

# Inestabilidad de Turing para un modelo del ciclo global del carbono

Myrian S. González<sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Nacional Autónoma de Honduras*

8 de abril de 2021

## Resumen

En el estudio del sistema climático, diferentes resultados parten de la premisa que establece que en la atmósfera los gases de efecto invernadero (GEI) están bien mezclados, algunos ejemplos son los escenarios de concentraciones de GEI para proyecciones futuras en los que se apoyan métricas importantes del sistema, como las sensibilidades al carbono atmosférico y al clima. En este trabajo se hace un análisis de estabilidad, usando la técnica de patrones de Turing, para un modelo analítico del ciclo global del carbono. Para realizar este análisis, primero se presenta una condensación de la teoría que sostiene los resultados encontrados, esto es, la inestabilidad de Turing. Luego, se incluyen la descripción puntual del modelo y la metodología utilizada. Finalmente, se presentan algunos resultados interesantes en el contexto del cambio climático. Como principal aporte de los hallazgos presentados se destaca que no se ha encontrado evidencia que pruebe la no homogeneidad de GEI en la atmósfera.

Palabras clave: *Cambio climático, Problema de Sturm-Liouville, Sistema dinámico de la Tierra.*

## 1. Introducción

Para la comprensión de diferentes problemas de ciencias e ingeniería es necesario estudiar el comportamiento de la difusión en términos del espacio. Una estrategia que ha sido utilizada para abordar este tipo de problemas se remonta a los trabajos desarrollados en 1952 por el matemático británico Alan Turing comúnmente denominada como *patrones de Turing*.

Mediante algunos análisis de estabilidad Turing pretendía comprender mejor el funcionamiento de los patrones que se forman en la superficie exterior del cuerpo de algunos animales e insectos, un trabajo precedente en esta área lo desarrolló en 1917 el biólogo escocés D'Arcy Thompson [15]. Naturalmente, estos patrones son importantes debido a los servicios de defensa y comunión que brindan a la especie que los presenta. Si bien la aplicación inicial de los patrones de Turing fue en biología, pronto fueron utilizados para comprender mejor procesos de reacción difusión en áreas como neuroloía [1], genética

[2], química [13], entre otras.

La sección 2 hace un resumen de la teoría que sostiene en análisis de estabilidad de este documento. Se presenta una descripción del modelo del ciclo del carbono en la Sección 3. En la Sección 4 se describe categóricamente la metodología utilizada en el contexto del modelo aquí considerado. Los resultados encontrados referentes al análisis de estabilidad en el modelo se discuten en la Sección 5.

## 2. Inestabilidad de Turing

A través del estudio de las reacciones químicas que propiciaban los patrones, Turing estableció que en los sistemas se podían presentar diferentes inestabilidades, a saber, aquellas que oscilan en el tiempo, pero son independientes del espacio, las que varían en espacio pero no en tiempo y las que oscilan tanto tiempo como en espacio [14]. De esta manera, Turing conjeturó que los patrones en las especies se hacían presentes cuando ocurría una *inestabilidad por difusión* estacionaria en el tiempo, también denominada *inestabilidad de Turing* [3, 14], es decir, cuando el estado estacionario del sistema es estable

---

\*Correspondencia: myrian.gonzalez@unah.edu.hn

con pequeñas perturbaciones sin difusión pero inestable a pequeñas perturbaciones espaciales con difusión [9]. De esta manera, se puede definir el *espacio de Turing* conformado por un dominio del espacio de parámetros tal que el modelo es inestable a ciertas perturbaciones espaciales.

Existe amplia literatura dedicada a la inestabilidad de Turing en modelos de reacción difusión de diferentes áreas; para un primer acercamiento, sistemas unidimensionales de dos especies como el de Schnakenberg o el de Gierer-Meinhardt pueden resultar altamente valiosos por los aportes metodológicos que ofrece su relativa simplicidad.

Por la naturaleza del modelo estudiado en el presente trabajo, en esta sección se ofrecen detalles de interés para la comprensión de la inestabilidad de Turing en el caso de un modelo unidimensional en el espacio pero de más de dos especies, se sugiere consultar [4, 9] para mayores detalles. En este sentido, considere el sistema en una dimensión espacial de reacción difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}) + D\nabla^2 \mathbf{u}, \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

en donde  $\mathbf{u} : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $T$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  es el término no lineal que expresa la reacción,  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario y  $D$  es la matriz diagonal cuyos componentes constituyen los parámetros de difusión.

