aunque el modelo utilizado en esta investigación es estilizado, ofrece bondades que lo hacen muy útil para los fines de este trabajo ya que es menos exigente computacionalmente, permite un tratamiento analítico y ofrece un espacio de trabajo para hacer pruebas y plantear hipótesis sobre los mecanismos que definen el ciclo del carbono y sus retroalimentaciones.



## 3.2. Formulación del modelo

El modelo considera tres magnitudes para el carbono según su ubicación: carbono en atmósfera ( $C_a$ ), carbono terrestre ( $C_t$ ) y el carbono de la capa mixta del océano ( $C_m$ ) comúnmente conocido como *carbono inorgánico disuelto* (DIC por sus siglas en inglés) compuesto por el  $\text{CO}_2$  junto con los iones de bicarbonato ( $\text{HCO}_3^-$ ) y el carbonato ( $\text{CO}_3^{2-}$ ) [18]. Adicionalmente, se contempla la temperatura<sup>1</sup> media de la superficie terrestre como el diferencial de la temperatura preindustrial, esto es,  $\Delta T = T - T_0$ .

### 3.2.1. Dinámica del carbono terrestre

En la superficie terrestre se llevan a cabo naturalmente dos procesos que configuran el ciclo del carbono en esta dimensión: *la absorción de carbono por parte de los organismos autótrofos*, también denominados productores primarios, y la expulsión de carbono a la atmósfera por medio de *la respiración del suelo*. Se suma a estos procesos el aporte de carbono emitido por las actividades humanas en lo que se conoce como *uso del suelo*. Seguidamente se describe la configuración matemática de la dinámica del carbono terrestre en función de los procesos antes referidos.

Se define la producción primaria neta (*NPP* por sus siglas en inglés) como la captación neta de carbono de la atmósfera por parte de los organismos autótrofos a través de la fotosíntesis, esto es, la diferencia entre lo absorbido por la biomasa y la respiración del suelo [48]. Considerando que estos organismos sintetizan el  $\text{CO}_2$  de la atmósfera para la producción de su masa celular, entonces, a medida que se exponen una mayor abundancia de carbono atmosférico se estima que habrá un efecto de fertilización que conducirá al aumento de la *NPP*.

Una de las formas de medición de la *NPP* y que se utiliza en el presente documento es la *curva de Keeling*<sup>2</sup>, su expresión matemática<sup>3</sup>, en términos del carbono atmosférico por la influencia que este tiene sobre la producción primaria, se presenta a continuación

$$NPP(C_a) = NPP_0(1 + K_c \log(C_a/C_{a_0})), \quad (3.1)$$

donde el punto inicial se toma también a partir de la época preindustrial, por lo que  $NPP_0$  cuantifica la

<sup>1</sup>La unidad de medida usada en esta investigación para la temperatura es el kelvin ( $K$ ).

<sup>2</sup>Aporte de Charles Keeling para medir la acumulación de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera terrestre; la expresión se basa en datos tomados en el Observatorio de Mauna Loa en la isla de Hawai desde 1958.

<sup>3</sup>En donde *log* denota el logaritmo natural, esta convención se mantiene en lo sucesivo.

producción primaria neta en el año de 1750 y  $C_{a_0}$  la masa de carbono atmosférico en forma de  $\text{CO}_2$  para el mismo año,  $K_c$  denota el *factor de fertilización*, también llamado factor de crecimiento, usualmente restringido a  $0.2 \leq K_c \leq 0.6$  como se indica en [1].

Si bien el parámetro de crecimiento juega un papel importante en la ecuación (3.1), muchas incertidumbres se suelen asociar en su calibración, en algunos casos se ha elegido, sin mayor detrimento, su magnitud conforme al dato que más se ajusta al curso observado de los cambios de  $\text{CO}_2$  atmosférico, lo que podría representar una simplificación donde se pierde información importante como la dependencia de este factor al clima [1]. Con algunas de las simulaciones numéricas presentadas final del Capítulo 5 se discute cómo el factor de retroalimentación y otros procesos que determinan el intercambio de carbono en suelos afectan las mediciones de retroalimentación.

La fórmula de Keeling cuantifica efectos relacionados al cambio de la química atmosférica y la *NPP* global debido a la industria. En esta expresión se incluyen efectos de precipitación y temperatura, además de efectos de fertilización; sin embargo, la fórmula cuenta con limitaciones en sus registros, no se incluyen componentes que podrían ayudar a reducir las incertidumbres en la eficiencia de absorción de carbono en suelos, como el cambio en la gestión futura de la tierra o los ciclos de nutrientes [22].

En cuanto a la pérdida de carbono por medio de la respiración del suelo, entendida esta como el proceso mediante el cual los organismos heterótrofos utilizan material orgánico como fuente de energía devolviendo así carbono a la atmósfera [51] y donde la descomposición microbiana de material orgánico es el proceso más importante para la generación de  $\text{CO}_2$  [30], es importante notar que este proceso puede ser precisado tan fino o tan general como se desee conforme a los subprocesos que se tomen en cuenta, en este trabajo se utiliza una expresión de la contribución de carbono a la atmósfera medido en función del carbono global en suelos.

Se considera la relación dada en [71] para la pérdida de carbono del suelo ( $R$ ) a través de la respiración, debido a que existe una relación estrecha entre la temperatura del ambiente y la actividad de los organismos descomponedores, entonces,  $R$  depende de  $\Delta T$ , la siguiente expresión muestra esta dependencia

$$R(\Delta T) = \frac{C_t}{C_{t_0}} R_0 Q_R^{\Delta T/10}, \quad (3.2)$$

donde  $Q_R$  es la tasa a la cual la materia orgánica se descompone, determinada por la temperatura y la

humedad del suelo [23], y  $R_0 = NPP_0$ , debido a que se asume que existía un equilibrio entre la respiración del suelo y la producción primaria neta en la época preindustrial.

Considerando la ecuación (3.1) para la absorción de carbono por la fotosíntesis y la ecuación para la emisión de carbono por la respiración del suelo (3.2), se modela el cambio de carbono terrestre como sigue

$$\frac{dC_t}{dt} = NPP_0 \left( 1 + K_c \log \left( \frac{C_a}{C_{a0}} \right) - \frac{C_t}{C_{t0}} Q_R^{\Delta T/10} \right) - LUC(t), \quad (3.3)$$

donde  $LUC(t)$  representa la pérdida de carbono terrestre por el cambio del uso de suelo y la silvicultura.

### 3.2.2. Dinámica del carbono en océanos

Al igual que en los suelos, en el océano ocurren dos procesos que determinan el intercambio de carbono: la absorción, que se realiza en la capa mixta superior del océano y cuyos principales mecanismos por los cuales el carbono se transporta a las reservas de los océanos profundos son la solubilidad y la bomba biológica<sup>4</sup>; y, la emisión por medio de la respiración heterótrofa oceánica. Se destaca que la absorción es el proceso predominante entre los dos previamente mencionados, tal que los océanos constituyen el mayor sumidero de carbono cerca de la superficie de la tierra [51].

Se entiende por solubilidad o *bomba física* a un proceso físico-químico en el que el  $\text{CO}_2$  atmosférico es disuelto en el océano; con este mecanismo, las aguas aumentan su densidad, por lo cual se sumergen y con ello se aumenta el reservorio de carbono en las profundidades oceánicas [8]. La solubilidad de carbono en los océanos es favorecida por temperaturas bajas de las aguas superficiales, es decir, la capacidad del océano para absorber  $\text{CO}_2$  disminuye a mayor temperatura [13]. Debido a la captación no homogénea de  $\text{CO}_2$  [60], las aguas de las latitudes altas, como en el Atlántico Norte, preservan mayores concentraciones de carbono.

Por la relación inversamente proporcional entre la temperatura del agua y captación de  $\text{CO}_2$  atmosférico, surge una de las preocupaciones actuales ante el cambio climático que consiste en la posibilidad de que se reduzca sustancialmente la efectividad de los sumideros oceánicos debido al aumento de la temperatura de las aguas promovido por el forzamiento antropogénico. Adicionalmente, según las últimas tendencias climáticas que incluyen calentamiento de los océanos, cambios en la circulación oceánica, deterioro de los ecosistemas marinos y modificación de los ciclos biogeoquímicos, como en ciclo del carbono en océanos, es posible que

---

<sup>4</sup>Se define en la página 27.

se haya afectado además de la capacidad de captación antes referida a los flujos naturales entre aire-mar de carbono [13].

El transporte neto de carbono al océano inferior por la solubilidad es representado por la proporción de  $C_m$  que se sumerge condicionado por la velocidad de intercambio del agua y el cambio en temperatura, el formalismo utilizado se muestra a continuación:

$$w_0(1 - w_T\Delta T)(C_m - C_{m_0}), \quad (3.4)$$

donde  $w_0$  es la velocidad a la que se intercambia el agua de la capa mixta con el océano profundo y  $w_T$  es la magnitud que cuantifica la reducción de la circulación de la reversión meridional del Atlántico (AMOC por sus siglas en inglés), el cual se espera que muy probablemente se debilite por el cambio climático futuro que favorecería el calentamiento de las aguas superficiales [14].

Por otro lado, la *bomba biológica* es el mecanismo generado por la biología marina, a través de la actividad fotosintética de algunos organismos como el fitoplancton, en el cual el  $\text{CO}_2$  extraído de la atmósfera se transforma en materia orgánica por la *NPP*, después se transfiere a otros organismos por medio de la cadena alimenticia o bien se hunde para formar sedimento que luego se convierte en depósitos de combustible fósil [52], almacenando así carbono en el fondo del océano por milenios; la bomba biológica es el mecanismo biológico de mayor relevancia para el almacenamiento de carbono por períodos de tiempo más extensos [8].

Se destaca que, aunque la actividad biológica de los océanos es afectada por *factores de estrés* como la temperatura, el potencial de hidrógeno (PH), oxígeno y la *NPP* [9], en este estudio se usa una expresión para el transporte de carbono por medio de la bomba biológica únicamente en términos de la variable  $\Delta T$ , mientras que los demás factores se involucran implícitamente mediante los parámetros  $B_0$  y  $B_T$ , como se muestra en la ecuación (3.5).

La tasa de carbono transportado fuera de la capa mixta del océano superior por la bomba biológica a las regiones del océano profundo está dada por

$$B(\Delta T) \equiv B_0(1 - B_T\Delta T), \quad (3.5)$$

en donde  $B_0$  denota la capacidad del carbono transportado por la bomba biológica en la época preindustrial

y  $B_T$  un parámetro que mide la dependencia de la bomba biológica a la temperatura  $T$ . También se prevé un debilitamiento de la bomba biológica por el cambio climático, en los aspectos referentes al descenso del PH medio de la superficie oceánica entre 0.3 – 0.4 de unidad para el año 2100 y la reducción de la producción primaria [9]. Entonces, considerando la ecuación (3.5) se obtiene la expresión

$$B_0(1 - B_T \Delta T) - B(0), \quad (3.6)$$

para delimitar el transporte de carbono de la capa mixta hasta el océano profundo desde la época preindustrial.

Para estimar el  $\text{CO}_2$  que se disuelve en el océano, sencillamente se puede estimar como la proporción  $\rho$  de la diferencia entre el carbono atmosférico y el disuelto en la capa superior mixta del océano. La siguiente expresión describe este proceso

$$\rho(C_a - p(C_m, \Delta T)), \quad (3.7)$$

en donde  $p$  se define como sigue

$$p(C_m, \Delta T) \equiv \frac{C_{a0}}{1 - D_T \Delta T} \left( \frac{C_m}{C_{m0}} \right)^r, \quad (3.8)$$

con  $D_T$  como la dependencia de la solubilidad del  $\text{CO}_2$  en el océano a la temperatura  $T$  y  $r$  es el *factor de Revelle*, que describe una razón de cambio entre el  $\text{CO}_2$  en contacto con las aguas superficiales del océano y el DIC, definido en [18] como sigue

$$r \equiv (\Delta \text{CO}_2 / \text{CO}_2) / (\Delta \text{DIC} / \text{DIC}).$$

En esta investigación el factor Revelle se asume constante, aunque en la práctica este factor tiene una baja magnitud en las aguas cálidas tropicales y subtropicales y un valor alto para las aguas frías de las latitudes altas, siendo estos en la actualidad aproximadamente una unidad mayor que en la época preindustrial [60].

En [45] se propone definir a la constante de proporcionalidad para la ecuación (3.7) como

$$\rho \equiv \frac{D_a C_{m0}}{r p(C_{m0}, 0)} = \frac{D}{r} \left( \frac{C_{m0}}{C_{a0}} \right), \quad (3.9)$$

tal que  $D_a$  es aproximadamente el tiempo requerido en años requerido para alcanzar la tasa de equilibrio entre el  $\text{CO}_2$  de la capa mixta del océano y la atmósfera.

Entonces, por (3.4), (3.6), (3.8) y (3.9) se obtiene la tasa de cambio de carbono en la capa mixta oceánica dada por

$$\frac{dC_m}{dt} = \frac{D_a C_{m_0}}{r p(C_{m_0}, 0)} (C_a - p(C_m, \Delta T)) - w_0 (1 - w_T \Delta T) (C_m - C_{m_0}) - B(\Delta T) + B(0), \quad (3.10)$$

en la expresión previa, no se consideró el carbono que es respirado en forma de carbono inorgánico debido a que es lo suficientemente pequeño, aproximadamente 3 PgC [45], como para tener un aporte significativo en la ecuación (3.10).

### 3.2.3. Dinámica del carbono en la atmósfera

Para determinar el carbono atmosférico se considera una variable auxiliar  $C_s$  que refiere el carbono total del sistema climático, tal que consta de las reservas de carbono en la capa mixta oceánica, la atmósfera y los suelos, entonces

$$C_s = C_a + C_t + C_m. \quad (3.11)$$

Sea  $e(t)$  la expresión que denota la emisión de carbono fósil producto de las actividades humanas. En esta investigación no se ha utilizado un formalismo analítico para  $e$ , en su lugar se han usado, como es usual, datos armonizados del promedio mundial de emisión medido en petagramos de carbono (PgC) por año. Los inventarios de carbono de donde se obtiene el promedio de las emisiones se construyen con mediciones *in situ*. Algunos indicadores del desarrollo económico del país, como el producto interno bruto (PIB), son utilizados para estimar las emisiones cuando no se cuenta con mediciones [24].

Se puede estimar el cambio que sufre  $C_s$  en el tiempo considerando la diferencia del carbono emitido a la atmósfera  $e(t)$  con el carbono absorbido en océanos especificado con las ecuaciones (3.4) y (3.6), entonces se obtiene

$$\frac{dC_s}{dt} = e(t) - w_0 (1 - w_T \Delta T) (C_m - C_{m_0}) - B(\Delta T) + B(0), \quad (3.12)$$

tal que  $C_{s_0} = C_{a_0} + C_{t_0} + C_{m_0}$ . Se destaca que  $C_s$  es afectado únicamente por el carbono que se introduce al ciclo por medio de la combustión fósil y el carbono que es expulsado del sistema al océano profundo. En consecuencia, el carbono terrestre no es considerado en la ecuación (3.12) puesto que, aunque existan intercambios naturales entre el carbono de los suelos y la atmósfera, este siempre permanece dentro del sistema. Derivando (3.11) con respecto al tiempo y sustituyendo las expresiones dadas en las ecuaciones (3.3), (3.10)

y (3.12) se obtiene la siguiente tasa de cambio el carbono en la atmósfera  $C_a$ :

$$\frac{dC_a}{dt} = e(t) - NPP_0(1 + K_c \log\left(\frac{C_a}{C_{a0}}\right)) + \frac{NPP_0}{C_{t0}} Q_R^{\Delta T/10} + LUC(t) - \frac{D_a C_{m0}}{r C_{a0}} (C_a - p(C_m, \Delta T)). \quad (3.13)$$

Para complementar las ecuaciones del flujo de  $C_t$ ,  $C_m$  y  $C_a$  se añade una ecuación que describe el cambio de temperatura para enmarcar el ciclo global del carbono en el contexto del cambio climático, debido a que, como se ha mencionado antes, el aumento de los niveles de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera induce un cambio en la temperatura media global de la superficie  $\Delta T$  [45].

La expresión utilizada para medir la tasa de cambio de la temperatura es propuesta en [43] y se define como sigue

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\lambda}{\log 2} \log\left(\frac{C_a}{C_{a0}}\right) - \Delta T \right), \quad (3.14)$$

donde  $\lambda$  representa la sensibilidad climática, es decir, define el aumento de temperatura en respuesta a una duplicación de los niveles de dióxido de carbono en la atmósfera y  $\tau$  es el retraso climático, esto es, el tiempo de respuesta requerido en la absorción de calor del océano.

Por lo tanto, haciendo algunas simplificaciones en (3.3), (3.10), (3.13) y (3.14) se obtiene el modelo del ciclo global del carbono y cambio de temperatura siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dC_t}{dt} &= \mathcal{F}_1(C_a, C_m, C_t, \Delta T) = A + B \log(C_a) + C Q_R^{\Delta T/10} C_t - LUC(t) \\ \frac{dC_m}{dt} &= \mathcal{F}_2(C_a, C_m, C_t, \Delta T) = D + E C_a - F \frac{(C_m/C_{m0})^r}{1 - D_T \Delta T} + G C_m + H C_m \Delta T - I \Delta T \\ \frac{dC_a}{dt} &= \mathcal{F}_3(C_a, C_m, C_t, \Delta T) = e(t) - A - B \log(C_a) - C Q_R^{\Delta T/10} C_t + F \frac{(C_m/C_{m0})^r}{1 - D_T \Delta T} - E C_a + LUC(t) \\ \frac{d\Delta T}{dt} &= \mathcal{F}_4(C_a, C_m, C_t, \Delta T) = J + K \log(C_a) + L \Delta T, \end{aligned} \quad (3.15)$$

tal que  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$  y  $L$  son coeficientes conocidos definidos así:

$$\begin{aligned} A &= NPP_0(1 - K_c \log(C_{a0})) & E &= \frac{D_a C_{m0}}{r C_{a0}} & I &= w_0 w_T C_{m0} - B_T B_0 \\ B &= K_c NPP_0 & F &= \frac{D_a C_{m0}}{r} & J &= -\frac{\lambda \log(C_{a0})}{\tau \log(2)} \\ C &= -\frac{NPP_0}{C_{t0}} & G &= -w_0 & K &= \frac{\lambda}{\tau \log(2)} \\ D &= w_0 C_{m0} & H &= w_0 w_T & L &= -\frac{1}{\tau}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3. Linealización

En esta sección se presenta una linealización del modelo definido por las ecuaciones (3.15) y (3.16) para luego hacer el estudio de estabilidad descrito en la sección siguiente; tanto la linealización como el análisis de estabilidad constituyen una contribución de esta investigación. Se encontró que el único punto estacionario del sistema es el punto inicial, es decir, con las magnitudes de los flujos de carbono estimados al año 1975. La metodología seguida para la linealización es descrita a continuación.

Para conocer el comportamiento del sistema alrededor de los puntos estacionarios se puede utilizar resultados teóricos que establecen que, aunque el modelo es descrito por ecuaciones diferenciales no lineales, alrededor de los puntos estacionarios el comportamiento es lineal [34]. La linealización se obtiene por medio del Jacobiano del sistema:

$$J(C_t, C_m, C_a, \Delta T) = \begin{pmatrix} CQ_R^{\Delta T/10} & 0 & \frac{B}{C_a} & \frac{C}{10} \log(Q_R)Q_R^{\Delta T/10} \\ 0 & rF\left(\frac{C_m}{C_{m_0}}\right)^{r-1} - \frac{rF\left(\frac{C_m}{C_{m_0}}\right)^r}{C_{m_0}(1-D_T\Delta T)} + G + H\Delta T & E & -\frac{D_T F\left(\frac{C_m}{C_{m_0}}\right)^r}{(1-D_T\Delta T)^2} + HC_m - I \\ -CQ_R^{\Delta T/10} & rF\left(\frac{C_m}{C_{m_0}}\right)^{r-1} & -\frac{B}{C_a} - E & \frac{D_T F\left(\frac{C_m}{C_{m_0}}\right)^r}{(1-D_T\Delta T)^2} - \frac{C}{10} \log(Q_R)Q_R^{\Delta T/10} \\ 0 & \frac{rF\left(\frac{C_m}{C_{m_0}}\right)^r}{C_{m_0}(1-D_T\Delta T)} & \frac{K}{C_a} & L \end{pmatrix}.$$

Tal como en [45] se consideran las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \begin{pmatrix} C_{t_0}, & C_{m_0}, & C_{a_0}, & \Delta T_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1875 \text{ PgC}, & 900 \text{ PgC}, & 589 \text{ PgC}, & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Los puntos estacionarios del modelo (3.15) son aquellos  $\hat{u}$  tal que  $F(\hat{u}) = 0$  con  $d\hat{u}/dt = F(\hat{u})$ , en este caso, se puede verificar que  $\mathbf{u}_0$  es un estacionario.

