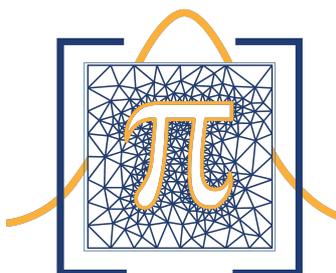


Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación
Maestría en Matemática



**SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA DE PROCESOS DE FILTRACIÓN
UTILIZANDO UN MODELO DE MEDIO FILTRANTE BASADO
EN DIAGRAMAS DE VORONOI-LAGUERRE**

Tesis presentada por:
Roberto C. Duarte



Tesis para obtener el grado de
Máster en Matemática con orientación en Estadística Matemática

Tegucigalpa, Honduras, 2022

Asesor:
Jorge A. Destephen

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de tablas	V
Agradecimientos	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
1. Introducción	1
2. Fundamentos y revisión bibliográfica	3
2.1. Mecanismos fundamentales de filtración	4
2.2. Revisión de modelos existentes para medios filtrantes	6
2.3. Elementos para análisis estadístico y método de Monte Carlo	10
2.3.1. Simulación de variables aleatorias	13
2.3.2. Análisis estadístico	15
2.3.2.1. El método de Monte Carlo	16
3. Modelación de medios filtrantes utilizando diagramas de Voronoi-Laguerre	21
3.1. Diagramas de Voronoi-Laguerre	22
3.1.1. Diagramas de Voronoi-Laguerre	24
3.1.2. Empaquetamiento de círculos	25
4. Resultados y Análisis	30
4.1. Estimación del tamaño de la muestra	30
4.2. Simulaciones de procesos de filtración para filtros con poros de igual tamaño	35
4.2.1. Partículas de igual tamaño	36
4.2.2. Partículas de diferentes tamaños	37
4.3. Simulaciones de procesos de filtración para filtros con distribuciones de tamaños de poros determinadas por Coulter Porometer	40
4.3.1. Modelo de una capa	40
4.3.2. Modelo de tres capas	43
5. Conclusiones y trabajos futuros	46
5.1. Conclusiones	46
5.2. Trabajos futuros	47
Bibliografía	48

Índice de figuras

2.1. Material fibroso y filtro	3
2.2. Mecanismos de filtración	6
2.3. Modelo cilíndrico de Langmuir	7
2.4. Modelo de Happel y Kuwabara	8
2.5. Modelo para microestructura granular	9
2.6. Modelo tridimensional de fibras	10
2.7. Medio multicapa	10
2.8. Método de la transformación inversa	14
2.9. Método de la transformación inversa para una variable aleatoria discreta	14
2.10. Algoritmo para generar eficiencia	15
2.11. Distribución asintótica del estimador $\hat{\theta}$	19
3.1. Diagrama de Voronoi para un conjunto de puntos	23
3.2. Propiedad de círculos tangentes en dos celdas adyacentes	23
3.3. Representación geométrica de la distancia de Laguerre	24
3.4. Envoltente del círculo C_i con radio r_i , con respecto a r_j	26
3.5. Condiciones para la intersección de dos envoltentes	26
3.6. Intersección de envoltentes de C_i y C_j con respecto al radio r_k	26
3.7. Conjuntos de partida	28
3.8. Modelo de una capa generado	28
3.9. Imagen de material fibroso captada con un microscopio electrónico	28
4.1. Distribución de diámetro de partículas	30
4.2. Distribución de radio de los poros	30
4.3. Capas de radios 100, 200, 300 y 400 μm	32
4.4. Capas de radios 500, 600, 700 y 800 μm	32
4.5. Convergencia del método para radios de 100, 200, 300 y 400 μm	33
4.6. Convergencia del método para radios de 500, 600, 700 y 800 μm	33
4.7. Cambio en la varianza al aumentar el tamaño de muestra para el cálculo de la eficiencia	34
4.8. Varianza de las eficiencias por tamaño de radio de capa	34
4.9. Distribución de tamaños de poros medida y recalculada de los modelos para diferentes tamaños de muestra	35
4.10. Capa de radio 800 μm con poros de diámetro de 14 μm	36
4.11. Convergencia del método	36
4.12. Captura de partículas con 13 μm de diámetro	37
4.13. Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(10, 18)$	37
4.14. Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(10, 15)$	38
4.15. Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(13, 18)$	38
4.16. Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(15, 18)$	38

4.17. Distribución acumulada y densidad del tamaño de poros	40
4.18. Convergencia del método con distribución de poros determinadas por Coulter Porometer	40
4.19. Estimaciones dinámicas de la eficiencia del filtro para diferentes tamaños de partículas	41
4.20. Partículas capturadas en la superficie del filtro	42
4.21. Partículas capturadas sobre partículas	42
4.22. Estimaciones dinámicas de la eficiencia del filtro para diferentes tamaños de partículas.	43
4.23. Simulación del modelo del filtro de tres capas	44