Considerando que la inestabilidad de Turing se presenta cuando el estado estacionario es estable si no hay difusión, entonces se suprime del modelo el término  $D\nabla^2 \mathbf{u}$  obteniendo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}), \quad (2)$$

y se prosigue a encontrar los estados estacionarios  $\mathbf{u}_0$ , esto es cuando  $f(\mathbf{u}) = 0$ . Como se desea garantizar la estabilidad con una pequeña perturbación del estado estacionario, considere el vector  $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  tal que  $|\mathbf{z}|$  es pequeño. Sustituyendo  $\mathbf{z}$  en (2) y haciendo un desarrollo en series de Taylor de orden 2, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{J}\mathbf{z}, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz Jacobiana evaluada en  $\mathbf{u}_0$ . De (3) se pueden obtener soluciones de la forma  $e^{\lambda t}$ , con  $\lambda$  autovalor de  $\mathbf{J}$ . Teoría robusta desarrollada en [4] establece que la estabilidad esta garantizada

siempre y cuando  $Re(\lambda) < 0$ , a partir de esta condición se obtienen algunas desigualdades que limitan el espacio de Turing del modelo.

Continuando con el análisis de estabilidad, se prosigue a estudiar el sistema considerando la difusión. Con un procedimiento para la linealización similar al descrito previamente se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{z} \quad (4)$$

Para resolver (4) inicialmente se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} Z''(x) + k^2 Z(x) = 0 \\ Z'(0) = Z'(a) = 0. \\ 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (5)$$

La ecuaciones de (5) definen un problema de Sturm-Liouville, cuya solución es de la forma  $\cos(n\pi x/a)$  donde  $k = n\pi/a$ , más detalles pueden ser consultados en [10]. En este contexto, a los valores de  $k$  se les denomina autovalores del problema (5).

A continuación se conjetura que (4) tiene por solución

$$\mathbf{z} = \mathbf{v}e^{\lambda t} Z(x), \quad (6)$$

con  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  fijo y no nulo, se destaca que tanto  $\mathbf{v}$  como  $\lambda$  son incógnitas. Sustituyendo (6) en (4) se llega a que las incógnitas de  $\mathbf{v}$  y  $\lambda$  deben satisfacer la siguiente igualdad

$$(\lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D})\mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Para encontrar una solución no trivial de (7) se debe cumplir que la matriz  $\lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D}$  sea singular, es decir,  $|\lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D}| = 0$ . Para que se de la inestabilidad de Turing es suficiente garantizar que al menos una de las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda I - \mathbf{J} + k^2 \mathbf{D}, \quad (8)$$

tenga parte real positiva. De esta manera, es posible obtener otras condiciones que limitan el espacio de Turing antes mencionado.

### 3. Descripción del modelo

El modelo utilizado para analizar la dinámica de carbono es la amótsera fue publicado en el año 2018 por Lade et al. en [7]. En rasgos generales, este modelo del ciclo global del carbono es una versión estilizada de modelos del sistema de la Tierra (ESM en inglés), muchas simplificaciones se han acordado en