Resultados teóricos de sistemas dinámicos permiten obtener una caracterización del modelo por medio de su linealización alrededor de los puntos estacionarios [34]. En este caso, la linealización se consigue mediante:



$$J(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} -0.0293 & 0 & 0.0280 & -2.9828 \\ 0 & -1.1000 & 0.1222 & -0.6296 \\ 0.0293 & 1.0000 & -0.1503 & 6.0284 \\ 0 & 0 & 0.0011 & -0.2500 \end{pmatrix},$$

con los autovalores

$$\lambda^T = \left( -1.2181, \quad -0.0048, \quad -0.0426, \quad -0.2640 \right).$$

A partir del teorema de Hartman–Grobman<sup>5</sup> se sabe que existe un homeomorfismo para el sistema no lineal (3.15), tal que el comportamiento del sistema alrededor del estacionario  $\mathbf{u}_0$  es representado por su linealización. Por lo tanto, el sistema hiperbólico generado posee, en una vecindad lo suficientemente cercana, un sumidero en  $\mathbf{u}_0$ .

### 3.4. Análisis de estabilidad

Por los resultados obtenidos en la Sección 3.3 se sabe que el único punto estacionario del modelo está determinado por en los valores iniciales de las variables de estado, para ilustrar su estabilidad se han considerado perturbaciones de la forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \left( C_{t_0}, \quad C_{m_0}, \quad C_{a_0} + \epsilon, \quad \Delta T_0 \right).$$

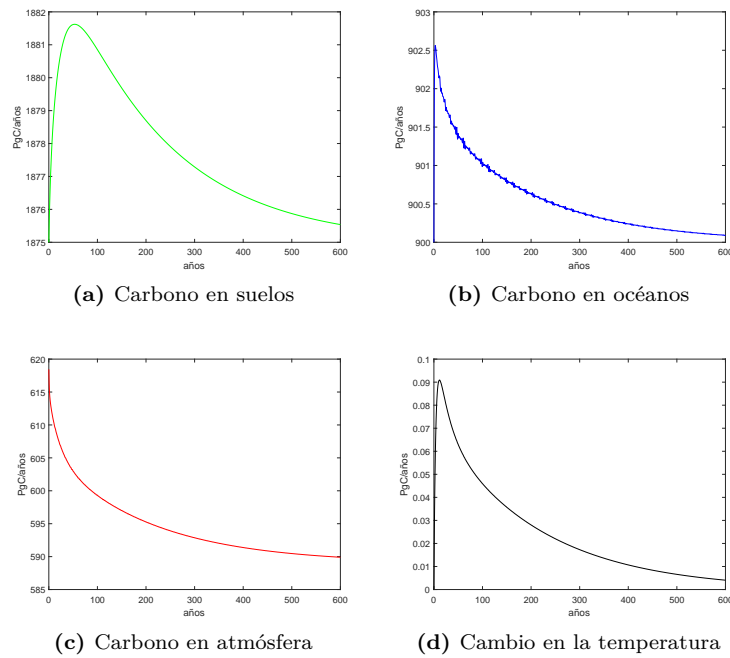
Diferentes valores de  $\epsilon$  fueron considerados para llevar a cabo las simulaciones, específicamente se seleccionaron valores que representan un porcentaje  $C_{a_0}$ ; se considera hacer una perturbación en esta variable, debido a que el único proceso que afecta el carbono total en el sistema climático es la emisión antropogénica de carbono en la atmósfera [45, 47].

En cuanto a la línea de tiempo, para la solución del sistema se contempló un rango de 600 años a partir del inicio de la era industrial, usualmente se ha fijado el año de 1975 como fecha inicial para estudios de la incidencia de la actividad antropogénica en el sistema climático.

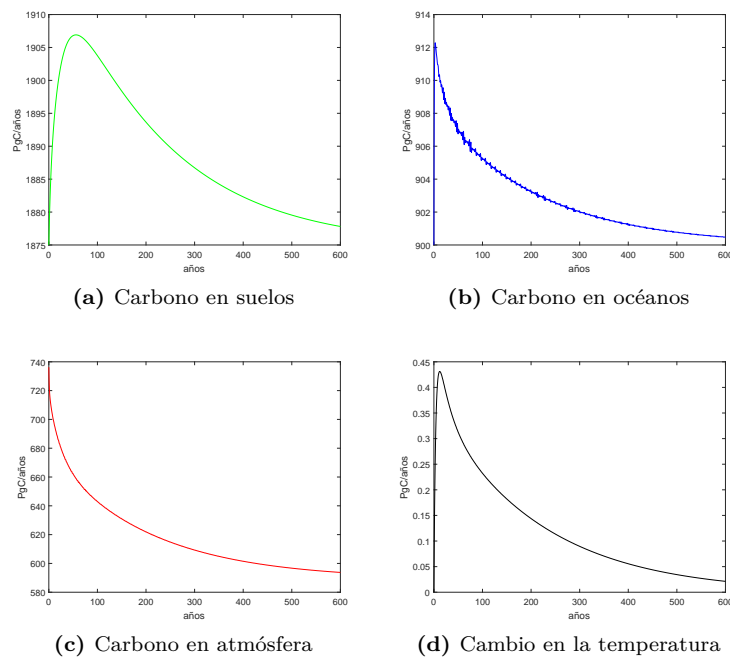
La Figura 3.1 y Figura 3.2<sup>6</sup> muestran el comportamiento del sistema (3.15) alrededor del punto estacionario para un aumento de 5% y 25% del carbono atmosférico respectivamente, tal como se espera, en

<sup>5</sup>Este teorema es descrito en la página 155 del libro *Nonlinear Dynamics and Chaos, with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* de Steven H. Strogatz.

<sup>6</sup>Esta figura y todas las demás que no refieren fuente son de elaboración propia.



**Figura 3.1** Simulación ciclo global de carbono y cambio temperatura para los próximos 600 años a partir del preindustrial, considerando un aumento del 5% en el carbono inicial de la atmósfera. Fuente: elaboración propia.



**Figura 3.2** Simulación ciclo global de carbono y cambio temperatura para los próximos 600 años a partir del preindustrial, considerando un aumento del 25% en el carbono inicial de la atmósfera.

ambas gráficas se muestra cómo los flujos de carbono y cambios de temperatura tienden a retornar al punto estacionario. Es muy destacable cómo un 25 % adicional de carbono en la atmósfera en relación al valor inicial, conduce a un incremento de más de 100 PgC del carbono atmosférico, resultando en un aumento de casi 450 % de la temperatura, lo que ratifica la profunda influencia de los GEI en el cambio climático.

### 3.5. Flujos y reservorios de carbono en el sistema

En esta sección se describe el proceso utilizado para encontrar estimaciones del flujo y cambios en los *stock*<sup>7</sup> de carbono global por medio del problema expresado con las ecuaciones (3.15) y coeficientes (3.16) y la condición inicial (3.17).

Se sabe que los océanos representan uno de los reservorios naturales más grandes para el almacenamiento de carbono [63], por lo cual su papel es fundamental en el ciclo global del carbono. En este sentido, la ecuación (3.10) no puede ser utilizada para estimar el stock completo de carbono en océanos debido a que mide únicamente el carbono contenido en la capa mixta superficial. Entonces, se define una nueva ecuación para medir el carbono total oceánico ( $C_M$ ), es decir, el carbono del océano profundo y la capa mixta superior, expresada en términos de  $C_m$  como sigue:

$$\Delta C_M = \Delta C_m + \int [w_0(1 - w_T \Delta T)(C_m - C_{m_0}) + B(\Delta T) - B(0)] dt. \quad (3.18)$$

Una aproximación de  $\Delta C_M$  a partir de la ecuación (3.18) es posible si se aproxima por series de Taylor  $C_m$  y  $\Delta T$ , así

$$C_m(t) \approx C_{m_0} + C'_m(0)t, \quad (3.19)$$

$$\Delta T(t) \approx \Delta T(0) + T'(0)t = T'(0)t. \quad (3.20)$$

Entonces, sustituyendo las aproximaciones para  $C_m$  y  $\Delta T$  dadas por las ecuaciones (3.19) y (3.20) respectivamente en la ecuación (3.18), usando la ecuación (3.5) e integrando en el intervalo  $[0, \hat{t}]$  se obtiene una estimación para el reservorio total de carbono en los océanos definida como sigue

$$\Delta C_M \approx \Delta C_m + w_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} w_T \Delta T \right) (C_m - C_{m_0}) \hat{t} - \frac{1}{2} B_0 B_T \Delta T \hat{t}. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, con el sistema de ecuaciones planteado en la Sección 3.2 para modelar los cambios a corto

<sup>7</sup>En el resto del documento se usará indistintamente la palabra reservorio o el anglicismo *stock* para denotar un sumidero de carbono.

plazo, es decir, en términos de años y décadas más no siglos, del ciclo del carbono, el modelo queda completamente determinado si se obtiene una expresión matemática para las emisiones por el uso del suelo  $LUC(t)$  y por combustión fósil  $e(t)$ . Debido a la relevancia de estas expresiones, es necesario hacer un análisis minucioso sobre la mejor manera de representar estos términos, para hacer correctamente estos planteamientos se debe abogar tanto al formalismo matemático como a la opinión de expertos.

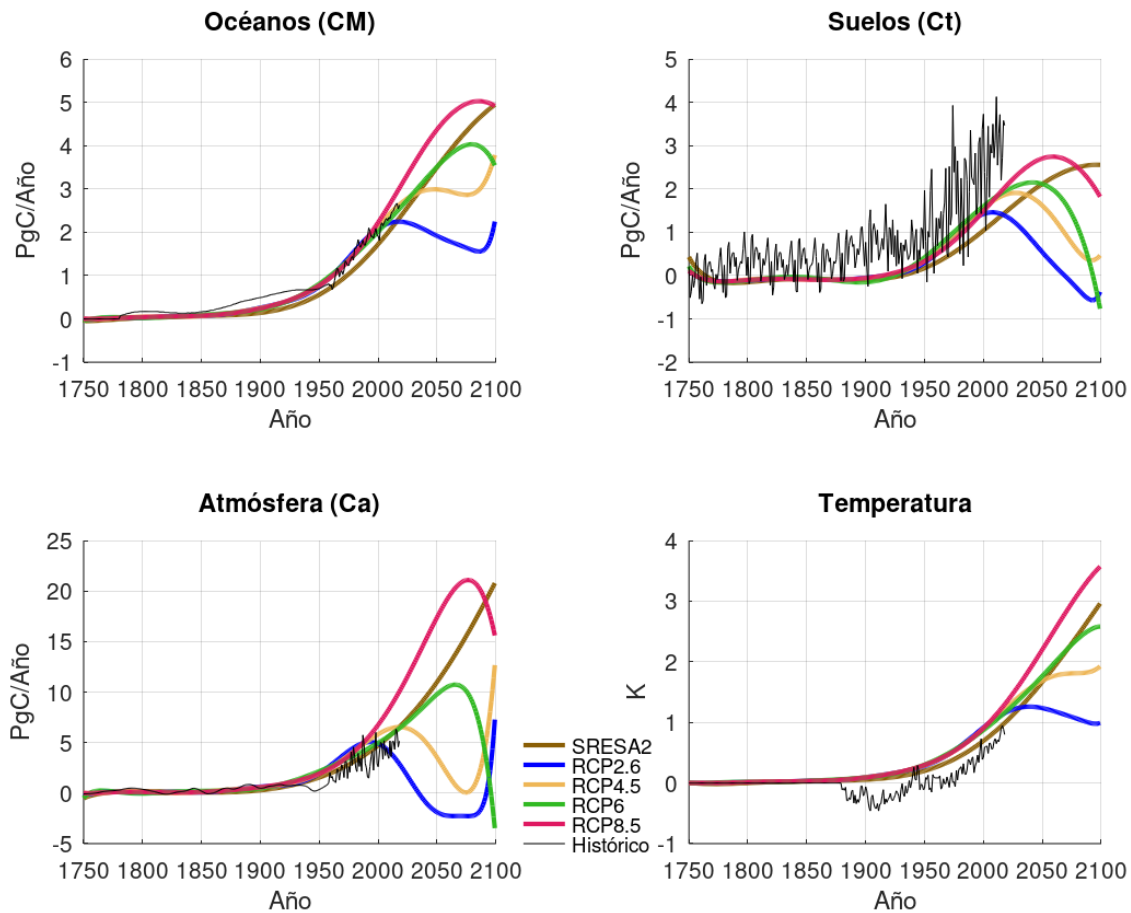
Una primera opción que se puede considerar es construir proyecciones de las emisiones tomando como referencia los datos históricos que se conocen tal que se extrapolen los datos hasta el año de interés. Sin embargo, este camino no es recomendado por los expertos porque no considera cambios que, según se estima, podrían ser determinantes, como el aumento demográfico, uso de nuevas tecnologías, vigencia de nuevas políticas, entre otros [17]. En este sentido, Pierre Friedlingstein en [21] establece categóricamente que *“no se puede simular el cambio climático futuro suponiendo que el  $CO_2$  atmosférico se pueda conocer, a priori, a partir de la trayectoria de las emisiones de  $CO_2$ ”*.

Una segunda opción consiste en utilizar escenarios de emisión contruidos a partir de diferentes modelos integrales del sistema climático, más detalles de estos escenarios se ofrecen en el Apéndice A. En esta investigación se siguió esta segunda estrategia para las funciones  $LUC(t)$  y  $e(t)$ , en particular, se utilizaron las cuatro trayectorias de concentración representativas (RCP en inglés) y el escenario A2 del Special Report on Emissions Scenarios (SRES) [56].

Las simulaciones obtenidas para los flujos y valores acumulados de carbono en los stocks hasta el año 2100 se muestran en la Figura 3.3 y Figura 3.4 respectivamente. En ambas simulaciones se considera el intercambio total de carbono en el océano ( $C_M$ ), esto es, entre el océano de la capa mixta superior ( $C_m$ ) con el océano profundo. Las representaciones consideran emisiones por combustión de carbono fósil  $e(t)$  y por el uso de la tierra  $LUC(t)$  basadas en los escenarios RCP de la base de datos del *RCP Scenario data group* del sitio web del Instituto Potsdam para la Investigación sobre el Impacto del Cambio Climático (PIK por sus siglas en alemán). Además, se incluye una curva basada en el escenario de emisión SRES A2, las emisiones suscritas a esta trayectoria se tomaron del sitio web del *Data Distribution Centre* (DDC) del IPCC. Los datos históricos armonizados del flujo de carbono en océanos, suelos y atmósfera se tomaron del sitio web del *Integrated Carbon Observation System* (ICOS) del Global Carbon Project, mientras que los datos históricos de temperatura se tomaron del sitio web del *National Center for Environmental Information* (NOAA) <sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>El último acceso al sitio web del PIK, DDC, ICOS y NOAA fue en octubre de 2020.



**Figura 3.3** Simulación de los flujos de carbono y cambio en temperatura desde el preindustrial hasta el año 2100.

La figura 3.3 muestra los flujos de carbono en PgC por año y los cambios de temperatura en  $K$  según los escenarios de emisión usados y los datos de referencia históricos. Es notable cómo las mayores disparidades se presentan a partir del año 2050, excepto para el carbono en atmósfera, donde hay diferencias significativas desde los primeros años del siglo XXI debido a que este reservorio es el más variable en permanencia y concentración de carbono. Las disparidades en los flujos radican en los escenarios de emisión; con la trayectoria de mitigación RCP 2.6 se concibe alcanzar la *carbono neutralidad* en el año 2050, lo que supone que a partir de ese año el balance entre las emisiones de carbono y su almacenamiento sea cero, mientras que en el resto de escenarios se plantea un aumento de las emisiones con diferentes niveles de intensidad, tal como se muestra en las ilustraciones.

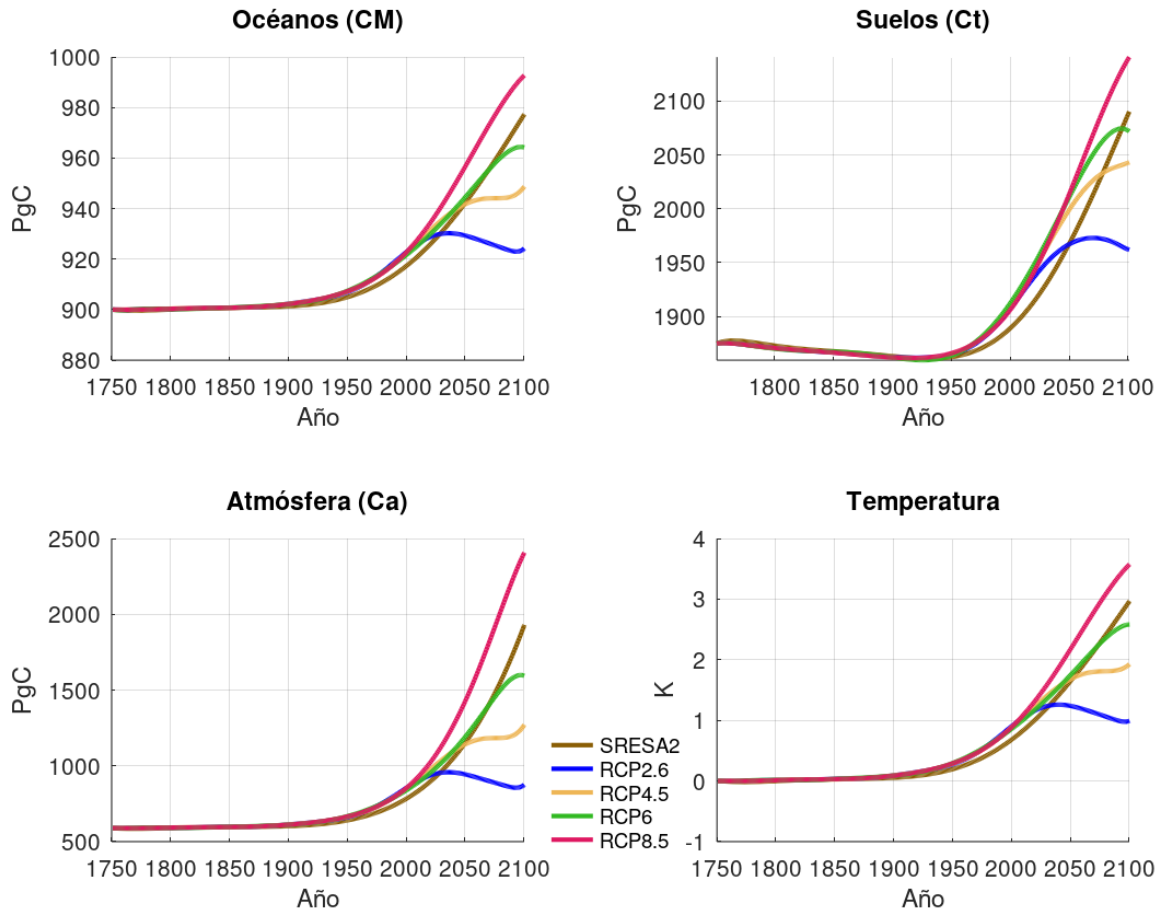
Con respecto al cambio de temperatura, que suele ser uno de los indicativos primarios del cambio climático, con todos los escenarios graficados en la Figura 3.3 se proyecta un aumento de esta, pero el escenario RCP 8.5 de altas emisiones contempla el mayor incremento de temperatura, alrededor de  $4 K$ . Las curvas que representan el cambio de temperatura correspondientes a los escenarios RCP 2.6 y RCP 4.5 son las únicas que sitúan un aumento por debajo de los  $2 K$ , umbral que ha sido establecido por convenios internacionales, como el Acuerdo de París, para limitar el cambio climático y sus riesgos.