Índice de tablas

4.1.	Parámetros de partículas, velocidad de fluido e incremento de tiempo . . .	32
4.2.	Eficiencia en función del tamaño de muestra	32
4.3.	Estimación con partículas de $13 \mu m$ de diámetro	36
4.4.	Estimación con partículas que siguen una distribución $U(10, 18)$	37
4.5.	Estimación con partículas que siguen una distribución $U(10, 15)$	38
4.6.	Estimación con partículas que siguen una distribución $U(13, 18)$	38
4.7.	Valores p del test de normalidad de Anderson-Darling	39
4.8.	Varianzas máximas para la eficiencia por tamaño de partículas modelo de una capa	42
4.9.	Varianzas máximas para la eficiencia por tamaño de partículas modelo multicapa.	43

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por iluminar mi camino y mi mente para poder realizar esta tesis.

A mi madre por su cariño y esfuerzo para ayudarme a llegar al lugar en el que estoy y seguir cosechando éxitos en mi vida profesional.

A mi querida Nancy por haber sido un apoyo incondicional en este proceso todos estos años y siempre darme ánimo en los momentos cuando más los necesitaba.

Al doctor Jorge Destephen por su paciencia y confianza en la elaboración de este trabajo, su orientación como asesor de esta tesis me permitió aprender mucho sobre el tema y a motivarme a seguir investigando en el área.

A mis amigos Jesús, Javier y Maylin por haber sido un ejemplo a seguir en mis estudios de licenciatura y brindarme su amistad todos estos años.

Roberto C. Duarte

Resumen

Este trabajo presenta un modelo computacional de medios filtrantes construido aplicando diagramas de Voronoi-Laguerre para representar materiales fibrosos no tejidos. El modelo de filtro cuasi 3D se construye a partir de las propiedades medidas del material como la porosidad, el diámetro medio de la fibra, el grosor y la distribución del tamaño de los poros. Se utiliza el modelo computacional del material para realizar simulaciones de Monte Carlo, aplicando mecanismos básicos de filtración. Las simulaciones de los procesos de filtración incluyeron las siguientes interacciones: partícula-poro, partícula-fibra y partícula-partícula. Los cálculos de la eficiencia del filtro, para diferentes distribuciones de tamaño de partículas y poros, concuerdan con la teoría general de filtración. El modelo permitió rastrear y ubicar las partículas capturadas en poros o fibras, lo que permite visualizar la estructura del medio filtrante con las partículas.

Palabras claves: Monte Carlo, diagramas de Voronoi-Laguerre, modelación de filtración.

Abstract

This work presents a computational model of filter media constructed applying Voronoi-Laguerre diagrams to represent nonwoven fibrous materials. The quasi 3D filter model was built from the measured properties of the material, such as porosity, mean fiber diameter, thickness, and pore size distribution. The computational model is used to perform Monte Carlo simulations, applying basic filtration mechanisms. The simulations of the filtration processes included the following interactions: particle-pore, particle-fiber, and particle-particle. Filter efficiency calculations for different pore and particle size distributions are consistent with general filtration theory. The model allowed tracing and locating the captured particles in pores or fibers, which allows visualizing the structure of the filter medium with the particles.

Keywords: Monte Carlo, Voronoi-Laguerre diagrams, Filtration modeling

Capítulo 1

Introducción

La separación de partículas contaminantes de líquidos y gases es un proceso muy importante en la industria de alimentos, farmacéutica, de semiconductores, de sistemas de lubricación, purificación de agua, aire acondicionado, limpieza del aire de polvo y virus [30, 20].

La contaminación del aire con partículas muy pequeñas provenientes de diversas fuentes (industria, vehículos, agricultura, polvo, etc.) representa un peligro para la salud humana cuando dichas partículas son inhaladas. Una apropiada filtración del aire puede controlar el nivel de estas partículas y por tanto ayudar a reducir los problemas de salud en la población. En los hospitales, especialmente en las salas de operación, se ha demostrado que el uso de filtros tiene una enorme importancia en limitar la propagación de infecciones [30].

La limpieza de fluidos hidráulicos y del aire para combustión es clave en un apropiado mantenimiento de maquinaria y vehículos. La vida útil de los motores y muchas componentes de máquinas aumenta considerablemente al disponer de filtros eficientes. La industria de alimentos y farmacéutica requiere de altos niveles de pureza en los materiales que utiliza, así como también en los ambientes de trabajo, para poder garantizar la calidad de sus productos.

La industria electrónica, indispensable en esta era, necesita de procesos de filtración al máximo de eficiencia ya que las partículas contaminantes podrían ser incluso más grandes que las mismas componentes electrónicas.

La mayor parte de los filtros de aire y para fluidos hidráulicas son, hoy en día, diseñados sobre la base de materiales fibrosos no tejidos [20, 30]. Por todas las aplicaciones explicadas se justifica la investigación en modelación matemática de medios filtrantes.