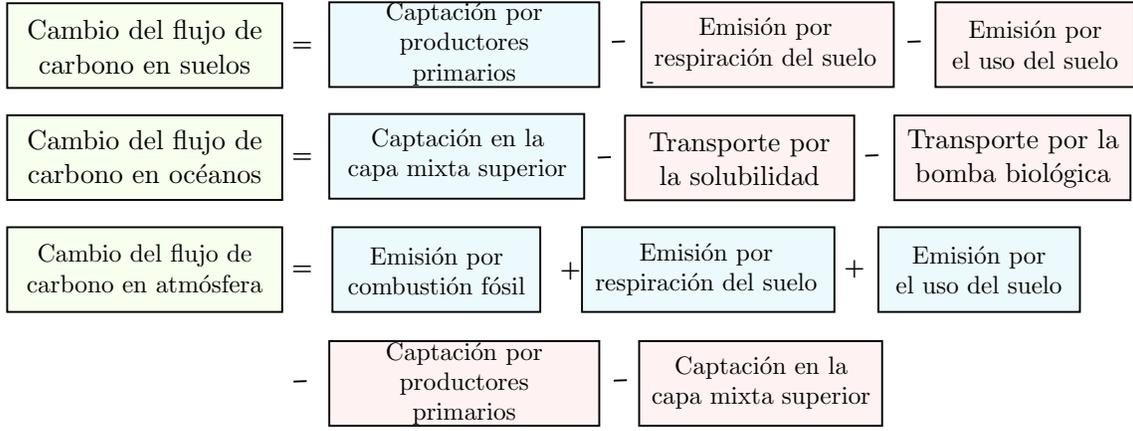


Figura 1: Descripción de los procesos incluidos para modelar el ciclo global del carbono

su planteamiento, como en el caso de la estratificación oceánica y las dinámicas de la biósfera terrestre; sin embargo, para los propósitos de este trabajo, el modelo brinda resultados valiosos que marcan un posible camino para modelos más robustos. Una descripción esquemática de los procesos que se incluyen para modelar los flujos de carbono se ilustran en la Figura 1.

Las ecuaciones constitutivas del modelo, que describen los flujos de carbono en suelos ( $C_t$ ), capa mixta superior del océano o simplemente *océanos* ( $C_m$ ), atmósfera ( $C_a$ ) y el cambio en temperatura ( $\Delta T$ ), se describen seguidamente.

*Carbono en suelos:*

$$\frac{dC_t}{dt} = PPN_0 \left( 1 + K_C \log \left( \frac{C_a}{C_{a0}} \right) - \frac{C_t}{C_{t0}} Q_R^{\Delta T/10} \right) - LUC(t), \quad (9)$$

*Carbono en océanos:*

$$\begin{aligned} \frac{dC_m}{dt} = & \frac{D_a C_{m0}}{r p(C_{m0}, 0)} (C_a - p(C_m, \Delta T)) \\ & - \omega_0 (1 - \omega_T \Delta T) (C_m - C_{m0}) \\ & - B(\Delta T) + B(0), \end{aligned} \quad (10)$$

*Carbono en atmósfera:*

$$\begin{aligned} \frac{dC_a}{dt} = & e(t) - NPP_0 \left( 1 + K_c \log \left( \frac{C_a}{C_{a0}} \right) \right) \\ & + \frac{NPP_0}{C_{t0}} Q_R^{\Delta T/10} + LUC(t) \\ & - \frac{D_a C_{m0}}{r C_{a0}} (C_a - p(C_m, \Delta T)). \end{aligned} \quad (11)$$

*Cambio en la temperatura*

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\lambda}{\log 2} \log \left( \frac{C_a}{C_{a0}} \right) - \Delta T \right) \quad (12)$$

La función  $LUC$  denota el carbono emitido por el uso del suelo, incluye procesos como el cambio por la silvicultura [8], mientras que la función  $e$  expresa el carbono liberado por combustión fósil y producción de petróleo e industria.

Tanto en la función  $LUC$  como en  $e$  no se ha utilizado una expresión analítica, en su lugar se utilizan datos históricos reconstruidos desde el año 1750 hasta el 2011 [5, 11] y trayectorias de concentración representativas (RCP en inglés) para el 2012 hasta el año 2100 [12].

Para finalizar, la función

$$p(C_m, \Delta T) \equiv C_{a0} / (1 - D_T \Delta T) (C_m / C_{m0})^r$$

cuantifica la relación entre el cambio de temperatura y el carbono en los océanos. Los valores de los coeficientes utilizados se muestran en el Cuadro 1, todos han sido tomados de [7].

Con las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) el modelo que incluye dos variables independientes, una para tiempo y otra para el espacio, se puede expresar de forma simplificada como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial t} &= \mathcal{F}_1 \\ \frac{\partial C_m}{\partial t} &= \mathcal{F}_2 + \delta_2 \nabla^2 C_m \\ \frac{\partial C_a}{\partial t} &= \mathcal{F}_3 + \delta_3 \nabla^2 C_a \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial t} &= \mathcal{F}_4 + \delta_4 \nabla^2 \Delta T, \end{aligned} \quad (13)$$