Como punto de comparación con otras publicaciones científicas en este campo, en el AR5 del IPCC se proyecta que probablemente la temperatura media mundial aumente para el año 2100 en los siguientes rangos en unidades  $K$ :  $[0.3, 1.7]$  con el RCP 2.6;  $[1.1, 2.6]$  con el RCP 4.5;  $[1.4, 3.1]$  bajo el RCP 6; y,  $[2.6, 4.8]$  considerando el RCP 8.5 según se establece en [36]. Es fácil corroborar que todas las estimaciones para el cambio de temperatura mostradas en la Figura 3.3 preservan los rangos previamente indicados. En cuanto a las aproximaciones realizadas para los flujos de carbono bajo los diferentes escenarios RCP, las curvas de la Figura 3.3 presentan los mismos comportamientos de las simulaciones mostradas en [45], estimaciones considerando el escenario SRES no son incluidas en [45], tales aproximaciones son un aporte de esta investigación.

Los datos históricos de referencia utilizados se ajustan relativamente bien a la simulación del modelo en casi todas las variables de estado, exceptuando los suelos, en este caso no hay una concordancia más precisa porque los datos históricos para el flujo de carbono terrestre fluctúan considerablemente. Si bien también existen anomalías significativas de la temperatura, las curvas de aproximación de la Figura 3.3 se ajustan más debido a que las fluctuaciones no son muy grandes, específicamente de menos de  $1 K$ .

La figura 3.4 muestra el stock acumulado de carbono en PgC y el cambio de temperatura. Estas curvas permiten visualizar cuánto carbono se habrá almacenado en los reservorios para el año 2100. Es notable cómo en la atmósfera se presenta el aumento más grande en el stock de carbono en comparación con los suelos y los océanos, no es extraño este comportamiento puesto que todos los intercambios de carbono se relacionan con el carbono atmosférico, además las emisiones de carbono por combustión fósil y por el uso del suelo se dirigen directamente a este reservorio. Este considerable aumento de carbono en atmósfera constituye otro hecho alarmante en la comunidad internacional debido al efecto invernadero del  $\text{CO}_2$  atmosférico. Las curvas para el cambio de temperatura son exactamente las mismas a las mostradas en la Figura 3.3.

Para finalizar, es preciso destacar que si bien es matemáticamente factible hacer proyecciones para fechas



**Figura 3.4** Simulación del almacenamiento de carbono en los reservorios de su ciclo global y cambio en temperatura desde el preindustrial hasta el año 2100.

posteriores al año 2100, se ha considerado limitar las estimaciones hasta ese año porque algunos procesos y valores de parámetros acarrear mayores incertidumbres a partir de ahí; en apoyo a lo anterior, se destaca que originalmente los escenarios RCP se construyeron hasta el año 2100 para estimar el comportamiento del sistema climático en el siglo XXI y no para atender problemas posteriores [52]; entonces, una extrapolación simplista que no contemple todos los cuidados correspondientes al intervalo de operación de los valores de parámetros y mecanismos considerados podría no brindar resultados aceptables.

## Capítulo 4

# Modelo con términos de difusión e información espacial

Con el propósito de determinar el efecto de la forma en que se distribuyen espacialmente las emisiones de carbono en los procesos de retroalimentación, en este capítulo se modifica el modelo definido por las ecuaciones (3.15) y (3.16). La modificación se hace agregando una componente espacial en todas las variables de estado y añadiendo términos de difusión no nulos para tres de sus cuatro ecuaciones, donde se exceptúa la ecuación del flujo de carbono en suelos. La inclusión de la componente difusiva y la variable espacial se describe en las Secciones 4.1 y 4.2 respectivamente. Para determinar el efecto de los términos de difusión en el sistema, en la Sección 4.3 se hace un análisis de inestabilidad de Turing del modelo modificado enfocado en la composición atmosférica. La metodología utilizada para encontrar la solución de la nueva configuración del modelo utilizando el MEF se presenta en la Sección 4.4, también se incluyen algunas gráficas de los cambios aproximados en los flujos de carbono y temperatura a partir de diferentes RCP.

### 4.1. Inclusión de términos de difusión

Es natural considerar que la concentración de un gas podría fluctuar naturalmente en una región, por ejemplo el  $\text{CO}_2$  en la atmósfera de la Tierra. Así mismo esta concentración podría variar en la superficie del océano o en las capas profundas que constituyen enormes sumideros de  $\text{CO}_2$  del sistema climático [36]. Por otra parte, no puede resultar difícil suponer que variaciones en la temperatura debido a diferentes agentes, como cambios en la concentración de ciertos GEI, son naturales en el sistema climático, por lo cual pueden contemplarse como *agentes difusores* de calor que propician las referidas variaciones [31].



Bajo las consideraciones previas, se sustenta incluir términos de difusión no nulos para las ecuaciones referentes al  $\text{CO}_2$  en los océanos, atmósfera y temperatura, más no en suelos. Por lo tanto, el modelo (3.15) con difusión se define así

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{u}) + \delta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de las variables  $C_t, C_m, C_a$  y  $\Delta T$ ,  $\mathcal{F}$  comprende las funciones  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$ , y  $\delta$  es la matriz diagonal de los coeficientes de difusión tal que  $\delta_1 = 0$  mientras que  $0 < \delta_i$  para  $i = 2, 3, 4$ . Se sugiere revisar la Sección 2.1 para más detalles en cuanto a la inclusión de términos de difusión como los incorporados en la ecuación (4.1).

Se justifica tomar el coeficiente de difusión del  $\text{CO}_2$  en suelos como nulo debido a que, si bien en la superficie terrestre se dan cambios, estos no son significativos en escalas de tiempo que no sean a largo plazo, es decir, millones de años [50], además cambios importantes como los generados por el uso del suelo se contemplan en este caso en  $\delta_4$ , el término de difusión de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera.

La inclusión de la componente de difusión en el modelo es un aporte novedoso de este trabajo, cuyo objetivo es medir los efectos de la distribución espacial de las emisiones de carbono. Como esta inclusión es pionera en el estudio de las retroalimentaciones, no hay literatura que ofrezca magnitudes para los coeficientes de difusión obtenidos mediante procedimientos y calibraciones reales, por lo cual los valores utilizados persiguen fines ilustrativos y no se tomaron de un estudio concreto.

## 4.2. Inclusión de dependencia espacial

Además de la inclusión de términos de difusión en (3.15) presentados en la sección anterior, se ha incorporado información espacial para el análisis de la retroalimentación del carbono. De esta manera, las funciones  $C_t, C_m, C_a$  y  $\Delta T$  dependientes de una única variable temporal, también dependerán del espacio, esto es  $C_a = C_a(t, x)$ ,  $C_t = C_t(t, x)$ ,  $C_m = C_m(t, x)$  y  $\Delta T = \Delta T(t, x)$ . Entonces, el modelo considerado para el análisis de coeficientes de retroalimentación de carbono queda definido así

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial t} &= \mathcal{F}_1 \\ \frac{\partial C_m}{\partial t} &= \mathcal{F}_2 + \delta_2 \nabla^2 C_m \\ \frac{\partial C_a}{\partial t} &= \mathcal{F}_3 + \delta_3 \nabla^2 C_a \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial t} &= \mathcal{F}_4 + \delta_4 \nabla^2 \Delta T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

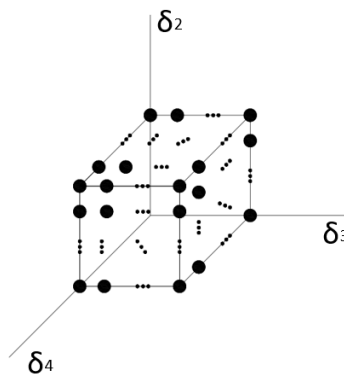
conservando los valores de las constantes conocidas presentadas en (3.16).

Una interpretación de la inclusión de la variable espacial unidimensional consiste en considerar que se está modelando el ciclo del carbono alrededor de un meridiano de la Tierra, es decir, a lo largo de una línea paralela a la línea ecuatorial.

### 4.3. Análisis de inestabilidad de Turing para el modelo

En esta sección se describe el procedimiento y los resultados obtenidos en el análisis de inestabilidad del modelo extendido (4.1). El propósito que persigue hacer este análisis consiste en determinar si el término de difusión genera inestabilidad. A continuación se indican algunas consideraciones que detallan el procedimiento:

- i. Debido a la complejidad que representa hacer un estudio analítico de la inestabilidad de Turing del modelo (4.1) el análisis se hizo numéricamente por medio del software libre Python.
- ii. Los valores de los coeficientes de difusión,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_4$ , no tienen un sustento experimental en este análisis; en este contexto, los parámetros se contemplaron haciendo un mapeo equidistante en una región positiva de  $\mathbb{R}^3$ , como se muestra en la siguiente figura.

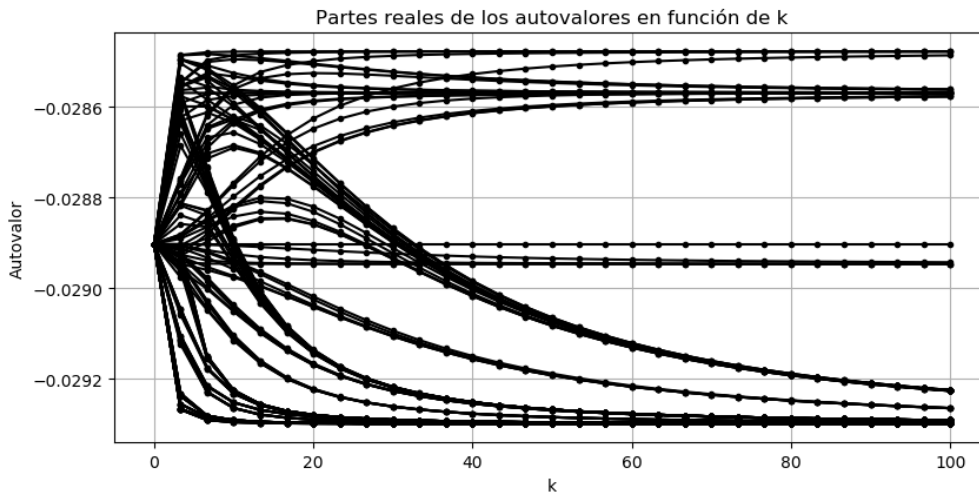


**Figura 4.1** Esquema para la selección de los coeficientes de difusión

- iii. La metodología realizada, en términos generales, fue así: primero, se selecciona una tripleta para los coeficientes de difusión  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_4$  del mapeo indicado en el inciso anterior. Después, se toma un dominio discreto de valores para el autovalor  $k$  de (2.7) y con ayuda de un método numérico se encuentra la máxima parte real de las raíces de (2.8), en este punto se debe tener presente que si alguna de estas

raíces tiene parte real positiva entonces se daría lugar a la inestabilidad de Turing. Finalmente, con el conjunto de valores discretos de  $k$  y sus respectivas máximas partes reales se forma una curva que puede ser representada en el plano, tal que permita acotar su comportamiento en alguna región en específico.

En la Figura 4.2 se muestran las curvas para las diferentes triadas seleccionadas de la Figura 4.1. Como se puede apreciar dichas curvas se ubican en una región donde su rango es negativo, lo cual indica que en ninguno de los casos considerados se presenta la inestabilidad de Turing para el sistema (4.1). Por lo tanto, se afirma que en este modelo no se presenta una inestabilidad de Turing en base al experimento realizado y la continuidad de los parámetros considerados.



**Figura 4.2** Distribución de la parte real de los autovalores del polinomio característico del modelo con términos de difusión

#### 4.4. Estimación de la solución usando el método de elemento finito

En esta sección se brinda una breve descripción del MEF utilizado para encontrar las soluciones aproximadas del modelo definido en (4.2). Concretamente se desea aproximar una función  $c(x, t)$  en el dominio  $[a, b] \times [0, T]$  a través de un espacio finito de funciones  $\mathcal{F}$ , esto es:

$$c|_{\Omega_j}(x, t) \approx \sum_{i=1}^n c_i(t)\phi_i(x),$$

donde  $\{\phi_i\}$  representa la base del espacio  $\mathcal{F}$ , los elementos  $\Omega_i$  son tales que  $\Omega_1 = [x_1, x_2]$ ,  $\Omega_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$  para  $i = 2, \dots, n-1$  y  $\Omega_n = [x_{n-1}, x_n]$ , en donde  $x_1 = a$ ,  $x_i = x_{i-1} + h$  y  $x_n = b$ . Se define  $h = (b-a)/(n-1)$ .

La ecuación diferencial parcial del modelo tiene la forma:

$$c_t = F(c, t) + \delta c_{xx}. \quad (4.3)$$

Como es usual, se escribe la forma débil del problema (4.3):

$$\int_a^b v c_t dx = \int_a^b v F(c, t) dx + \delta \left[ v c_x|_{[a,b]} - \int_a^b v_x c_x dx \right], \quad (4.4)$$

donde la función  $v$  pertenece al espacio de funciones  $\mathcal{F}$ . Además se asumirá que  $c_x(a, t) = c_x(b, t) = 0$ , de esta forma  $v c_x|_{[a,b]} = 0$ ; la ecuación (4.4) se puede escribir como:

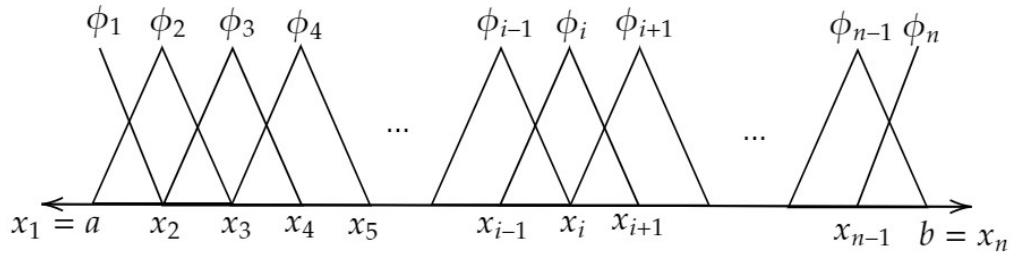
$$\int_a^b v c_t dx = \int_a^b v F(c, t) dx - \delta \int_a^b v_x c_x dx.$$

Si se sustituye  $c$  por su aproximación y  $v$  por una función de la base de  $\phi_k$  se obtiene lo siguiente:

$$\int_a^b \phi_k \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} c_i \phi_i dx = \int_a^b \phi_k F\left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i, t\right) dx - \delta \int_a^b \phi_k' \sum_{i=1}^n c_i \phi_i' dx,$$

y por propiedades de la integral se sigue que

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b \phi_k \phi_i \frac{d}{dt} c_i dx = \int_a^b \phi_k F\left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i, t\right) dx - \delta \sum_{i=1}^n \int_a^b c_i \phi_k' \phi_i' dx.$$



**Figura 4.3** Caracterización de las funciones base lineales del método de elemento finito.

Considerando funciones base como las representadas en la Figura 4.3, se llega a la igualdad:

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} \int_a^b \phi_k \phi_i \frac{d}{dt} c_i dx = \int_a^b \phi_k F\left(\sum_{i=k-1}^{k+1} c_i \phi_i, t\right) dx - \delta \sum_{i=k-1}^{k+1} \int_a^b c_i \phi_k' \phi_i' dx. \quad (4.5)$$

A modo de ilustración se puede observar que si  $k = 1$  en la ecuación (4.5) se obtiene

$$c'_1 \int_a^b \phi_1 \phi_1 dx + c'_2 \int_a^b \phi_1 \phi_2 dx = \int_a^b \phi_1 F(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2, t) dx - \delta (c_1 \int_a^b \phi'_1 \phi'_1 dx + c_2 \int_a^b \phi'_1 \phi'_2 dx) \quad (4.6)$$

Haciendo un desarrollo similar al presentado en la ecuación (4.6) y agrupando términos, se puede probar que la ecuación (4.5) se puede escribir como el siguiente sistema:

$$A \frac{dC}{dt} = -\frac{\delta}{h^2} BC + \frac{1}{h} \bar{F}(C, t), \quad (4.7)$$

donde:

$A$ : Es una matriz tridiagonal compuesta por los vectores  $d_c, d_l$

$d_c = [1/3, 2/3, \dots, 2/3, 1/3] \in \mathbb{R}^n$ , diagonal central.

$d_l = [1/6, 1/6, \dots, 1/6] \in \mathbb{R}^{n-1}$ , diagonal lateral.

$B$ : Es una matriz tridiagonal compuesta por los vectores  $D_c, D_l$

$D_c = [1, 2, \dots, 2, 1] \in \mathbb{R}^n$ , diagonal central.

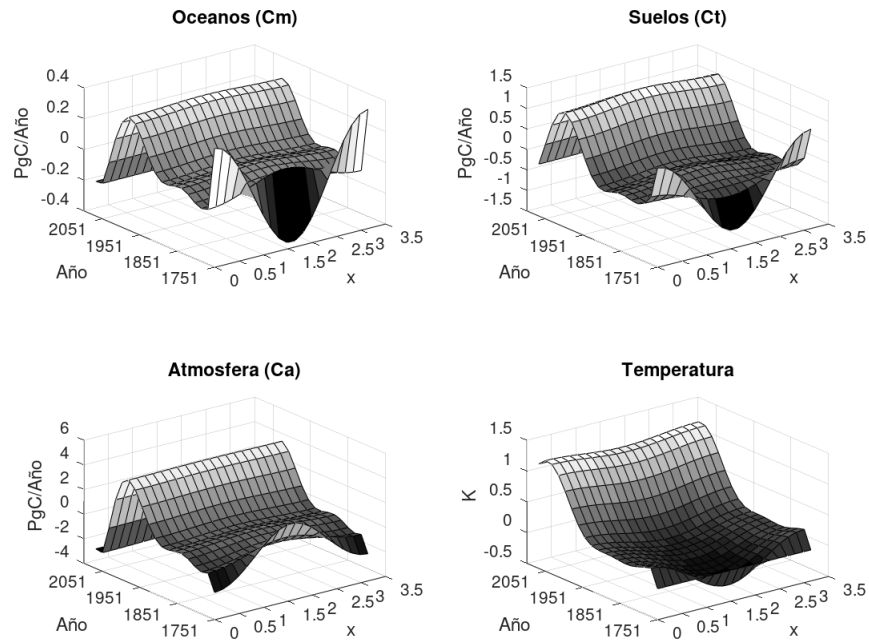
$D_l = [-1, -1, \dots, -1] \in \mathbb{R}^{n-1}$ , diagonal lateral.

$C = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)]^T$ .

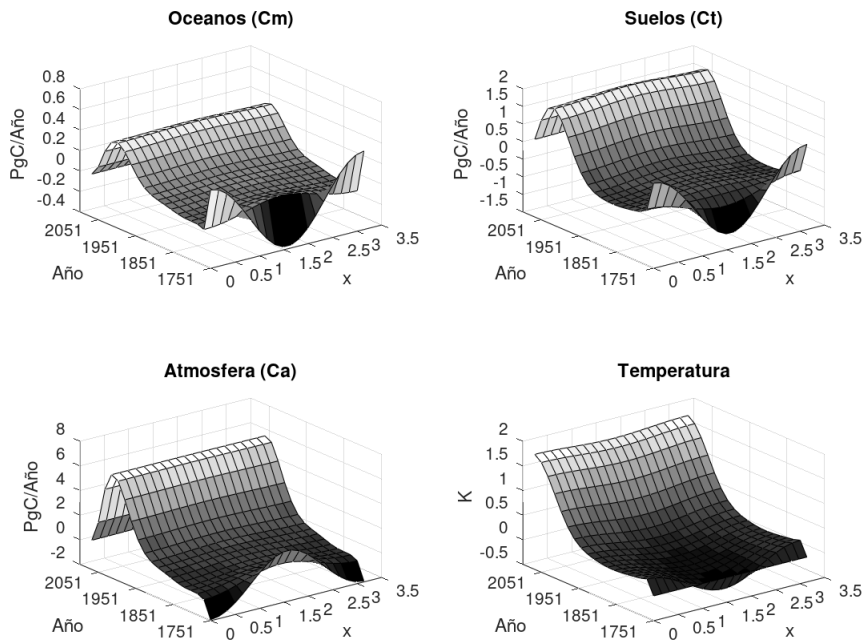
$$\bar{F}(C, t) = \left[ \int_a^b \phi_1 F\left(\sum_{i=1}^2 c_i \phi_i, t\right) dx, \dots, \int_a^b \phi_n F\left(\sum_{i=n-1}^n c_i \phi_i, t\right) dx \right]^T.$$

El sistema (4.7) es un problema de valor inicial, por lo tanto resta resolver este sistema para poder conocer la solución aproximada a la ecuación (4.4).

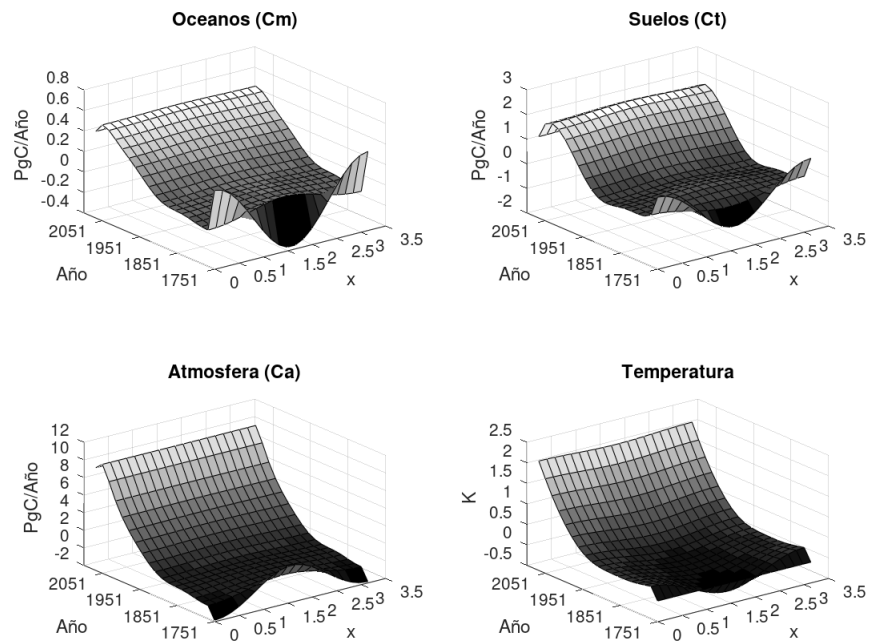
En las Figuras 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 se pueden apreciar las soluciones del sistema con difusión (4.2), es decir cambios en los flujos de carbono entre reservorios y la temperatura, usando el método de elemento finito que se explicó en la parte de arriba. En todas las figuras se ha fijado los parámetros de la siguiente forma:  $a = 0$ ,  $b = \pi$ ,  $C_m(x, 0) = C_{m_0}$ ,  $C_a(x, 0) = C_{a_0} + 100 \cos(2x)$ ,  $C_t(x, 0) = C_{t_0}$ ,  $\Delta t(x, 0) = 0$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 10^{-3}$ . Se puede apreciar en las superficies un comportamiento similar al reflejado por las curvas del flujo de carbono y temperatura de [45], además de esto, también se refleja la perturbación introducida por el término trigonométrico en la condición inicial del carbono en atmósfera. Considerar una perturbación en  $C_a$  se sustenta en los mismos motivos que se discutieron en la Sección 3.4.



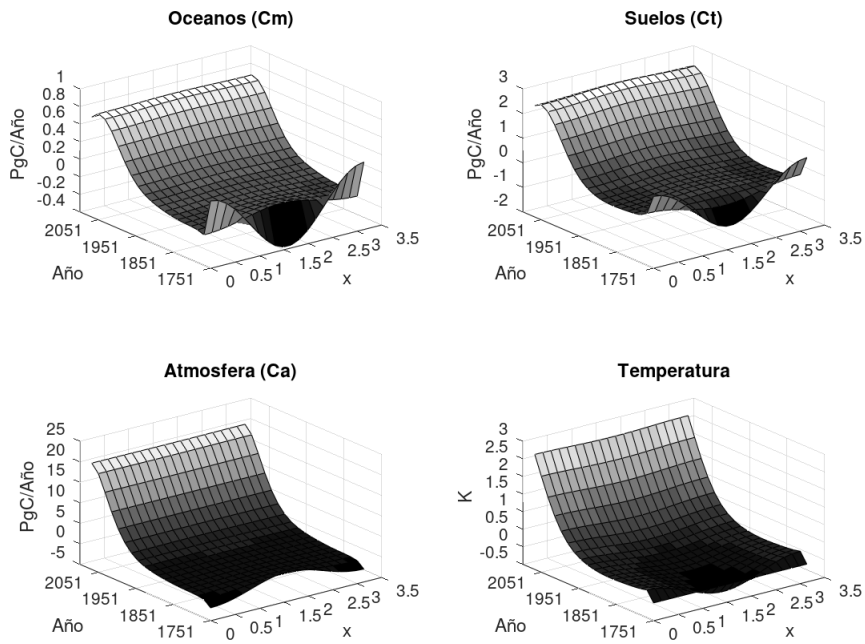
**Figura 4.4** Flujos de carbono y cambio de temperatura considerando espacio y difusión para el escenario RCP2.6 en el período 1750-2100.



**Figura 4.5** Flujos de carbono y cambio de temperatura considerando espacio y difusión para el escenario RCP4.5 en el período 1750-2100.



**Figura 4.6** Flujos de carbono y cambio de temperatura considerando espacio y difusión para el escenario RCP6.0 en el período 1750-2100.



**Figura 4.7** Flujos de carbono y cambio de temperatura considerando espacio y difusión para el escenario RCP8.5 en el período 1750-2100.

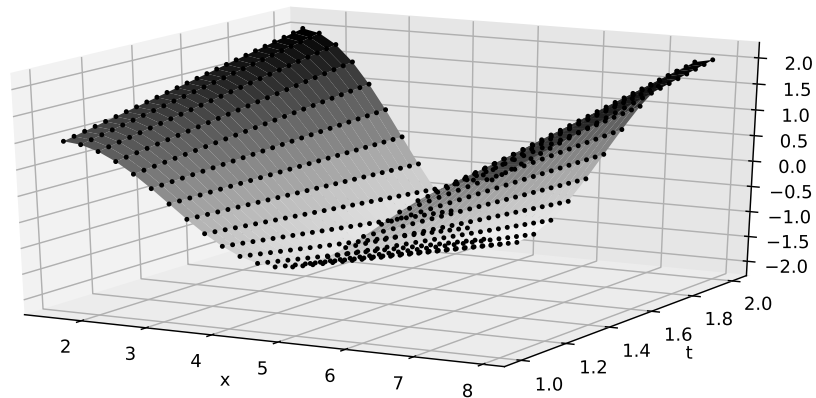
### Validación del código para el MEF

Como observación final, para garantizar buenas aproximaciones obtenidas con el código implementado para el MEF se realizó una validación. La comprobación se efectuó por medio del siguiente problema de referencia

$$\left\{ \begin{array}{l} F(c, t) = \frac{c(1 + \delta t)}{t} \\ c(1, x) = \sin(x) \\ c_x(\pi/2, t) = c_x(5\pi/2, t) = 0 \\ (x, t) \in [\pi/2, 5\pi/2] \times [1, 2], \end{array} \right. \quad (4.8)$$

cuya solución exacta es  $c(t, x) = t \sin(x)$ .

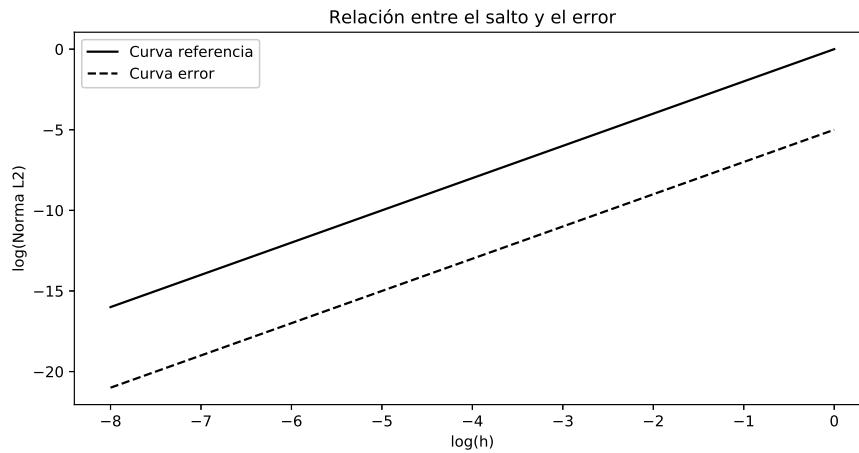
En la Figura 4.8 se presenta una aproximación de la solución al problema, se puede apreciar que la aproximación de la solución dada por la superficie está visiblemente conteniendo a los puntos negros que constituyen la solución exacta.



**Figura 4.8** Superficie de aproximación de la solución del problema de referencia con el código implementado. Los puntos representan los valores exactos de la solución analítica.

Para ratificar completamente el funcionamiento del código implementado se llevó a cabo un experimento de convergencia. Se sabe que el orden de aproximación del MEF con funciones base lineales es 2 [39]. Con esta información y dado que se conoce la solución real, se obtuvo la Figura 4.9 con el propósito de verificar que se satisface la cota de error del método.





**Figura 4.9** Comportamiento del logaritmo del error en contraste con el logaritmo del salto (tamaño de paso). Los saltos en el espacio son tales que  $\Delta x \in \{\pi/2^{-i} | i = 2, \dots, 9\}$ , mientras que el tamaño de paso en el tiempo es fijo y está dado por  $\Delta t = 1/100$ .

La línea continua en la Figura 4.9 representa la ecuación  $y = 2 \log_2(\Delta x)$  y la línea intermitente representa la gráfica de los puntos de  $(\log_2(\Delta x), \log_2(\epsilon(\Delta x)))$ , en donde  $\epsilon(\Delta x)$  es el error calculado utilizando la norma  $L_2$  para cada salto  $\Delta x$ , en [39] se establece también que si la convergencia existe estas dos curvas deben ser paralelas, lo cual es claramente visible.

## Capítulo 5

# Análisis de retroalimentación

En este capítulo se presenta un análisis de las retroalimentaciones del ciclo global del carbono cuando existe inhomogeneidad espacial de las emisiones de este elemento. Para completar el análisis, en la Sección 5.1 se definen los bucles de retroalimentación y su impacto proyectado en el cambio climático. Se destaca que todos los procesos de retroalimentación se configuran con respecto al aporte que hacen al carbono atmosférico, esta característica en común se impone debido a que se estima que la concentración de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera constituye uno de los factores que más podría afectar el clima en los próximos años [23]. Después, en la Sección 5.2 se presentan el tipo de métricas utilizadas y el procedimiento seguido para el cómputo de los coeficientes de retroalimentación. Para finalizar, en la Sección 5.3 se muestran algunas simulaciones que ilustran cómo la distribución espacial de las emisiones de carbono tiene un efecto en los coeficientes de retroalimentación, con esto se comprueba que considerar la estructura espacial de las perturbaciones de carbono es necesario cuando se cuantifica el ciclo del carbono y el cambio climático.

### 5.1. Retroalimentación del ciclo del carbono

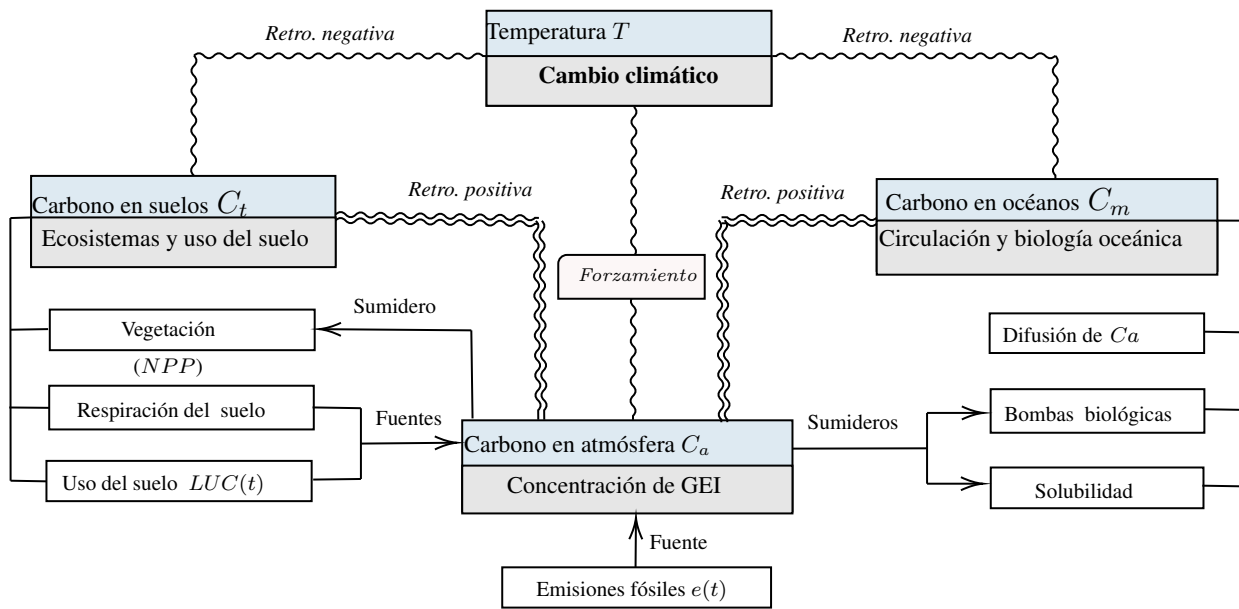
Cambios en el sistema climático inducen modificaciones en procesos y ciclos geofísicos y biogeoquímicos que pueden reforzar o amortiguar el aumento de la temperatura media mundial [36, 46]. Dentro de los procesos geofísicos más influyentes en el sistema climático se encuentran cambios en el vapor de agua, que constituye el principal GEI, nubes y el albedo del hielo marino, mientras que en el marco de los procesos biogeoquímicos más relevantes a escalas de tiempo de interés de décadas, se ubican los cambios en las fuentes y sumideros de GEI, cambios en el albedo y transpiración de la vegetación [32].

En este contexto, se entiende por *forzamiento climático*, o simplemente *forzamiento*, a algún proceso ex-

terno al clima que puede impulsar el calentamiento o enfriamiento del sistema; son ejemplos de forzamientos artificiales o antropogénicos la emisión de GEI y los efectos por el uso del suelo, en contraparte, las erupciones volcánicas constituyen un forzamiento natural [18, 33], este forzamiento es radiativo cuando promueve cambios directos de energía, más detalles pueden ser consultados en el Apéndice A. El término *retroalimentación* (*feedback* en inglés) se usa para denotar procesos internos del sistema climático que amplifican o amortiguan la respuesta térmica a un cambio inicial; existen diferentes componentes en el sistema climático que se retroalimentan, se destacan: el vapor de agua, las nubes y el albedo de la superficie de la Tierra. Se teoriza que el cambio climático no es más que la respuesta del sistema climático a cambios en los forzamientos o en las retroalimentaciones [61].

Los bucles de retroalimentación del ciclo biogeoquímico del carbono suelen agruparse en dos categorías importantes: los referidos a los mecanismos de concentración de carbono tales que miden cómo el almacenamiento de carbono en suelos/océanos cambia conforme cambia la concentración atmosférica de carbono; y, los centrados en los mecanismos asociados al clima que evalúan cómo cambian estos almacenamientos ante cambios en el clima [13, 72]. A su vez, los dos mecanismos de retroalimentación antes mencionados se pueden dividir en dos procesos más cada uno conforme a su región de operación [21], así:

- i. *Bucle de retroalimentación de la concentración carbono-suelo*: en este ciclo de retroalimentación se suscribe el intercambio de carbono entre la atmósfera y los suelos, en el modelo está determinado por  $C_a$  y  $C_t$ . A medida que aumenta la concentración de carbono en la atmósfera, también incrementa su captación debido al efecto de fertilización del  $\text{CO}_2$  en los productores primarios [51, 70], por lo que se reduce la concentración de  $\text{CO}_2$  atmosférico.
- ii. *Bucle de retroalimentación de la concentración carbono-océano*: este proceso se materializa por el intercambio de carbono entre la atmósfera y el océano, en el modelo lo definen las variables  $C_a$  y  $C_M$ . Con el aumento del carbono atmosférico se aumenta su disolución en las aguas superficiales, a su vez, el carbono es transportado a la profundidad del océano por diferentes procesos físico-químicos y biológicos, lo que conduce a la reducción de la concentración del  $\text{CO}_2$  en la atmósfera [45, 58].
- iii. *Bucle de retroalimentación de carbono terrestre-clima*: este bucle está determinado por los intercambios de carbono entre suelos y atmósfera junto con los cambios en el clima, dentro del modelo lo definen las variables  $\Delta T$ ,  $C_t$  y  $C_a$ . El ciclo se configura así: el aumento de la concentración del  $\text{CO}_2$  en la atmósfera conlleva un aumento de la temperatura por el efecto invernadero [36], con el referido incremento



**Figura 5.1** Diagrama de los bucles de retroalimentación del ciclo global del carbono junto con las variables y los procesos incluidos en el modelo. Se abrevia la palabra retroalimentación con *Retro.*

se benefician procesos que aumentan la emisión de carbono terrestre como la respiración del suelo, induciendo de nuevo un aumento del carbono atmosférico [22].

- iv. *Bucle de retroalimentación de carbono oceánico-clima:* este bucle está definido por los cambios en el clima y los intercambios de carbono entre océanos y atmósfera, en el modelo las variables que interceden en el ciclo son  $\Delta T$ ,  $C_M$  y  $C_a$ . El bucle de retroalimentación de carbono se basa en cómo las temperaturas más altas generalmente inducen un debilitamiento de los mecanismos de absorción de carbono de los océanos como la solubilidad [9], consecuentemente con la reducción de la captación de carbono se provoca un aumento del  $\text{CO}_2$  en la atmósfera [45].

La Figura 5.1 muestra un diagrama de los 4 bucles de retroalimentación y su relación con las variables del modelo presentado en el Capítulo 3 de este trabajo, además se indican cuáles son las fuentes o sumideros considerados en este estudio.

Usualmente se asigna un signo a los bucles de retroalimentación, a fin de calificar fácilmente si el proceso amortigua (*retroalimentación negativa*) o amplifica (*retroalimentación positiva*) el cambio climático. Las retroalimentaciones de la concentración de carbono terrestre y oceánica generalmente son negativas [13, 22, 51] y las retroalimentaciones del carbono-clima en suelos y océanos suelen ser positivas [29, 72]; sin embargo, aunque las retroalimentaciones primeras son negativas, son ampliamente inciertas [23], especialmente las que

incluyen procesos presentes en la biósfera terrestre [72] debido, principalmente, a su rápida modificación.

En los bucles de retroalimentación que incluyen los suelos existen incertidumbres relacionadas a la efectividad de la *NPP* ante cambios de temperatura, la producción neta de un ecosistema, cambios en los flujos de carbono terrestre debido al ciclo hidrológico de sistemas acuáticos temporales, cambios masivos en la distribución de diferentes ecosistemas como los ocasionados por la deforestación y los incendios forestales [46] y la ausencia de componentes del propio bucle, como suele ocurrir con el stock de carbono del permafrost [21].

En cuanto a los bucles de retroalimentación que consideran el océano existen incertezas respecto a los mecanismos y tiempos de circulación oceánica [18], en los diferentes procesos de transporte del carbono y nutrientes al océano profundo, en el ciclo biológico marino del carbono, en la respuesta a la acidificación de los océanos de la biota marina [72], entre otros.

Además de las incertidumbres en los procesos intrínsecos que actúan en los mecanismos de retroalimentación, también se presentan incertidumbres asociadas a las emisiones y concentraciones de  $\text{CO}_2$  que promueven incertidumbres en las proyecciones climáticas a largo plazo [25], el cambio del signo de la retroalimentación conforme a la escala y distribución espacial considerada [13], la magnitud de la tasa de cambio de algunos procesos, etc.

Otras dificultades en el estudio de las retroalimentaciones son las características propias de su naturaleza, puesto que son procesos no medibles ni observables directamente [21], ambivalentes, no separables, con diferentes escalas espacio-temporales [61] y dependientes de los escenarios emisiones de  $\text{CO}_2$  [13].

El estudio de las retroalimentaciones de carbono es importante porque modelos desarrollados recientemente, como los del CMIP5, sugieren que es probable que estas desempeñen un papel fundamental en la captación atmosférica de  $\text{CO}_2$  en las próximas décadas [22, 36, 61]. Específicamente, considerando los resultados de modelos del clima que acoplan el ciclo del carbono, se ha logrado estimar que debido a las retroalimentaciones la eficiencia de la tierra y el océano para absorber el  $\text{CO}_2$  atmosférico se ve reducida, amplificando así el efecto invernadero [13, 46]. Entonces, el estudio de los coeficientes de retroalimentación, por su importancia en el sistema climático, es bien justificado más no simple.