Símbolo	Nombre	Valor
<b>Valores iniciales</b>		
$C_{a_0}$	Carbono atmosférico estimado en la época preindustrial	589 PgC
$C_{t_0}$	Carbono terrestre estimado en la época preindustrial	1875 PgC
$C_{m_0}$	Carbono oceánico estimado en la época preindustrial	900 PgC
<b>Parámetros usados para la modelación del carbono terrestre</b>		
$Q_R$	Dependencia de la temperatura de la respiración terrestre	1.72
$PPN_0$	Absorción neta de carbono de la atmósfera en la época preindustrial	55 PgC/año
$Kc$	Efecto de la fertilización	0.3
<b>Parámetros usados para la modelación del carbono en océanos</b>		
$B_0$	Bomba biológica en la época preindustrial	13 PgC/año
$B_T$	Temperatura dependiente de la bomba biológica	$0,023/K$
$\omega_0$	Tasa de solubilidad de la bomba biológica	0.1/año
$\omega_T$	Debilitamiento de la solubilidad de la bomba biológica bajo el cambio climático	$0,1/K$
$D_a$	Tasa de equilibrio de carbono en la capa mixta superior del océano	1/año
$D_T$	Efecto de la solubilidad en la temperatura	$0,0423/K$
$r$	Factor Revelle	12.5
<b>Parámetros usados para la modelación del cambio de temperatura</b>		
$\tau$	Tiempo de respuesta para un retraso climático	4 años
$\lambda$	Factor de sensibilidad del clima	$1,8K$

Cuadro 1: Valores de parámetros utilizados en el modelo

tal que  $\mathcal{F}$  son las funciones que modelan los flujos de carbono y  $\delta$  es el coeficiente de difusión, tomando a  $\delta_1 = 0$  debido a que no es usual que exista la difusión de carbono terrestre y  $0 \leq \delta_i$  para  $i = 2, 3, 4$ .

#### 4. Descripción del método

A continuación se indican algunas consideraciones que detallan el análisis de inestabilidad realizado:

- i. Debido a la complejidad que representa hacer un análisis analítico de la inestabilidad de Turing de (13) dicho análisis se hizo numéricamente por medio de un software matemático libre.
- ii. Los valores de los coeficientes de difusión,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_4$ , no tienen un sustento experimental en este análisis; en este contexto, los parámetros se contemplaron haciendo un mapeo equidistante en una región positiva de  $\mathbb{R}^3$ .
- iii. La metodología realizada, en términos generales, fue así: primero, se selecciona una tripleta para los coeficientes de difusión  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  y  $\delta_4$  del mapeo indicado en el inciso anterior. Después, se toma un dominio discreto de valores para el autovalor  $k$  de (7) y con ayuda de un método

numérico se encuentra la máxima parte real de las raíces de (8), en este punto se debe tener presente que si alguna de estas raíces tiene parte real positiva entonces se daría lugar a la inestabilidad de Turing.

Finalmente, con el conjunto de valores discretos de  $k$  y sus respectivas máximas partes reales se forma una curva que puede ser representada en el plano, tal que permita acotar su comportamiento en alguna región en específico.

#### 5. Resultados

En la Figura 2 se muestran las curvas para las diferentes triadas seleccionadas para los coeficientes de difusión, tal que  $0 < \delta_i \leq 1$  para  $i = 2, 3, 4$ . Como se puede apreciar dichas curvas se ubican en una región donde su rango es negativo, lo cual indica que en ninguno de los casos considerados se presenta la inestabilidad de Turing para el sistema (13). Por lo tanto, se afirma que en este modelo no se presenta una inestabilidad de Turing en base al experimento realizado y la continuidad de los parámetros considerados. En el contexto del fenómeno, con el estudio de la inestabilidad de Turing realizado se confirma que existe homogeneidad en la concentración de car-