En este contexto, se dice que un agente que impulsa cambios en el ciclo del carbono es de naturaleza

*reversible* si dicho agente incrementa o decrementa periódicamente, mientras que es *irreversible* cuando para que se den cambios en la dirección opuesta se necesita, al menos, varios siglos. En gran medida, el estudio de las retroalimentaciones del ciclo del carbono se ve estimulado por la necesidad de cuantificar cambios irreversibles, y con ello potenciales repercusiones dañinas para el desarrollo socioeconómico y los activos naturales de la humanidad.

## 5.2. Cómputo de los coeficientes de retroalimentación

En esta sección se muestra cómo se calcularon los coeficientes de retroalimentación del modelo presentado en el sistema (4.2). Las ideas centrales para el cómputo de la ganancia de carbono en cuatro de los principales bucles de retroalimentación del ciclo del carbono mostrados en la Figura 5.1 proceden de [45]; otras métricas existentes para cuantificar la intensidad de las retroalimentaciones del ciclo global del carbono se presentan en el Apéndice A.

Los coeficientes estudiados en esta investigación se sintetizan en la Tabla 5.1, todos los valores se estiman en el estado de equilibrio, excepto en el océano total ( $C_M$ ), para los cuales un estado de equilibrio debería ser medido en escalas temporales muy grandes, ya que su ciclo de circulación dura varias centurias [61], consiguientemente, constituye un margen de tiempo que no es aplicable a la naturaleza del modelo que mide cambios en los flujos de carbono para años y décadas.

Otro coeficiente que suele utilizarse por su comodidad en la interpretación y que se define a partir de la ganancia de retroalimentación es el *factor de retroalimentación* ( $F$ ), tal que

$$F_x \equiv \frac{1}{1 - g_x},$$

donde  $g_x$  denota cualesquiera de las ganancias descritas en la Tabla 5.1, de tal forma que  $F_x$  puede representar al factor de retroalimentación de los dos bucles de concentración: carbono-suelos ( $F_L$ ) y carbono-océanos ( $F_O$ ); o bien al factor de retroalimentación de los bucles de carbono terrestre-clima ( $F_{TL}$ ) y océanos-clima ( $F_{OL}$ ).

Es claro que la forma de medición propuesta en la Tabla 5.1 solo es aplicable al modelo (3.15) descrito en el Capítulo 3, más no para la nueva configuración del modelo que incluye una variable espacial, presentado en el Capítulo 4. La estrategia seguida consiste en tomar una derivada direccional más general, en este caso la

**Tabla 5.1** Resumen de los coeficientes de retroalimentación utilizados. El asterisco (\*) denota que la valoración se hace en el estado de equilibrio del modelo, excepto en océanos. La letra  $T$  representa la temperatura y  $C_M$  denota el carbono total del océano, incluyendo el carbono en el océano profundo. La forma de medición indicada en la última columna de la tabla fue propuesta por Lade et al. en [45].

Bucle	Nombre del coeficiente	Notación	Forma de medición	
	Ganancia de la retroalimentación de la concentración de carbono-suelos	$g_L^*$	$\frac{\partial C_t^*}{\partial C_a} \frac{\partial C_a^*}{\partial C_t}$	
	Factor de retroalimentación de la concentración de carbono-suelos	$F_L^*$	$\frac{1}{1 - g_L^*}$	
	Concentración de carbono	Ganancia de la retroalimentación de la concentración de carbono-océanos	$g_O^*$	$\frac{\partial C_M}{\partial C_a} \frac{\partial C_a^*}{\partial C_M}$
		Factor de retroalimentación de la concentración de carbono-océanos	$F_O^*$	$\frac{1}{1 - g_O^*}$
Carbono-clima	Sensibilidad del carbono en suelos al CO <sub>2</sub> atmosférico	$\beta_L^*$	$\frac{\partial C_t^*}{\partial C_a}$	
	Sensibilidad del carbono en océanos al CO <sub>2</sub> atmosférico	$\beta_O^*$	$\frac{\partial C_M}{\partial C_a}$	
	Ganancia de la retroalimentación carbono terrestre-clima	$g_{TL}^*$	$\frac{\partial C_t^*}{\partial T} \frac{\partial T^*}{\partial C_a} \frac{\partial C_a^*}{\partial C_t}$	
	Factor de retroalimentación carbono terrestre-clima	$F_{TL}^*$	$\frac{1}{1 - F_{TL}^*}$	
	Ganancia de la retroalimentación carbono océanos-clima	$g_{TO}^*$	$\frac{\partial C_M}{\partial T} \frac{\partial T^*}{\partial C_a} \frac{\partial C_a^*}{\partial C_M}$	
	Factor de retroalimentación carbono océanos-clima	$F_{TO}^*$	$\frac{1}{1 - F_{TO}^*}$	
	Sensibilidad del carbono en suelos al clima	$\gamma_L^*$	$\frac{\partial C_t^*}{\partial T}$	
	Sensibilidad del carbono en océanos al clima	$\gamma_O^*$	$\frac{\partial C_M}{\partial T}$	

derivada de Gâteaux, pero antes se realiza una linealización de las ecuaciones en equilibrio del modelo (4.2).

Las nuevas ecuaciones obtenidas se muestran a continuación.

- i. Ecuación linealizada para el flujo de carbono en suelos

$$C_{a_0} C_{t_0} \log Q_R \Delta T + 10 C_{t_0} K_c (C_{a_0} - C_a) + 10 C_{a_0} (C_t - C_{t_0}) = 0. \quad (5.1)$$

- ii. Ecuación linealizada para el flujo de carbono del océano

$$(C_{m_0} - C_m) w_0 + ((C_{m_0} - C_m) r + (C_a / C_{a_0} - 1) C_{m_0}) D_a - C_{m_0} D_a \Delta T D_T + B_0 B_T \Delta T + \delta_2 \frac{d^2 C_m}{dx^2} = 0. \quad (5.2)$$

iii. Ecuación linealizada para el flujo de carbono en la atmósfera

$$A_0 + A_1 \Delta T + A_2 C_m - A_3^2 C_a + A_4 C_t + \delta_3^2 \frac{d^2 C_a}{dx^2} = 0, \quad (5.3)$$

donde

$$A_0 = (1 - r)C_{m_0}D_a + (K_c - 1)NPP_0,$$

$$A_1 = NPP_0 \log(Q_R)/10 + C_{m_0}D_a D_T,$$

$$A_2 = D_a r,$$

$$A_3 = \sqrt{K_c NPP_0 + C_{m_0} D_a} / \sqrt{C_{a_0}}$$

$$A_4 = NPP_0 / C_{t_0}.$$

iv. Ecuación linealizada para el cambio de la temperatura

$$\frac{C_a \lambda}{\log 2 C_{a_0} \tau} - \frac{\lambda}{\log 2 \tau} - \frac{D_T}{\tau} + \delta_4 \frac{d^2 \Delta T}{dx^2} = 0. \quad (5.4)$$

Como se desea calcular las derivadas de la Tabla 5.1 para cuantificar la sensibilidad del cambio de carbono, se ocupa resolver la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden definidas en las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4), para esto se puede notar que, haciendo algunas agrupaciones y operaciones algebraicas básicas, es posible reescribir estas ecuaciones tal que conserven la siguiente forma:

$$a^2 y''(x) - b^2 y(x) + cf(x) + g(x) = 0, \quad (5.5)$$

en donde  $y$  podría representar  $C_m$ ,  $C_a$  o bien  $\Delta T$  según sea el caso.

La solución de la EDO definida en (5.5) es

$$y = e^{-\frac{bx}{a}} \int^x \frac{e^{\frac{bt}{a}} (cf(t) + g(t))}{2ab} dt - e^{\frac{bx}{a}} \int^x \frac{e^{-\frac{bt}{a}} (cf(t) + g(t))}{2ab} dt + k_1 e^{\frac{bt}{a}} + k_2 e^{-\frac{bt}{a}},$$

tal que  $k_1$  y  $k_2$  denotan las constantes de la solución homogénea de la ecuación diferencial (5.5).

Entonces, la derivada de la función  $y$  con respecto a  $f$  en la dirección de  $\eta$  por medio de derivadas de Gâteaux descrita en el Capítulo 2 es



$$\begin{aligned}
\frac{\delta y}{\delta f}[\eta] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ e^{-\frac{bx}{a}} \int_0^x \frac{e^{\frac{bt}{a}} (c(f(t) + \epsilon\eta(t)) + g(t))}{2ab} dt \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{bx}{a}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{bt}{a}} (c(f(t) + \epsilon\eta(t)) + g(t))}{2ab} dt + k_1 e^{\frac{bx}{a}} + k_2 e^{-\frac{bx}{a}} \right\} dx \\
&= \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ e^{-\frac{bx}{a}} \int_0^x \frac{ce^{\frac{bt}{a}} \eta(t)}{2ab} dt - e^{\frac{bx}{a}} \int_0^x \frac{ce^{-\frac{bt}{a}} \eta(t)}{2ab} dt \right\} dx \\
&= \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^x \frac{c \operatorname{senh}(b(t-x)/a) \eta(t)}{ab} dt dx \\
&= \frac{c}{abL} \int_0^L \int_0^x \operatorname{senh}(b(t-x)/a) \eta(t) dt dx.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Para contrastar el cálculo de las derivadas funcionales con el análogo a las derivadas parciales requeridas para determinar los coeficientes de retroalimentación de la Tabla 5.1 cuando no existe influencia de la difusión, primero se debe atender la naturaleza de la función  $\eta$ , que viene a jugar un papel similar al de vector director en el cálculo de la derivada direccional.

Como es bien conocido, el vector director tiene la restricción de tener norma uno, entonces se propone una restricción similar a la que se hace en el caso del cálculo de la derivada direccional, esta restricción se expresa a continuación:

$$\frac{1}{L} \int_0^L \eta(t) dt = 1. \tag{5.7}$$

Tomando en cuenta la restricción (5.7), es posible medir la diferencia entre las derivadas parciales encontradas por Lade et al. en [45] y las calculadas en este trabajo, con el siguiente procedimiento: primero, se calcula la derivada parcial  $\partial y / \partial f$  en la ecuación sin difusión con linealización incluida, esta derivada es  $\partial y / \partial f = c/b^2$ ; después, se calcula la razón entre la derivada funcional, que naturalmente tendría la influencia de la difusión, y la derivada parcial que se explicó antes. Con este procedimiento, se tendría una medida de la influencia de la inclusión de la difusión, llámese a este factor de diferencia  $\bar{\xi}$ , es tal que:

$$\bar{\xi} \equiv \frac{\delta y}{\delta f(x)}[\eta(x)] / \frac{c}{b^2} = \frac{b}{aL} \int_0^L \int_0^x \sinh\left(\frac{b(t-x)}{a}\right) \eta(t) dt dx.$$

Una propiedad muy importante de  $\bar{\xi}$  es que cuando se hace variar la función  $\eta$ , se observa que si hace tender  $a$  a cero, se tiene que  $\bar{\xi}$  tiende a uno, lo cual es coherente cuando la ecuación tiende al problema sin difusión. Aunque no se tiene un resultado general para cualquier función, si se puede probar que para cualquier polinomio con media uno esta propiedad se sostiene.

Por simplicidad, se define  $\delta y/\delta f[\eta]$  para el caso en que  $\eta$  tiene promedio diferente de 1 de la siguiente forma:

$$\frac{\delta y}{\delta f}[\eta] = \frac{\frac{c}{abL} \int_0^L \int^x \sinh(b(t-x)/a) \eta(t) dt dx}{\frac{1}{L} \int_0^L \eta(t) dt}. \quad (5.8)$$

Por lo tanto, utilizando (5.8) es posible encontrar algunas de las derivadas necesarias para definir los coeficientes para la ganancia y la sensibilidad mostrados en la Tabla 5.1, se destaca el caso especial de la ecuación (5.1) en donde la derivada parcial requerida coincide con la derivada funcional (5.8) por la ausencia de difusión.

Algunas de las derivadas funcionales necesarias para los coeficientes de difusión se muestran a continuación:

$$\frac{\delta C_t}{\delta C_a}[\cos(nx)] = \beta_L^* = \frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\delta C_t}{\delta \Delta T}[\cos(nx)] = \gamma_L^* = -\frac{\log Q_R C_{t_0}}{10}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\delta \Delta T}{\delta C_a}[\cos(nx)] = \frac{\lambda}{\log 2 C_{a_0} \delta_4 n^2 \tau + \log 2 C_{a_0}}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\delta C_m}{\delta C_a}[\cos(nx)] = \frac{D_a C_{m_0}}{C_{a_0} w_0 + D_a C_{a_0} r + C_{a_0} \delta_2 n^2}, \quad (5.12)$$

$$\frac{\delta C_m}{\delta \Delta T}[\cos(nx)] = -\frac{D_a D_T C_{m_0} - B_0 B_T}{w_0 + D_a r + \delta_2 n^2}. \quad (5.13)$$

Para las derivadas que competen a  $C_a$  se utiliza la ecuación (3.11) del balance de masas de carbono, de esta manera se obtiene que:

$$\frac{\delta C_a}{\delta C_t}[\cos(nx)] = \frac{\delta C_M}{\delta \Delta T}[\cos(nx)] = -1. \quad (5.14)$$

Como observación adicional, se puede notar que los coeficientes de la Tabla 5.1 se estiman considerando el carbono total del océano ( $C_M$ ) y no únicamente el carbono de la capa mixta superficial ( $C_m$ ); por lo tanto, algunos ajustes son necesarios para poder utilizar las ecuaciones (5.12) y (5.13).

Para satisfacer la demanda de cuantificar el contenido de carbono profundo se propone utilizar y linealizar

por series de Taylor la estimación de  $C_M$  dada por la ecuación (3.21), de modo que se obtiene

$$\Delta C_M \approx -\frac{(\hat{t}w_0 + 2)}{2} C_{m_0} + \frac{(\hat{t}w_0 + 2)}{2} C_m - \frac{(\hat{t}B_o B_T)}{2} \Delta T. \quad (5.15)$$

Entonces, a partir de la ecuación (5.15),

$$\frac{1}{L} \int_0^L \Delta C_M dx \approx -\frac{(\hat{t}w_0 + 2)}{2} C_{m_0} + \frac{(\hat{t}w_0 + 2)}{2L} \int_0^L C_m dx - \frac{(\hat{t}B_o B_T)}{2L} \int_0^L \Delta T dx.$$

Con la expresión anterior, se puede obtener los coeficientes de sensibilidad para el océano total. De esta manera, el coeficiente de sensibilidad del carbono en océanos a cambios en el clima se define con la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma_O^* &= \frac{\delta C_M}{\delta \Delta T} [\eta] = \frac{(\hat{t}w_0 + 2)}{2L} \frac{\delta C_m}{\delta \Delta T} - \frac{(\hat{t}B_o B_T)}{2L} \int_0^L \eta(x) dx \\ &= -\frac{(D_a D_T c_{m_0} (\hat{t}w_0 + 2) + B_o B_T ((D_a r + \delta_2 n^2) \hat{t} - 2)) \lambda}{2 (w_0 + D_a r + \delta_2 n^2)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por su parte, el coeficiente de sensibilidad del carbono en océanos al  $\text{CO}_2$  queda determinado así:

$$\beta_O^* = \frac{\delta C_M}{\delta C_a} [\eta] = \frac{(\hat{t}w_0 + 2)}{2L} \frac{\delta C_m}{\delta C_a} = \frac{D_a C_{m_0} (\hat{t}w_0 + 2)}{2 C_{m_0} (w_0 + D_a r + \delta_2 n^2)}. \quad (5.17)$$

Entonces, los coeficientes de ganancia se pueden definir usando de las expresiones de las ecuaciones (5.9), (5.10), (5.11), (5.14), (5.16) y (5.17), las expresiones encontradas se muestran seguidamente.

i. Ganancia de la retroalimentación de la concentración de carbono-suelos:

$$g_L^* = -\frac{K_c C_{t0}}{C_{a0}}. \quad (5.18)$$

ii. Ganancia de la retroalimentación de la concentración de carbono-océanos:

$$g_O^* = -\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t}w_0 + 2)}{2 C_{a0} (w_0 + D_a r + \delta_2 n^2)}. \quad (5.19)$$

iii. Ganancia de la retroalimentación carbono terrestre-clima

$$g_{TL}^* = -\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t}w_0 + 2)}{2 C_{a0} (w_0 + D_a r + \delta_2 n^2)}. \quad (5.20)$$

iv. Ganancia de la retroalimentación carbono océanos-clima

$$g_{TO}^* = \frac{(D_a D_T c m_0 (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T ((D_a r + \delta_2 n^2) \hat{t} - 2)) \lambda}{2 \log 2 C_{a_0} (\delta_4 n^2 \tau + 1) (w_0 + D_a r + \delta_2 n^2)}. \quad (5.21)$$

Se puede notar con las ecuaciones (5.19), (5.20) y (5.21) que las medidas de ganancia de retroalimentación de carbono dependen de la difusión ( $\delta_2$  y  $\delta_4$ ). En este sentido, en el inciso ii. se muestra que el coeficiente  $g_O^*$  está determinado por  $\delta_2$  así como  $g_{TL}^*$  del inciso iii., mientras que el coeficiente  $g_{TO}^*$  mostrado en el inciso iv. es afectado por  $\delta_2$  y  $\delta_4$ . Se exceptúa de esta condición la ganancia de la retroalimentación de la concentración de carbono-suelos ( $g_L^*$ ) debido a que nunca se consideró difusión no nula en esta componente.

### 5.3. Estimaciones numéricas

En esta sección se presentan algunas gráficas que ilustran el comportamiento del factor de retroalimentación y el coeficiente de sensibilidad para el modelo presentado en el Capítulo 4, donde se incluye información espacial y términos de difusión.

En las gráficas se ilustran los coeficientes de retroalimentación para diferentes valores de  $n$  de la función de prueba  $\eta = \cos(nx)$ . Además, se han considerado cuatro valores para el coeficiente de difusión (1e-1=0.1, 1e-2=0.01, 1e-3=0.001 y 1e-4=0.0001) sin interpretación física, tales que  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ , mientras  $\delta_1 = 0$  debido a que no se concibe como un proceso natural la existencia de un ente de difusión de carbono en los reservorios terrestres en escalas temporales acordes al modelo.

#### Factor y ganancia de retroalimentación

En lo que se refiere a los factores de retroalimentación ( $F_x$ ), la Figura 5.2 muestra el factor de retroalimentación para la concentración de carbono-océanos obtenido con la ganancia  $g_O^*$ , por su parte la Figura 5.3 y la Figura 5.4 representan los factores de retroalimentación del clima en suelos y océanos a partir de los coeficientes de ganancia  $g_{TL}^*$  y  $g_{TO}^*$  respectivamente. Para el factor de retroalimentación de la concentración de carbono-suelos no se ha incluido una gráfica debido a la naturaleza constante de ese término, no siendo así en todas las demás expresiones analíticas encontradas para las ganancias de los bucles restantes.

Con la Tabla 5.2 se pueden comparar los factores de retroalimentación mostrados en las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4 cuando  $n = 0$  con los presentados en [72] y [45]. Se puede notar cómo a medida que la difusión decrece,

**Tabla 5.2** Valores numéricos simulados y de referencia para el factor de retroalimentación en el modelo sin difusión ni información espacial. La abreviatura Concent. indica concentración.

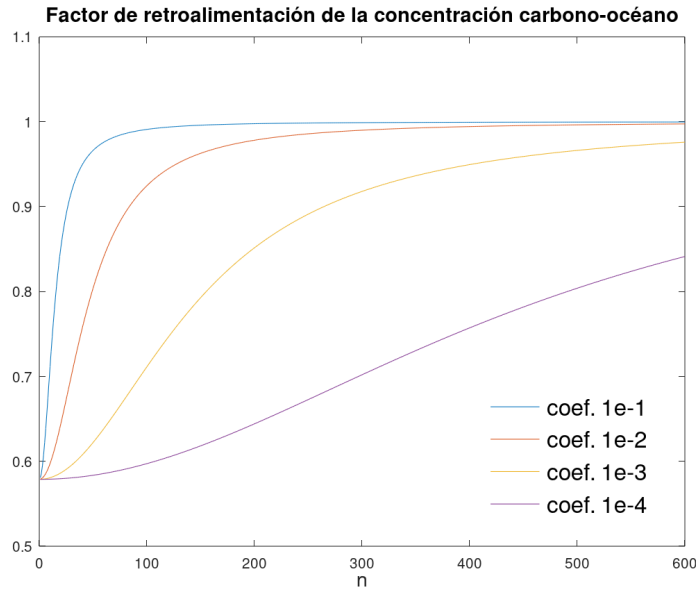
Bucle	Factor	Valores obtenidos		Valores de referencia en el año 2100	
		Preindustrial	Año 2100	Zickfeld et al. [72]	Lade et al. [45]
Concent.-suelos	$F_L^*$	0.51151	0.80276	0.66	0.80
Concent.-océanos	$F_O^*$	0.62065	0.83266	0.71	0.73
Clima-suelos	$F_{TL}^*$	1.81266	1.18583	1.25	1.15
Clima-océanos	$F_{TO}^*$	1.20813	1.09616	1.22	1.10

los valores de los coeficientes en el modelo con difusión también tienden a los valores del modelo sin difusión.

Debido a que los factores de retroalimentación intentan estimar el balance energético futuro del sistema climático, el signo que tome cada factor es importante porque indica si la retroalimentación amplifica el cambio climático ( $F_x > 1$ ) o lo amortigua ( $F_x < 1$ ) [72]. En concordancia con lo descrito en la Sección 5.2, se observa con las expresiones analíticas y sus respectivas gráficas cómo los bucles de retroalimentación del carbono-clima refuerzan el cambio climático, mientras las retroalimentaciones de la concentración de carbono lo mitigan.

El efecto de la inhomogeneidad espacial de carbono en el factor de retroalimentación es apreciable a partir de los cambios de  $n$  en el eje horizontal de las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4, considerados como *cantidad de impulsos de concentración de carbono*. En este sentido, el factor conserva cambios muy significativos cuando hay menos impulsos que representan una distribución más marcada de la concentración de carbono, mientras que los valores se hacen más cercanos cuando hay más impulsos que homogenizan la distribución. Se puede corroborar que todas las figuras de las simulaciones numéricas del factor de retroalimentación evidencian la influencia que ejerce la distribución espacial no uniforme del carbono.

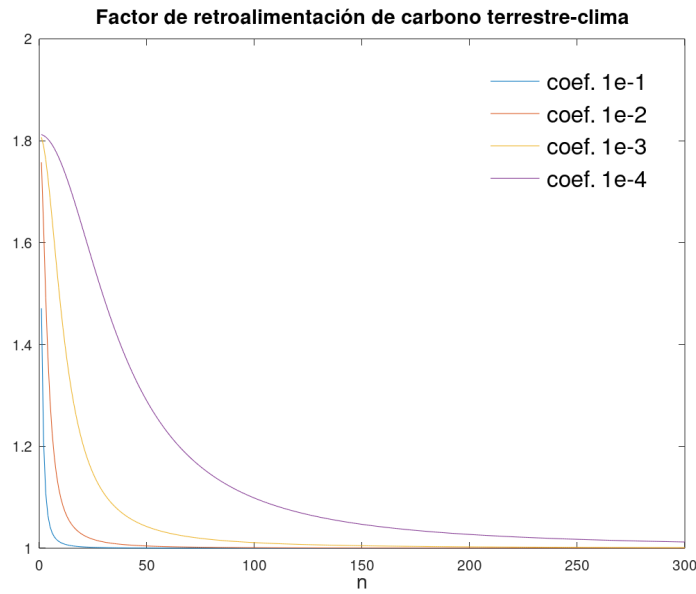
En la Figura 5.2 se presentan curvas para el factor de retroalimentación del bucle de concentración carbono-océano. Se puede notar que todas las curvas toman valores en un rango aproximado de 0.5 y 0.6 cuando  $n = 0$ , estos valores se ubican por debajo de los valores de referencia de la Tabla 5.2, pero conservan el comportamiento esperado para un bucle de concentración de carbono-océano ( $F_O^* < 1$ ). La obtención de valores inferiores en el factor de retroalimentación de este bucle se debe a las expresiones simplificadas que han sido utilizadas para la bomba biológica y de solubilidad, así como la estratificación oceánica de únicamente dos capas.



**Figura 5.2** Factor de retroalimentación de la concentración de carbono-océanos ( $F_O^*$ ) obtenido con los coeficientes de ganancia ( $g_O^*$ ).

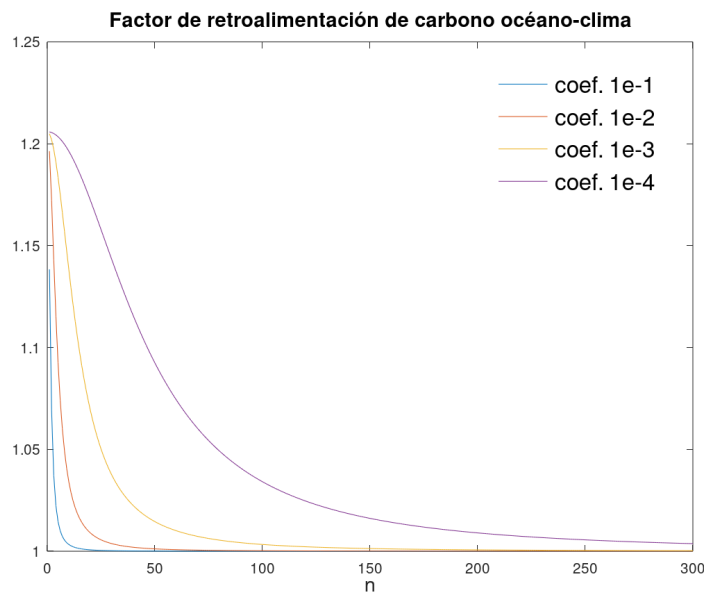
En la Figura 5.3 se muestran curvas del factor de retroalimentación terrestre-clima. Es bien sabido que los bucles de retroalimentación donde se incluye el clima amplifican el cambio climático [23], la Figura 5.3 también sustenta este hecho, puesto que los factores de retroalimentaciones son todos mayores a uno. Los parámetros de referencia de la Tabla 5.2, que permiten comparar solo el caso cuando  $n = 0$  de la Figura 5.3, toman valores de 1.15 y 1.25, mientras que los factores de retroalimentación encontrados para este caso toman valores mayores y en un rango más amplio. La diferencia antes descrita se debe a la idealización del modelo para el cambio de carbono en suelos, específicamente la no inclusión de procesos como la variabilidad regional de especies y la utilización de un formalismo simplista para la respiración del suelo.

Por otro lado, es importante destacar que muchas investigaciones señalan que, por los rápidos cambios de la biósfera terrestre y la respuesta de la  $NPP$  al efecto de fertilización [21, 72], los bucles de retroalimentación que consideran el carbono de los suelos acarrearán mayores incertidumbres. Lo anterior conlleva a que la intensidad de la retroalimentación del ciclo de carbono terrestre-suelos tenga mediciones más dispersas en comparación a otros bucles de retroalimentación, como se ilustra en la Figura 6.20 del AR5 del IPCC. De esta manera, aunque los valores iniciales de las curvas para el factor de retroalimentación de la Figura 5.3 son más grandes que los parámetros de referencia de la Tabla 5.2, siempre se ubican sobre la cota límite del proceso ( $F_{TL}^* > 1$ ) aunque con una mayor dispersión como suele pasar en este bucle [13].



**Figura 5.3** Factor de retroalimentación terrestre-clima ( $F_{TL}^*$ ) obtenido con el coeficiente de ganancia carbono ( $g_{TL}^*$ ).

En la Figura 5.4 se muestran curvas del factor de retroalimentación de carbono océano-clima. Literatura disponible coincide en que la retroalimentación de este ciclo refuerza el cambio climático [48, 13], los factores de retroalimentación de la Figura 5.4 coinciden con esta característica ( $F_{TO}^* > 1$ ).



**Figura 5.4** Factor de retroalimentación carbono océanos-clima ( $F_{TO}^*$ ) obtenido con el coeficiente de ganancia ( $g_{TO}^*$ ).

Con la Figura 5.4 también se puede notar cómo los valores obtenidos con la simulación numérica cuando  $n = 0$  en contraste con los valores de referencia de la Tabla 5.2 tienen una fuerte cercanía. Se observa que con el modelo se obtienen resultados bastante próximos para el factor de retroalimentación en comparación a los obtenidos en otras investigaciones con modelos más robustos. Lo anterior sirve como una validación del modelo y de la metodología utilizada para el cálculo analítico de este coeficiente de retroalimentación.

### Coefficientes de sensibilidad

Para los parámetros de sensibilidad ( $\beta$  y  $\gamma$ ), también denominados *parámetros de retroalimentación de tiempo-integrado*, descritos con más detalles en el Apéndice B, se presentan dos figuras que ilustran las estimaciones numéricas de los mismos a partir del modelo expandido. La Figura 5.5 muestra el parámetro de la sensibilidad del stock de carbono en los océanos por cambios en el  $\text{CO}_2$  atmosférico ( $\beta_O^*$ ); y, la Figura 5.6 ilustra el parámetro de sensibilidad del almacenamiento de carbono en océanos por cambios en el clima ( $\gamma_O^*$ ). No se han incluido gráficas para representar las sensibilidades del carbono en suelos debido a que no permiten comparación con diferentes valores de  $n$  en la función de prueba, como se puede notar en las ecuaciones (5.9) y (5.10).

En el caso de los coeficientes de sensibilidad, el parámetro expresa un reforzamiento del cambio climático cuando es negativo y su mitigación cuando es positivo. Se puede verificar con la Figura 5.5 y la Figura 5.6 que las simulaciones numéricas conservan el signo esperado, esto es  $\beta_O^* > 0$  y  $\gamma_O^* < 0$  [45].

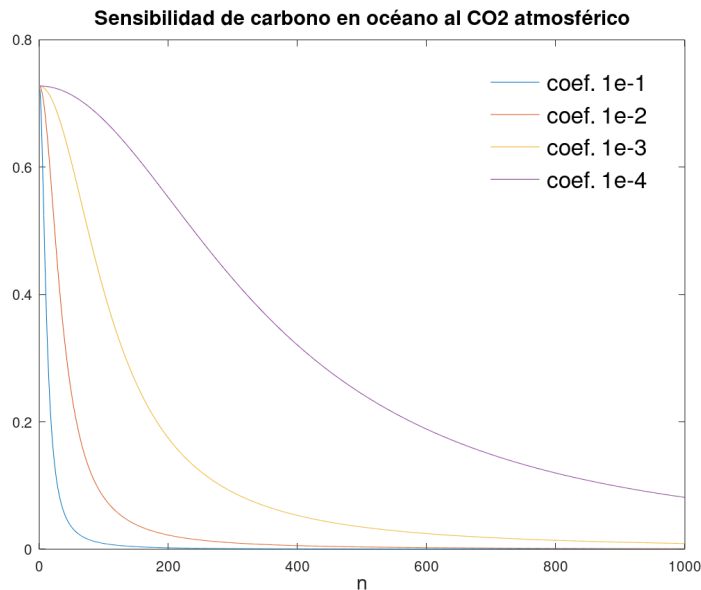
Por medio de la Tabla 5.3, se pueden contrastar los valores obtenidos para los parámetros de sensibilidad en los experimentos numéricos, ilustrados en las Figuras 5.5 y 5.6 cuando  $n = 0$ , con otras dos investigaciones usadas como referencia. Se puede notar que los coeficientes de sensibilidad obtenidos son menores en magnitud que los valores de referencia mostrados en la Tabla 5.3, la alta estilización realizada en el ciclo del carbono para los océanos, que excluye una estratificación oceánica más realista, justifica estas diferencias. Aunque las estimaciones numéricas subestiman el valor de referencia, excepto en el bucle de retroalimentación de concentración oceánica de carbono, los coeficientes encontrados están dentro de los intervalos especificados en la última columna de la Tabla 5.3, que constituyen rangos de valores obtenidos en los coeficientes de sensibilidad por 12 modelos estudiados en [23].



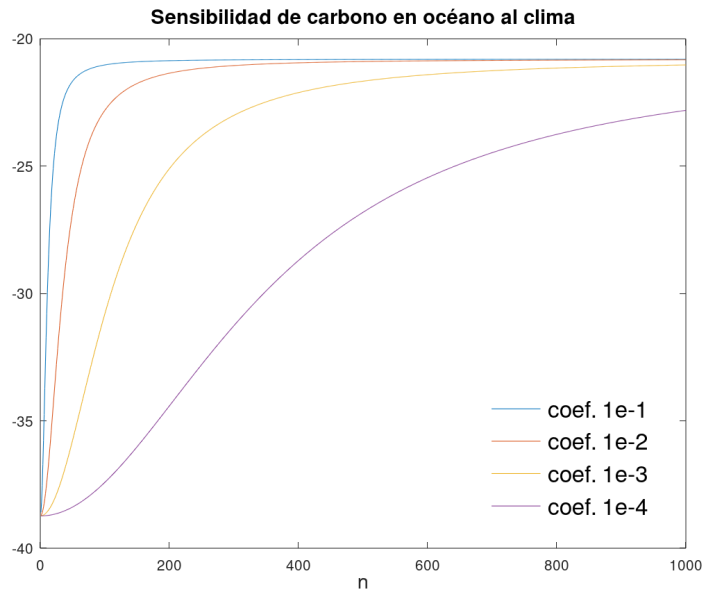
**Tabla 5.3** Valores numéricos simulados y de referencia para los coeficientes de sensibilidad del stock de carbono el modelo que no incluye difusión ni información espacial. Las dos columnas de valores de referencia muestran coeficientes de sensibilidad para el año 2100. La abreviatura Concent. indica concentración.

Bucle	Parámetro	Valores obtenidos		Valores de referencia	
		Preindustrial	Año 2100	Zickfeld et al. [72]	Friedlingstein et al. [23]
Concent.-suelos	$\beta_L^*$	2.02844	0.58715	1.32	1.35 [0.2, 2.8]
Concent.-océanos	$\beta_O^*$	1.55784	0.41275	0.98	1.13 [0.8, 1.6]
Clima-suelos	$\gamma_L^*$	-101.68580	-86.83010	-129	-79 [-177, -20]
Clima-océanos	$\gamma_O^*$	-39.07360	-67.47629	-32	-30 [-67, -14]

La obtención de un coeficiente de sensibilidad numérico menor para el bucle de concentración carbono-océanos también ocurrió en el trabajo de Lade et al. en [45]. Principalmente este desajuste se debe a la estimaciones analíticas encontradas; en [45] se señala que la expresión matemática usada para estimar el carbono total del océano ( $C_M$ ) subestima el carbono transportado al océano profundo, el mismo formalismo fue utilizado en esta investigación. Lo anterior es apoyado por las ecuaciones (5.17) y (5.16), que fueron utilizadas para estimaciones de la Figura 5.5 y 5.6 respectivamente, en donde se puede verificar la dependencia de los coeficientes de sensibilidad al término  $w_0 + D_a r$ , con el factor de Revelle  $r$  fuertemente simplificado al ser tomado constante.



**Figura 5.5** Coeficiente de sensibilidad del almacenamiento de carbono en océanos por cambios en la concentración de  $\text{CO}_2$  atmosférico ( $\beta_O^*$ ).



**Figura 5.6** Coeficiente de sensibilidad del almacenamiento de carbono en océanos por cambios en el clima ( $\gamma_O^*$ ).

Para finalizar, la Figura 5.5 y la Figura 5.6 constatan la influencia de la distribución espacial en la sensibilidad de captación de carbono en el océano por cambios en la concentración de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera y por cambios en el clima. Mediante una analogía similar a la indicada para el factor de retroalimentación, se observa claramente cómo los cambios más drásticos en el coeficiente de sensibilidad se presentan cuando hay una distribución menos homogénea de carbono, representado con valores menores de  $n$  en el eje horizontal de las figuras, mientras que a medida que se reduce la inhomogeneidad de las concentraciones las curvas tienden a acercarse más.

# Conclusiones

Los resultados y análisis presentados en esta investigación se fundamentan en lo planteado por Gregory et al. en [29], quienes argumentan que algunos mecanismos pueden describirse en términos simples de tal forma que se obtienen, comportamientos medios globales, como es el caso del modelo estilizado del ciclo global del carbono utilizado en esta investigación para el estudio de las retroalimentaciones lineales.

Tomando en cuenta lo anterior, se elaboró un procedimiento que permite encontrar expresiones analíticas para los coeficientes de ganancia y sensibilidad de retroalimentación del carbono, con el notable aporte de incluir una variable espacial y términos de difusión. Por medio del cálculo de estos coeficientes, se mostró que la configuración espacial de las emisiones de carbono influye en las retroalimentaciones. En este sentido, el patrón que describa la inhomogeneidad de las emisiones de carbono determina la intensidad de la ganancia y sensibilidad de la retroalimentación de carbono en el ciclo, por lo que la uniformidad de emisión que se ha asumido para el cómputo de la retroalimentación no brinda medidas íntegras.

El resultado anterior conlleva dos consecuencias inmediatas: primero, expone la necesidad de incluir los efectos de la distribución espacial de las emisiones de carbono en los estudios referentes a su ciclo (y a sus procesos inherentes tales como las retroalimentaciones) y al calentamiento global; segundo, ofrece un primer acercamiento para el análisis y construcción de nuevas políticas globales que se fundamenten en la distribución de las emisiones y no únicamente en la emisión de carbono por sí misma. Ciertamente, para el segundo aspecto, más investigaciones en el campo son requeridas para concretar un planteamiento de mayor solidez en esta dirección.

Se encontraron estimaciones analíticas para los coeficientes de retroalimentación considerando diferentes funciones de prueba de la derivada direccional, lo que, a su vez, ofrece un marco más grande para otras especificaciones del modelo. En todos los casos, las estimaciones analíticas brindan resultados coherentes con

los valores de referencia utilizados. Expresiones analíticas para cuantificar la retroalimentación de carbono son escasas en la literatura existente [59]. Con lo anterior, se espera contribuir al abordaje teórico del tema y a una mejor comprensión y modelación de procesos del clima que todavía son bastante inciertos.

Se construyó un método efectivo para comparar y validar los coeficientes de sensibilidad, y con ello, es posible contrastar las derivadas parciales usuales para estos coeficientes con las derivadas direccionales generalizadas propuestas. El método también permite determinar el aporte de la componente difusiva, este beneficio adicional es valioso para un mejor entendimiento de la influencia de la inhomogeneidad espacial de las emisiones carbono.

Para obtener los cambios proyectados en los flujos y reservorios naturales de carbono en el modelo con y sin difusión se diseñó e implementó una robusta base de algoritmos. Para el caso del sistema más complejo, esto es, con difusión y variable espacial, el modelo se resolvió usando el MEF. Es claro que con la elaboración de este marco computacional se crea un espacio de trabajo que permite considerar diferentes dinámicas de difusión y ajustar algunos parámetros que actualmente se les adjudica valores muy dispersos, como ocurre con el efecto de la fertilización [21].

Por medio de los experimentos realizados para el análisis de inestabilidad de Turing, se determinó que no existe evidencia que permita conjeturar la formación de patrones de CO<sub>2</sub> en la atmósfera. Este resultado es relevante porque brinda apoyo a premisas sobre los tiempos de permanencia y homogeneidad de la concentración de los GEI en la atmósfera y, por consiguiente, asiste algunas políticas actuales, como en el caso del *Principio de responsabilidad compartida ante el cambio climático* propuesto por las Naciones Unidas.

En todas las simulaciones para los flujos y cambios en los almacenamientos de carbono se utilizaron los cuatro escenarios RCP usados en [45] y, adicionalmente, el escenario SRES A2 de emisiones de carbono por combustión fósil y uso del suelo facilitando por este medio, la comparación de las estimaciones obtenidas con la literatura relacionada a los TAR, AR4 y AR5 del IPCC. En este contexto, diferentes resultados de [45] se replicaron y además se expandieron, esto se evidencia por medio de la inclusión del escenario SRES A2 antes mencionado, los cómputos de los coeficientes de retroalimentación desde una perspectiva más generalizada, la inclusión de una variable espacial y difusión, el análisis de estabilidad y la elaboración de más simulaciones, además se hizo un planteamiento más detallado y profundo del modelo estudiado.