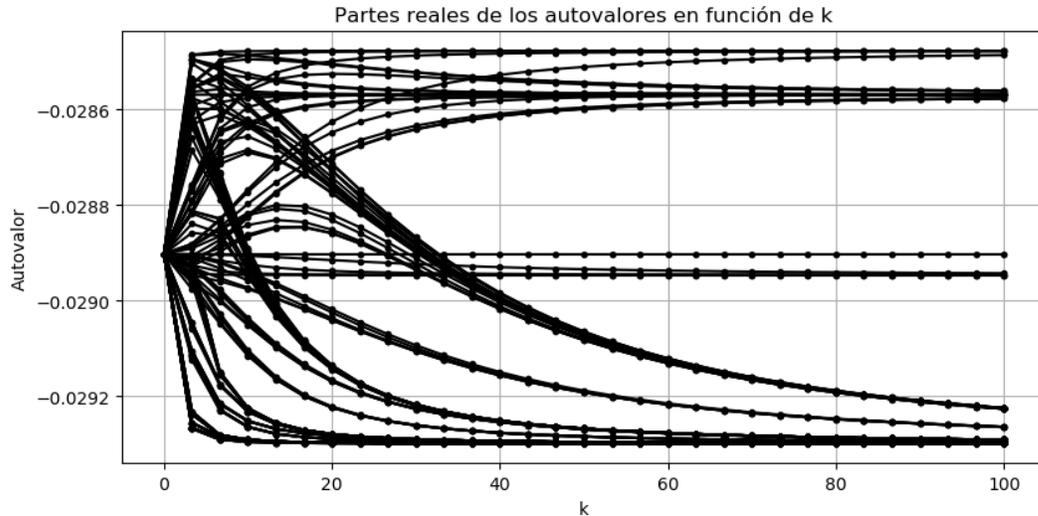


Figura 2: Distribución de la parte real de los autovalores del polinomio característico del modelo con términos de difusión

bono en las suelos, océanos y atmósfera. En especial, este resultado es un aporte importante para modelos sobre el cambio climático y las políticas públicas actuales [6], debido a que realza cómo los cambios en la composición atmosférica se distribuyen uniformemente en el planeta.

## Referencias

- [1] CARTWRIGHT, J. H. Labyrinthine turing pattern formation in the cerebral cortex. *Journal of theoretical biology* 217, 1 (2002), 97–103.
- [2] GAFFNEY, E., AND MONK, N. Gene expression time delays and turing pattern formation systems. *Bulletin of mathematical biology* 68, 1 (2006), 99–130.
- [3] GONZÁLEZ, L. A., VANEGAS, J. C., AND GARZÓN, D. A. Formación de patrones en sistemas de reacción-difusión en dominios crecientes. *Revista Internacional de Métodos Numéricos* 25, 2 (2009), 145–161.
- [4] HIRSCH, M. W., SMALE, S., AND DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [5] ICOS. Global carbon budget. <https://www.globalcarbonproject.org/carbonbudget/>. Accedido Nov-2020.
- [6] IPCC. *Climate Change 2013: The Physical Science Basis: Summary for Policy Makers; a Technical Summary and Frequently Asked Questions; a Report of Working Group I of the IPCC*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] LADE, S., DONGES, J. F., FETZER, I., ANDERIES, J., BEER, C., CORNELL, S., GASSE, T., NORBERG, J., RICHARDSON, K., ROCKSTRÖM, J., ET AL. Analytically tractable climate-carbon cycle feedbacks under 21st century anthropogenic forcing. *Earth System Dynamics* (2018).
- [8] MARIANNE, B., KARAN, C., AND HEATH, L. *Actividades sobre uso de la tierra, cambio del uso de la tierra y silvicultura*. Fondo para el Medio Ambiente Mundial, 2012.
- [9] MURRAY, J. *Mathematical biology II: spatial models and biomedical applications*, vol. 3. Springer-Verlag, 2001.
- [10] MYINT-U, T., AND DEBNATH, L. *Linear partial differential equations for scientists and engineers*. Birkhauser, 2007.
- [11] NOAA. Anomalías del cambio de temperatura media mundial superficial. <https://www.ncdc.noaa.gov/monitoring-references/faq/anomalies.php>. Accedido Nov-2020.
- [12] PICIR. RCP scenario. <http://www.pik-potsdam.de/mmalte/rcps/>. Accedido Nov-2020.
- [13] SZILI, L., AND TÓTH, J. On the origin of turing instability. *Journal of Mathematical Chemistry* 22, 1 (1997), 39–53.

- [14] VANEGAS, J., LANDINEZ, N., AND GARZÓN, D. Análisis de la inestabilidad de turing en modelos biológicos. *Dyna* 76, 158 (2009), 123–134.
- [15] WERRITTY, A. D’Arcy Thompson’s on Growth and Form and the rediscovery of geometry within the geographic tradition. *Scottish Geographical Journal* 126, 4 (2010), 231–257.