# Trabajos futuros

Tal como ha sido expuesto en todo este documento, existen múltiples elementos, mecanismos o parámetros que todavía no son lo suficientemente consistentes como para aproximar con solidez la realidad, entonces, un mejor planteamiento del fenómeno que permita reducir incertidumbres en esos aspectos sería una buena aportación para los avances de los EMS. Lamentablemente, en varios casos, investigaciones diseñadas para producir hallazgos más sustanciosos requieren recursos considerables, en virtud de esta desventaja, a continuación se proponen algunos tópicos para continuar la línea de investigación de este trabajo y en los que se estima que se puede proceder con factibilidad:

- i. Introducir una variable espacial no es suficiente si se desean hacer proyecciones más acertadas del sistema climático, entonces, se propone ampliar la configuración espacial en el modelo sin perder la capacidad de hacer un tratamiento analítico con este.
- ii. Abordar los parámetros de sensibilidad de carbono al cambio climático ( $\gamma$ ) y al  $\text{CO}_2$  atmosférico ( $\beta$ ) sin suponer linealidad es imperativo, estudios como el presentado en [72] sugieren que las retroalimentaciones de concentración-carbono y clima-carbono no se configuran linealmente en el ciclo global de carbono. En el mismo estudio se señala que la no linealidad podría originarse por la respuesta de la vegetación y el efecto de fertilización en cuanto a los sumideros en suelos, mientras que en los océanos se podría dar por cambios en sus propiedades físicas, como la circulación y la temperatura de las aguas superficiales.
- iii. Si bien la calibración de parámetros suele requerir investigaciones *in situ* y vastos experimentos rigurosos de laboratorio, se propone mejorar algunas expresiones analíticas para que puedan capturar mejor el fenómeno, este es el caso de la ecuación (3.3) para el flujo de carbono en suelos, puesto que el bucle de concentración de carbono que incluye la biósfera terrestre es, de hecho, una de las retroalimentaciones con medición más dispersa [13].

- iv. Incluir una estratificación oceánica más fina es necesaria para no subestimar el stock de carbono en este reservorio [48]. Un primer acercamiento podría ser considerar la distribución de aguas en tres y no dos capas, tal que se diferencien las aguas intermedias.
  
- v. Estudiar el modelo del ciclo global del carbono y sus retroalimentaciones considerando parámetros estocásticos. Con un estudio de este tipo se podría contrastar el modelo determinista con el estocástico, de tal forma que se pueda valorar si la influencia estocástica es relevante en los procesos que configuran el fenómeno.

## Apéndice A

# Escenarios de emisiones

En este apéndice se explican los escenarios de emisión utilizados, sus antecedentes y las principales diferencias, además se aborda el concepto de forzamiento radiactivo con el fin de ayudar a comprender mejor los procesos naturales y antropogénicos que alteran el balance energético de la Tierra.

El IPCC define el *forzamiento radiativo* como la cuantificación de la perturbación de la energía en la Tierra [36]. En este sentido, dicho forzamiento especifica el desequilibrio energético que recae en el sistema climático a causa de la energía radiante recibida del sol y la radiación de onda larga emitida [61]. Un forzamiento se da por algún agente de origen artificial, como los producidos por los GEI y aerosoles, y de origen natural como el vulcanismo [33], se mide en vatios por metro cuadrado ( $W/m^2$ ) y es tal que si las medidas del forzamiento son mayores a cero implican un calentamiento mientras que las menores a cero conllevan un enfriamiento.

Tomando como punto de partida los impulsores antropogénicos del forzamiento radiativo se han diseñado cuatro escenarios de emisiones de GEI utilizados en el AR5 del IPCC y muchas publicaciones recientes, denominados *Representative Concentration Pathways* (RCP) o trayectorias de concentración representativas en español. Una descripción resumida de los RCP se muestra en la Tabla A.1, en donde se señala el equipo responsable de la construcción de cada escenario, el número adjunto en el nombre del escenario RCP indica el máximo valor de forzamiento radiactivo que se alcanzará para el año 2100.

En principio, pueden existir infinitos escenarios diferentes de emisiones o concentraciones de GEI; sin embargo, para garantizar puntos de comparación más consistentes a fin de evaluar umbrales de riesgo en el cambio climático [53], se ha optado por centrar los estudios en trayectorias de emisiones que se distinguen

**Tabla A.1** Caracterización de los escenarios RCP. Se muestran los escenarios SRES asociados a los RCP según los datos que proyectan, excepto en el RCP 2.6 debido a que ningún escenario de los SRES consideró emisiones negativas. Los datos armonizados y extensiones para años después del 2100, así como el contacto del equipo responsable se pueden encontrar en *RCP Database* del sitio web del International Institute Applied Systems Analysis (IIASA).

Escenario	SRES relacionado	Modelo	Equipo responsable	Característica
RCP 2.6	—	IMAGE	<i>Netherlands Environmental Assessment Agency</i>	Mitigación
RCP 4.5	B1	GCAM	<i>Pacific Northwest National Laboratory del Joint Global Change Research Institute (JGCRI)</i>	Estabilización media
RCP 6.0	B2	AIM	<i>National Institute for Environmental Studies (NIES)</i>	Estabilización media alta
RCP 8.5	A2/A1F1	MESSAGE	<i>Integrated Assessment Framework</i> de el International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)	Altas emisiones

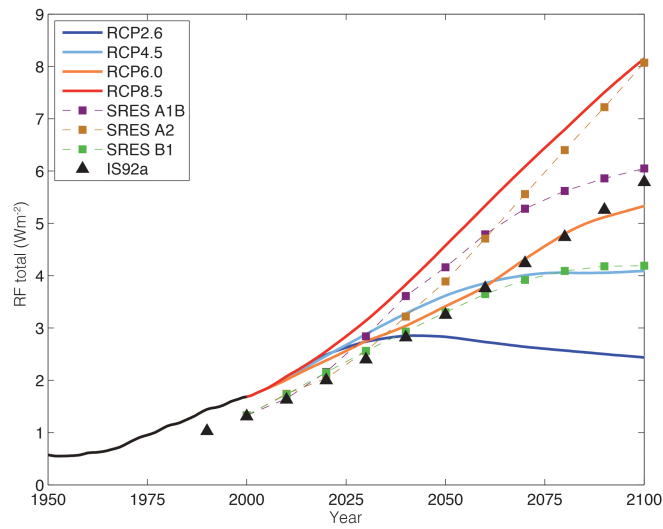
por su mayor calidad y coherencia en sus proyecciones, últimamente los escenarios que han sido utilizado con más frecuencia son los RCP.

Los escenarios del Special Report on Emissions Scenarios (SRES) anteceden a los RCP. De los 40 escenarios disponibles del SRES, los que más se usaron en los reportes de evaluación tercero y cuarto del IPCC son los A2, A1B y B1 [17], aunque se ha señalado que todos son igualmente correctos [35]. Si bien los RCP fueron utilizados en el AR5 no representan un camino más probable de ocurrencia que los SRES, es decir, no necesariamente modelan mejor el panorama climático futuro [17].

En cuanto a las componentes consideradas en su construcción, los escenarios SRES toman en cuenta factores como cambios en la demografía, evolución tecnológica, el desarrollo económico y el uso de energía [35]. Por otro lado, los escenarios RCP incluyen información sobre el uso de la tierra, aerosoles y contaminantes como el dióxido de azufre (SO<sub>2</sub>) [17], bajo diferentes esquemas de mitigación evaluados por el IPCC [36].

Como mejoras que suponen los escenarios RCP se destaca que incluyen cambios en las políticas climáticas y un mayor número de mediciones realizadas. Entre las diferencias que marcan a los RCP y los SRES, es importante notar que los RCP incluyen el escenario RCP 2.6 de *emisiones negativas*, es decir, un ambiente donde se almacena más volumen de GEI que el liberado en la atmósfera, consecuentemente abarcan un rango más amplio de posibles forzamientos radiativos futuros.





**Figura A.1** Forzamiento radiativo antropógeno proyectado por diferentes escenarios hasta el año 2100. Esta figura fue tomada íntegramente de [17].

Con el objeto de destacar las diferencias relativas entre los escenarios, la Figura A.1 ilustra las trayectorias del forzamiento radiactivo por cada uno de los escenarios más utilizados en los últimos informes de evaluación del IPCC: IS92a usado en el SAR del año 1995; SRES A1B, A2 y B1 usados en los reportes TAR publicado en el año 2001 y el AR4 del año 2001; y, los RCP 2.6, 4.5, 6.0 y 8.5 usados en el AR5 del año 2013.

## Apéndice B

# Métricas para las retroalimentaciones del ciclo del carbono

Diferentes medidas se han considerado para cuantificar las retroalimentaciones del ciclo del carbono y el sistema climático [45], en este apéndice se ofrece un breve recuento sobre algunas medidas que, bajo algunos planteamientos sencillos pero ingeniosos, han permitido caracterizar el efecto del carbono atmosférico en el cambio climático para diferentes bucles de retroalimentación partiendo de un supuesto de linealidad. Primero, se describe un coeficiente clásico definido a partir de la ganancia de carbono denominado *factor de retroalimentación*, ampliamente utilizado en la literatura más reciente por su facilidad de interpretación conferida por su adimensionalidad. Luego, se muestran dos coeficientes usados para medir la sensibilidad en la absorción de carbono de los sumideros terrestres y oceánicos por cambios en el CO<sub>2</sub> atmosférico y el clima.

Un trabajo precursor para medir las retroalimentaciones del sistema climático fue desarrollado por Hansen et al. en [32], los aportes más significativos para la presente investigación se muestran a continuación. Se considera la ecuación que define la temperatura efectiva  $T_{ef}$  de un planeta, es decir, la estimación de la temperatura de la superficie como si fuera un cuerpo negro que emite la misma radiación recibida, definida como sigue

$$T_{ef} = \left( \frac{S_0(1 - A)}{4\sigma} \right)^{1/4},$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stephan-Boltzman, en el caso del planeta Tierra, se considera a  $1 - A$  el término referente a la luminosidad, con  $A$  como el albedo terrestre, y  $S_0$  denota la radiación solar.

Derivando  $T_{ef}$  con respecto a  $S_0$ , se obtiene

$$\frac{dT_{ef}}{dS_0} = \frac{1}{4} \left( \frac{(1-A)S_0}{4\sigma} \right)^{-3/4} \frac{(1-A)}{4\sigma} = \frac{1}{4} T_{ef}^{-3} \frac{T_{ef}^4}{S_0} = \frac{1}{4} \frac{T_{ef}}{S_0}.$$

Por lo tanto, se puede relacionar  $T_{ef}$  y  $S_0$  como sigue

$$\frac{dT_{ef}}{T_{ef}} = \frac{1}{4} \frac{dS_0}{S_0}. \quad (\text{B.1})$$

En el caso de que no existiera retroalimentación climática, es decir, un efecto invernadero que absorba parte de la energía solar recibida, se tendría que la temperatura de la tierra cambiaría igual que  $\Delta T_{ef}$ ; sin embargo, como este no es el caso, Hansen et al. introducen un factor de retroalimentación neto  $f_H$  que relaciona los cambios en el balance energético conducidos por la retroalimentación climática. Sean  $\Delta T_0$  el cambio de la temperatura superficial necesaria para establecer el equilibrio radiativo sin la existencia de procesos de retroalimentación y  $\Delta T_{eq}$  el cambio de la temperatura media global del aire superficial, por (B.1) se puede establecer la relación

$$\Delta T_{eq} = f_H \Delta T_0. \quad (\text{B.2})$$

Además, es claro que si  $\Delta T_{Re}$  define el cambio de temperatura generado por la retroalimentación del clima, se sigue que

$$\Delta T_{eq} = \Delta T_0 + \Delta T_{Re}. \quad (\text{B.3})$$

Adicionalmente, se define la ganancia del sistema por medio de la siguiente relación:

$$g_H \equiv \frac{\Delta T_{Re}}{\Delta T_{eq}}. \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.2) en (B.3) y dividiendo en ambos lados por  $\Delta T_{eq}$  se establece una relación de la ganancia  $g_H$  en términos del factor de  $f_H$ , descrita como sigue

$$g_H = \frac{\Delta T_{Re}}{\Delta T_{eq}} = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_{eq}} (f_H - 1) = \frac{\Delta T_0}{f \Delta T_0} (f_H - 1) = 1 - \frac{1}{f_H}. \quad (\text{B.5})$$

De esta forma, se obtiene una medida para el factor de retroalimentación del sistema climático,  $f_H = 1/(1 - g_H)$ , análoga a la utilizada para cuantificar la retroalimentación de un amplificador electrónico [32, 46]. Un planteamiento similar al expuesto previamente, pero más detallado y útil para el cómputo del factor y ganancia de retroalimentación en otros sistemas ajenos al clima, es presentado por Gerard Roe en [59].

Se destaca que los coeficientes de retroalimentación propuestos por Hansen et al. están determinados por los cambios en temperatura, a saber, intentan cuantificar un forzamiento externo (balance energético); sin embargo, estas ideas luego fueron usadas para mediar un forzamiento interno (ciclo del carbono) como se detalla seguidamente.

Tomando las ideas de Hansen et al. pero con un enfoque en el ciclo del carbono, Zickfeld et al. valoran la retroalimentación de la concentración de carbono definiendo el factor de retroalimentación  $f_Z$  en [72] así

$$f_Z \equiv \frac{\Delta C_a^{on}}{\Delta C_a^{off}},$$

tal que  $\Delta C_a^{on}$  denota el cambio en la concentración de carbono en la atmósfera cuando existe retroalimentación y  $\Delta C_a^{off}$  sin retroalimentación. En el sentido de las mediciones numéricas que se hacen con los experimentos utilizando modelos, el cómputo de  $\Delta C_a^{on}$  se consigue cuando hay un acoplamiento biogeoquímico de los procesos y  $\Delta C_a^{off}$  sin el acoplamiento de este tipo de procesos.

También definen un coeficiente análogo al de la ganancia radiativa de Hansen et al. mostrado en la ecuación (B.4) pero para el carbono atmosférico, tal que

$$g_Z = \frac{\Delta C_a^{Re}}{\Delta C_a^{on}},$$

siempre que  $\Delta C_a^{Re} + \Delta C_a^{off} = \Delta C_a^{on}$ , igualdad similar a la ecuación (B.3). Con  $f_Z$  y  $g_Z$  se satisface la misma relación presentada en (B.5).

Por otro lado, Friendlingstein et al. en [23] proponen medir la retroalimentación del ciclo del carbono por medio de la sensibilidad de la absorción de carbono de los sumideros en suelos y océanos, su planteamiento es descrito a continuación.

Se supone que existe una relación lineal entre el cambio en el carbono atmosférico y el clima (temperatura), la ecuación usada para describir el cambio del carbono en suelos es la siguiente

$$\Delta C_t = \beta_T \Delta C_a + \gamma_T \Delta T, \tag{B.6}$$

**Tabla B.1** Signo de los parámetros de sensibilidad de retroalimentación del ciclo global del carbono. La notación utilizada es: + denota un *incremento* ya sea en la masa o en la concentración de carbono en atmósfera o en el diferencial de temperatura; – expresa la *reducción del almacenamiento*. El nivel de confianza del signo del parámetro fue tomado de [13].

Parámetro	$C_a$	$\Delta T$	$C_t$	$C_m$	Signo	Nivel de confianza
$\beta_T$	+		+		Positivo	Medio
$\beta_M$	+			+	Positivo	Alto
$\gamma_T$	+	+	–		Negativo	Medio
$\gamma_M$	+	+		–	Negativo	Medio

en donde  $\beta_T$  y  $\gamma_T$  expresan la sensibilidad del carbono en suelos debido a cambios en el carbono atmosférico y la temperatura respectivamente. De manera similar, se considera una ecuación para el cambio de carbono suelos-atmósfera como sigue

$$\Delta C_m = \beta_M \Delta C_a + \gamma_M \Delta T, \quad (\text{B.7})$$

similarmente, los coeficientes representan la sensibilidad del carbono en océanos por los cambios en el carbono atmosférico ( $\beta_M$ ) y temperatura ( $\gamma_M$ ). Comúnmente los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  son denominados *parámetros de retroalimentación de tiempo integrado*.

Para calcular los parámetros de sensibilidad de las ecuaciones (B.6) y (B.7) en [72] se propone hacer la estimación a través de un acoplamiento o desacoplamiento biogeoquímico y radiativo según sea el caso. Por lo tanto, los parámetros  $\beta_L$  y  $\beta_M$ , se estiman así:

$$\beta_T = \frac{\Delta C_t}{\Delta C_a} \quad \text{y} \quad \beta_M = \frac{\Delta C_m}{\Delta C_a},$$

en donde los parámetros  $\beta$  se han obtenido por medio de un modelo acoplado biogeoquímicamente y desacoplado radiativamente, es decir, donde el clima no se ve afectado por aumentos de  $\text{CO}_2$  ( $\Delta T = 0$ ), pero si afecta a los procesos del almacenamiento de carbono en suelos y océanos. Para calcular los parámetros de sensibilidad  $\gamma$ , se propone considerar un acoplamiento radiativo ( $\Delta T \neq 0$ ) y un desacoplamiento biogeoquímico tal que se omita un cambio en  $C_a$ , es decir  $\Delta C_a = 0$ , conduciendo así a obtener

$$\gamma_T = \frac{\Delta C_t}{\Delta T} \quad \text{y} \quad \gamma_M = \frac{\Delta C_m}{\Delta T}.$$

Diferentes publicaciones, como el AR5 del IPCC, han convenido asignar el signo positivo o negativo a los parámetros de sensibilidad si estos inducen una mayor o menor captación de carbono en suelos y océanos.

De esta manera, los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  se definen como positivos si al aumentar la concentración de carbono atmosférico aumenta también su almacenamiento en los reservorios, de lo contrario, si al aumentar la concentración de carbono se reducen estos almacenamientos, entonces se dice que el parámetro es negativo [13]. La Tabla B.1 muestra el signo histórico de estos parámetros y las variables consideradas en el respectivo bucle de retroalimentación, además se indica el nivel de confianza del signo asignado, según la evidencia disponible y el grado de concordancia obtenido en los diferentes modelos considerados [13].

Si bien se tiene una forma para estimar los parámetros de sensibilidad, una eventual desventaja consiste en que tales valores se obtienen a partir de cálculos en dos puntos, que suelen ser el año inicial y final del período de tiempo de interés, perdiendo así información del sistema en el tiempo intermedio que podría ser importante; para contrarrestar la situación antes mencionada, Boer y Arora en [6] proponen estimar *parámetros de retroalimentación directa*  $B$  y  $\Gamma$  en todos los puntos del modelo por medio de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dC_t}{dt} = B_T \Delta C_a + \Gamma_T \Delta T,$$
$$\frac{dC_m}{dt} = B_M \Delta C_a + \Gamma_M \Delta T.$$

Los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  se relacionan con los parámetros  $B$  y  $\Gamma$  como sigue

$$\beta \Delta C_a = \int_0^t B \Delta C_a dt,$$
$$\gamma \Delta T = \int_0^t \Gamma \Delta T dt.$$

Se destaca que tanto Friendlingstein et al. como Boer y Arora proponen que todos los parámetros de sensibilidad deben ser estimados en modelos del ciclo del carbono acoplado biogeoquímicamente para  $\beta$  y  $B$  y con acoplamiento radiativo para  $\gamma$  y  $\Gamma$ , de tal forma que se restrinja al máximo la incidencia de un proceso externo al bucle de retroalimentación de interés.

Por último, es importante destacar que los análisis previos se han planteado cuando un único mecanismo se está considerando en el sistema que se está retroalimentando y siempre sujeto a linealidad, en caso de considerar más de un bucle de retroalimentación en [59] se ofrecen algunos aportes interesantes que pueden ser muy útiles en un caso más generalizado.

## Apéndice C

# Tablas de coeficientes de retroalimentación para diferentes funciones de prueba

En este apéndice se ofrecen expresiones analíticas para los factores de retroalimentación y parámetros de sensibilidad considerando otras funciones de prueba a las utilizadas en el Capítulo 5, con estas tablas se construye un banco de trabajo más grande que complementa los cálculos presentados en el referido capítulo.

Las tablas muestran estimaciones analíticas de los coeficientes de retroalimentación en suelos ( $L$ ) y océanos ( $O$ ) para diferentes funciones de prueba  $\eta$ , a saber, para una función lineal, una exponencial y una senoidal. En este apéndice,  $g_x^*$  denota la ganancia de retroalimentación en el bucle  $x$ , mientras que  $\gamma$  y  $\beta$  expresan las sensibilidades de la retroalimentación de carbono por el cambio en el clima y en la concentración de  $\text{CO}_2$  atmosférico respectivamente.

Bajo el supuesto de que la función  $\eta$  puede ser interpretada como una descripción de la inhomogeneidad de la distribución espacial de carbono, las tablas siguientes ofrecen una gama de opciones provechosas para planteamientos más específicos del modelo.

**Tabla C.1** Coeficientes de ganancia y sensibilidad de retroalimentación tomando a  $\eta(t) = t$ 

Coeficiente	Estimación analítica
$g_{TL}^*$	$\frac{\log Q_R C_{t_0} \lambda}{10 \log 2 C_{a_0}}$
$g_L^*$	$-\frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}$
$g_{TO}^*$	$\frac{(D_a D_T C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T (D_a r \hat{t} - 2)) \lambda}{2 \log 2 C_{a_0} (w_0 + D_a r)}$
$g_O^*$	$-\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2)}{2 C_{a_0} (w_0 + D_a r)}$
$\gamma_L^*$	$\frac{\log Q_R C_{t_0}}{10}$
$\beta_L^*$	$\frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}$
$\gamma_O^*$	$-\frac{D_a D_T C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T (D_a r \hat{t} - 2)}{2 (w_0 + D_a r)}$
$\beta_O^*$	$\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2)}{2 C_{a_0} (w_0 + D_a r)}$

**Tabla C.2** Coeficientes de ganancia y sensibilidad de retroalimentación tomando a  $\eta(t) = e^t$ 

Coeficiente	Estimación analítica
$g_{TL}^*$	$-\frac{\log Q_R C_{t_0} \lambda}{10 \log 2 C_{a_0} (\delta_4 \tau - 1)}$
$g_L^*$	$-\frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}$
$g_{TO}^*$	$-\frac{(D_a D_T C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T (D_a r \hat{t} - \delta_2 \hat{t} - 2)) \lambda}{2 \log 2 C_{a_0} (\delta_4 \tau - 1) (w_0 + D_a r - \delta_2)}$
$g_O^*$	$-\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2)}{2 C_{a_0} (w_0 + D_a r - \delta_2)}$
$\gamma_L^*$	$\frac{\log Q_R C_{t_0}}{10}$
$\beta_L^*$	$\frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}$
$\gamma_O^*$	$-\frac{D_a D_T C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T (D_a r \hat{t} - \delta_2 \hat{t} - 2)}{2 (w_0 + D_a r - \delta_2)}$
$\beta_O^*$	$\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2)}{2 C_{a_0} (w_0 + D_a r - \delta_2)}$

**Tabla C.3** Coeficientes de ganancia y sensibilidad de retroalimentación tomando a  $\eta(t) = \text{sen}(t)$ 

Coeficiente	Estimación analítica
$g_{TL}^*$	$\frac{\log Q_R C_{t_0} \lambda}{10 \log 2 C_{a_0} (\delta_4 \tau + 1)}$
$g_L^*$	$-\frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}$
$g_{TO}^*$	$\frac{(D_a D_T C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T (D_a r \hat{t} - \delta_2 \hat{t} - 2)) \lambda}{2 \log 2 C_{a_0} (\delta_4 \tau + 1) (w_0 + D_a r + \delta_2)}$
$g_O^*$	$-\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2)}{2 C_{a_0} (w_0 + D_a r + \delta_2)}$
$\gamma_L^*$	$\frac{\log Q_R C_{t_0}}{10}$
$\beta_L^*$	$\frac{K_c C_{t_0}}{C_{a_0}}$
$\gamma_O^*$	$-\frac{D_a D_T C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2) + B_0 B_T (D_a r \hat{t} - \delta_2 \hat{t} - 2)}{2 (w_0 + D_a r + \delta_2)}$
$\beta_O^*$	$\frac{D_a C_{m_0} (\hat{t} w_0 + 2)}{2 C_{a_0} (w_0 + D_a r + \delta_2)}$



# Bibliografía

- [1] ALEXANDROV, G., OIKAWA, T., AND YAMAGATA, Y. Climate dependence of the CO<sub>2</sub> fertilization effect on terrestrial net primary production. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology* 55, 2 (2003), 669–675.
- [2] ANDERIES, J. M., CARPENTER, S. R., STEFFEN, W., AND ROCKSTRÖM, J. The topology of non-linear global carbon dynamics: from tipping points to planetary boundaries. *Environmental Research Letters* 8, 4 (2013), 044048.
- [3] ARRHENIUS, S. On the influence of carbonic acid in the air upon the temperature of the ground. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41 (1896), 237–277.
- [4] BALLESTEROS, B., AND ARISTIZABAL, L. Información técnica sobre gases de efecto invernadero y el cambio climático. *Bogotá DC: nota técnica del IDEAM* (2007).
- [5] BANI-YAGHOUB, M. Introduction to delay models and their wave solutions. *arXiv preprint arXiv:1701.04703* (2017).
- [6] BOER, G., AND ARORA, V. Feedbacks in emission-driven and concentration-driven global carbon budgets. *Journal of climate* 26, 10 (2013), 3326–3341.
- [7] BOLIN, B. *A history of the science and politics of climate change: the role of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [8] BOPP, L., BOWLER, C., GUIDI, L., KARSENTI, E., AND DE VARGAS, C. The ocean: a carbon pump. Tech. rep., Ocean climate, 2015.
- [9] BOPP, L., RESPLANDY, L., ORR, J. C., DONEY, S. C., DUNNE, J. P., GEHLEN, M., HALLORAN, P., HEINZE, C., ILYINA, T., SEFERIAN, R., ET AL. Multiple stressors of ocean ecosystems in the 21st century: projections with CMIP5 models. *Biogeosciences* 10 (2013), 6225–6245.

- [10] BRITTON, N. F., ET AL. *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*. Academic Press, 1986.
- [11] CALLENDAR, G. S. The artificial production of carbon dioxide and its influence on temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 64, 275 (1938), 223–240.
- [12] CARTWRIGHT, J. H. Labyrinthine Turing pattern formation in the cerebral cortex. *Journal of theoretical biology* 217, 1 (2002), 97–103.
- [13] CIAIS, P., SABINE, C., BALA, G., BOPP, L., BROVKIN, V., CANADELL, J., CHHABRA, A., DEFRIES, R., GALLOWAY, J., HEIMANN, M., ET AL. Carbon and other biogeochemical cycles. In *Climate change 2013: the physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, 2014, pp. 465–570.
- [14] COLLINS, M., KNUTTI, R., ARBLASTER, J., DUFRESNE, J.-L., FICHEFET, T., FRIEDLINGSTEIN, P., GAO, X., GUTOWSKI, W. J., JOHNS, T., KRINNER, G., ET AL. Long-term climate change: projections, commitments and irreversibility. In *Climate Change 2013-The Physical Science Basis: Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, 2013, pp. 1029–1136.
- [15] CRIPPA, M., OREGGIONI, G., GUIZZARDI, D., MUNTEAN, M., SCHAAF, E., LO VULLO, E., SOLAZZO, E., MONFORTI-FERRARIO, F., OLIVIER, J., AND VIGNATI, E. *Fossil CO<sub>2</sub> and GHG emissions of all world countries*. Luxemburg: Publication Office of the European Union, 2019.
- [16] CROLL, J. On the physical cause of the change of climate during geological epochs. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 28, 187 (1864), 121–137.
- [17] CUBASCH, U., WUEBBLES, D., CHEN, D., FACCHINI, M. C., FRAME, D., MAHOWALD, N., AND WINTHER, J.-G. Introduction. In *Climate change 2013: the physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, 2013, pp. 119–158.
- [18] DENMAN, K. L., BRASSEUR, G., CHIDTHAISONG, A., CIAIS, P., COX, P. M., DICKINSON, R. E., HAUGLUSTAINE, D., HEINZE, C., HOLLAND, E., ET AL. Couplings between changes in the climate system and biogeochemistry. In *Climate change 2007: the physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, 2007, pp. 499–487.

- [19] EBERHARD, E., AND DREIZLER, R. *Density Functional Theory. An Advanced Course*. Springer, 2011.
- [20] FLATO, G., MAROTZKE, J., ABIODUN, B., BRACONNOT, P., CHOU, S. C., COLLINS, W., COX, P., DRIOUECH, F., EMORI, S., EYRING, V., ET AL. Evaluation of climate models. In *Climate change 2013: the physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, 2014, pp. 741–866.
- [21] FRIEDLINGSTEIN, P. Carbon cycle feedbacks and future climate change. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373, 2054 (2015), 20140421.
- [22] FRIEDLINGSTEIN, P., BOPP, L., CIAIS, P., DUFRESNE, J.-L., FAIRHEAD, L., LETREUT, H., MONFRAY, P., AND ORR, J. Positive feedback between future climate change and the carbon cycle. *Geophysical Research Letters* 28, 8 (2001), 1543–1546.
- [23] FRIEDLINGSTEIN, P., COX, P., BETTS, R., BOPP, L., VON BLOH, W., BROVKIN, V., CADULE, P., DONEY, S., EBY, M., FUNG, I., ET AL. Climate–carbon cycle feedback analysis: results from the C4MIP model intercomparison. *Journal of climate* 19, 14 (2006), 3337–3353.
- [24] FRIEDLINGSTEIN, P., JONES, M. W., O’SULLIVAN, M., ANDREW, R. M., HAUCK, J., PETERS, G. P., PETERS, W., PONGRATZ, J., SITCH, S., QUÉRÉ, C. L., ET AL. Global carbon budget 2019. *Earth System Science Data* 11, 4 (2019), 1783–1838.
- [25] FRIEDLINGSTEIN, P., MEINSHAUSEN, M., ARORA, V. K., JONES, C. D., ANAV, A., LIDDICOAT, S. K., AND KNUTTI, R. Uncertainties in CMIP5 climate projections due to carbon cycle feedbacks. *Journal of Climate* 27, 2 (2014), 511–526.
- [26] GAFFNEY, E., AND MONK, N. Gene expression time delays and Turing pattern formation systems. *Bulletin of mathematical biology* 68, 1 (2006), 99–130.
- [27] GANGULY, S., NEOGI, U., CHAKRABARTI, A. S., AND CHAKRABORTI, A. Reaction-diffusion equations with applications to economic systems. In *Econophysics and Sociophysics: Recent Progress and Future Directions*. Springer, 2017, pp. 131–144.
- [28] GONZÁLEZ, L. A., VANEGAS, J. C., AND GARZÓN, D. A. Formación de patrones en sistemas de reacción-difusión en dominios crecientes. *Revista Internacional de Métodos Numéricos* 25, 2 (2009), 145–161.
- [29] GREGORY, J. M., JONES, C., CADULE, P., AND FRIEDLINGSTEIN, P. Quantifying carbon cycle feedbacks. *Journal of Climate* 22, 19 (2009), 5232–5250.

- [30] GUERRERO-ORTIZ, P. L., QUINTERO-LIZAOLA, R., ESPINOZA-HERNÁNDEZ, V., BENEDICTO-VALDÉS, G. S., AND SÁNCHEZ-COLÍN, M. D. J. Respiración de CO<sub>2</sub> como indicador de la actividad microbiana en abonos orgánicos de lupinus. *Terra Latinoamericana* 30, 4 (2012), 355–362.
- [31] HABERMAN, R. *Applied partial differential equations*. Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.
- [32] HANSEN, J., LACIS, A., RIND, D., RUSSELL, G., STONE, P., FUNG, I., RUEDY, R., AND LERNER, J. Climate sensitivity: Analysis of feedback mechanisms. *Geophys* 29 (1984), 130–163.
- [33] HARVEY, D., GREGORY, J., HOFFERT, M., JAIN, A., LAL, M., LEEMANS, R., RAPER, S., WIGLEY, T., AND DE WOLDE, J. Introducción a los modelos climáticos simples utilizados en el segundo informe de evaluación del IPCC. *Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (OMM, WMO, PNUMA, UNEP). Grupo de Trabajo I del IPCC* (1997).
- [34] HIRSCH, M. W., SMALE, S., AND DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [35] IPCC. *Informe Especial del Grupo de Trabajo III del IPCC: Escenarios de emisiones*. Organización Meteorológica Mundial-Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente, 2000.
- [36] IPCC. *Climate Change 2013: The Physical Science Basis: Summary for Policy Makers; a Technical Summary and Frequently Asked Questions; a Report of Working Group I of the IPCC*. Cambridge University Press, 2013.
- [37] ISAÍAS, I. A. Q., ADAMS, D. K., ANGULO, Á. R., CELAYA, C. L., DE LA TORRE, J. L. O., HIDALGO, J. Z., ALBRECHTSEN, C. M. A., BIBRIEZCA, L. E. C., GARCÍA, A. G., CASTRO, G. G., ET AL. *Reporte Mexicano de Cambio Climático. Grupo I. Bases científicas, Modelos y Modelación*. Universidad Nacional Autónoma de México/Programa de Investigación en Cambio Climático, 2015.
- [38] JAIN, S., LALL, U., AND MANN, M. E. Seasonality and interannual variations of northern hemisphere temperature: Equator-to-pole gradient and ocean–land contrast. *Journal of Climate* 12, 4 (1999), 1086–1100.
- [39] JOHNSON, C. *Numerical solution of partial differential equations by the Finite Element Method*. Courier Corporation, 2012.
- [40] JONES, P., PARKER, D., OSBORN, T., AND BRIFFA, K. Global and hemispheric temperature anomalies—land and instrumental records. *Trends: a compendium of data on global change* (2006), 1–5.

- [41] JONES, P., WIGLEY, T., AND FARMER, G. Marine and land temperature data sets: a comparison and a look at recent trends. In *Developments in atmospheric science*, vol. 19. Elsevier, 1991, pp. 153–172.
- [42] KEELING, C. D., BACASTOW, R. B., BAINBRIDGE, A. E., EKDAHL JR, C. A., GUENTHER, P. R., WATERMAN, L. S., AND CHIN, J. F. Atmospheric carbon dioxide variations at mauna loa observatory, hawaii. *Tellus* 28, 6 (1976), 538–551.
- [43] KELLIE-SMITH, O., AND COX, P. M. Emergent dynamics of the climate–economy system in the anthropocene. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 369, 1938 (2011), 868–886.
- [44] KNOX, F., AND MCELROY, M. B. Changes in atmospheric co<sub>2</sub>: Influence of the marine biota at high latitude. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 89, D3 (1984), 4629–4637.
- [45] LADE, S., DONGES, J. F., FETZER, I., ANDERIES, J., BEER, C., CORNELL, S., GASSER, T., NORBERG, J., RICHARDSON, K., ROCKSTRÖM, J., ET AL. Analytically tractable climate–carbon cycle feedbacks under 21st century anthropogenic forcing. *Earth System Dynamics* (2018).
- [46] LASHOF, D. A. The dynamic greenhouse: feedback processes that may influence future concentrations of atmospheric trace gases and climatic change. *Climatic change* 14, 3 (1989), 213–242.
- [47] LE QUÉRÉ, C., ANDRES, R. J., BODEN, T., CONWAY, T., HOUGHTON, R. A., HOUSE, J. I., MARRLAND, G., PETERS, G. P., VAN DER WERF, G., AHLSTRÖM, A., ET AL. The global carbon budget 1959–2011. *Earth System Science Data Discussions* 5, 2 (2012), 1107–1157.
- [48] LENTON, T. M. Land and ocean carbon cycle feedback effects on global warming in a simple earth system model. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology* 52, 5 (2000), 1159–1188.
- [49] MARIANNE, B., KARAN, C., AND HEATH, L. *Actividades sobre uso de la tierra, cambio del uso de la tierra y silvicultura*. Fondo para el Medio Ambiente Mundial, 2012.
- [50] MARTÍN-CHIVELET, J. Ciclo del carbono y clima: la perspectiva geológica. *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra* 18, 1 (2010), 33–46.
- [51] MARTÍNEZ, M. F., AND OSNAYA, P. *Cambio climático: una visión desde México*. Instituto Nacional de Ecología, 2004.
- [52] MEINSHAUSEN, M., SMITH, S. J., CALVIN, K., DANIEL, J. S., KAINUMA, M., LAMARQUE, J.-F., MATSUMOTO, K., MONTZKA, S., RAPER, S., RIAHI, K., ET AL. The RCP greenhouse gas concentrations and their extensions from 1765 to 2300. *Climatic change* 109, 1-2 (2011), 213.

- [53] MOSS, R., BABIKER, W., BRINKMAN, S., CALVO, E., CARTER, T., EDMONDS, J., ELGIZOULI, I., EMORI, S., ERDA, L., HIBBARD, K., ET AL. *Towards new scenarios for the analysis of emissions: Climate change, impacts and response strategies*. Intergovernmental Panel on Climate Change, 2008.
- [54] MURRAY, J. *Mathematical biology II: spatial models and biomedical applications*, vol. 3. Springer-Verlag, 2001.
- [55] MYINT-U, T., AND DEBNATH, L. *Linear partial differential equations for scientists and engineers*. Birkhauser, 2007.
- [56] NAKICENOVIC, N., ALCAMO, J., GRUBLER, A., RIAHI, K., ROEHRL, R., ROGNER, H.-H., AND VICTOR, N. *Special report on emissions scenarios (SRES), a special report of Working Group III of the intergovernmental panel on climate change*. Cambridge University Press, 2000.
- [57] PLATTNER, G.-K., KNUTTI, R., JOOS, F., STOCKER, T., VON BLOH, W., BROVKIN, V., CAMERON, D., DRIESCHAERT, E., DUTKIEWICZ, S., EBY, M., ET AL. Long-term climate commitments projected with climate-carbon cycle models. *Journal of Climate* 21, 12 (2008), 2721–2751.
- [58] RANDERSON, J. T., LINDSAY, K., MUNOZ, E., FU, W., MOORE, J., HOFFMAN, F., MAHOWALD, N., AND DONEY, S. Multicentury changes in ocean and land contributions to the climate-carbon feedback. *Global Biogeochemical Cycles* 29, 6 (2015), 744–759.
- [59] ROE, G. Feedbacks, timescales, and seeing red. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 37 (2009), 93–115.
- [60] SABINE, C. L., FEELY, R. A., GRUBER, N., KEY, R. M., LEE, K., BULLISTER, J. L., WANNINKHOF, R., WONG, C., WALLACE, D. W., TILBROOK, B., ET AL. The oceanic sink for anthropogenic CO<sub>2</sub>. *Science* 305, 5682 (2004), 367–371.
- [61] SANTAMARÍA, J. Forzamiento radiativo y cambios químicos en la atmósfera. *XI Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica. Universidad Complutense de Madrid. Facultad Ciencias Químicas* (2010).
- [62] SCHLESINGER, M. Feedback analysis of results from energy balance and radiative-convective models. *The Potential Climatic Effects of Increasing Carbon Dioxide* 107 (1985).
- [63] SIEGENTHALER, U., AND SARMIENTO, J. L. Atmospheric carbon dioxide and the ocean. *Nature* 365, 6442 (1993), 119.

- [64] SZILI, L., AND TÓTH, J. On the origin of Turing instability. *Journal of Mathematical Chemistry* 22, 1 (1997), 39–53.
- [65] TRUSKEY, G. A., YUAN, F., AND KATZ, D. F. *Transport phenomena in biological systems*. Pearson/-Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, USA, 2004.
- [66] TURING, A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Bulletin of mathematical biology* 52, 1 (1990), 153–197.
- [67] VAN VUUREN, D. P., DEN ELZEN, M. G., LUCAS, P. L., EICKHOUT, B., STRENGERS, B. J., VAN RUIJVEN, B., WONINK, S., AND VAN HOUDT, R. Stabilizing greenhouse gas concentrations at low levels: an assessment of reduction strategies and costs. *Climatic change* 81, 2 (2007), 119–159.
- [68] VANEGAS, J., LANDINEZ, N., AND GARZÓN, D. Análisis de la inestabilidad de Turing en modelos biológicos. *Dyna* 76, 158 (2009), 123–134.
- [69] WERRITTY, A. D’Arcy Thompson’s on Growth and Form and the rediscovery of geometry within the geographic tradition. *Scottish Geographical Journal* 126, 4 (2010), 231–257.
- [70] WULLSCHLEGER, S. D., POST, W., AND KING, A. On the potential for a CO<sub>2</sub> fertilization effect in forests: estimates of the biotic growth factor based on 58 controlled-exposure studies. *Biotic Feedbacks in the Global Climatic System (eds Woodwell, GM and Mackenzie, FT)* (1995), 85–107.
- [71] XU, M., AND SHANG, H. Contribution of soil respiration to the global carbon equation. *Journal of plant physiology* 203 (2016), 16–28.
- [72] ZICKFELD, K., EBY, M., MATTHEWS, H. D., SCHMITTNER, A., AND WEAVER, A. J. Nonlinearity of carbon cycle feedbacks. *Journal of Climate* 24, 16 (2011), 4255–4275.