Para remover partículas de diámetro mayor de $1 \mu m$ los materiales fibrosos no-tejidos han sido utilizados extensivamente para proveer niveles de pureza deseados [20]. La eficacia de un filtro se caracteriza por su eficiencia y capacidad. La eficiencia de un material de filtración se puede definir como la razón entre el número de partículas mayores que un tamaño dado capturadas en el filtro y el número de partículas mayores que ese mismo tamaño en el fluido de entrada. La capacidad del filtro se define como la masa de partículas por unidad de área que es capaz de retener sin sufrir daño, determina la vida útil del filtro [10].

Los materiales fibrosos tienen una estructura geométrica compleja, caracterizada por su anisotropía y heterogeneidad [20]. La modelación matemática del medio filtrante fibroso tiene una gran utilidad para la estimación de la eficiencia haciendo simulaciones de los procesos de filtración.

En esta tesis nos enfocamos en el desarrollo de un modelo geométrico para medios filtrantes fibrosos que permita no solamente estimar la eficiencia del filtro, sino que, además, permita realizar análisis del medio filtrante y del proceso de filtración.

En el capítulo 2 se presenta en resumen una investigación bibliográfica acerca de las diferentes formas de abordar el problema de modelado de procesos de filtración, conceptos básicos del método de Monte Carlo y las técnicas para el análisis estadístico.

En el capítulo 3 se explica la metodología basada en diagramas de Voronoi- Laguerre para construir los modelos computacionales del medio filtrante. Se presentan los algoritmos implementados en R, ilustrados con ejemplos de modelos construidos.

En el capítulo 4 se describen los resultados con el análisis correspondiente. Se inicia mostrando la metodología para seleccionar el tamaño de muestra del medio filtrante modelado, luego se realizan simulaciones para varios casos de procesos de filtración donde se estima la eficiencia en función del tiempo y de tamaño de partículas. Además, se presentan visualizaciones en dos y cuasi tres dimensiones.

Se finaliza con las conclusiones y planteamientos para trabajos futuros.

Capítulo 2

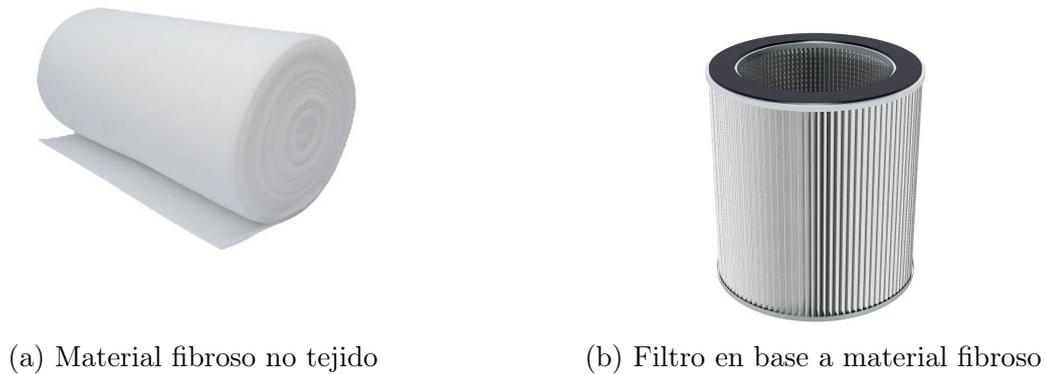
Fundamentos y revisión bibliográfica

La predicción de la eficacia de materiales de filtración requiere la descripción de la estructura geométrica del medio poroso, selección de mecanismos de filtración y dinámica del flujo de fluido-partícula a través del medio poroso. Los materiales fibrosos no tejidos consisten de una red de fibras entrelazadas que crean poros a través de los cuales fluye el fluido del proceso. El flujo de suspensiones a través de medios porosos es un fenómeno muy complejo debido a la diversidad de mecanismos de filtración involucrados. Los mecanismos de filtración que operan en un proceso particular de filtración dependen del tamaño de las partículas, tipo de medio poroso, velocidades de flujo y de las interacciones mecánicas y físico-químicas del sistema partícula-fluido-filtro[10].

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo de un material fibroso no tejido y un filtro en base a este material.

Los mecanismos de filtración e interacciones considerados en esta investigación fueron: captura de partículas por tamizado, captura de partículas por poros bloqueados y captura de partículas en las fibras. Los últimos tres mecanismos mencionados involucran interacciones partícula-poro, partícula-partícula y partícula-fibra respectivamente.

Figura 2.1: Material fibroso y filtro



Fuente: <https://www.pdblowers.com/product/485-polyester-filter-element/>
<https://www.indiamart.com/chemitexglobalmumbai/polyester-air-filter-roll.html>

2.1. Mecanismos fundamentales de filtración

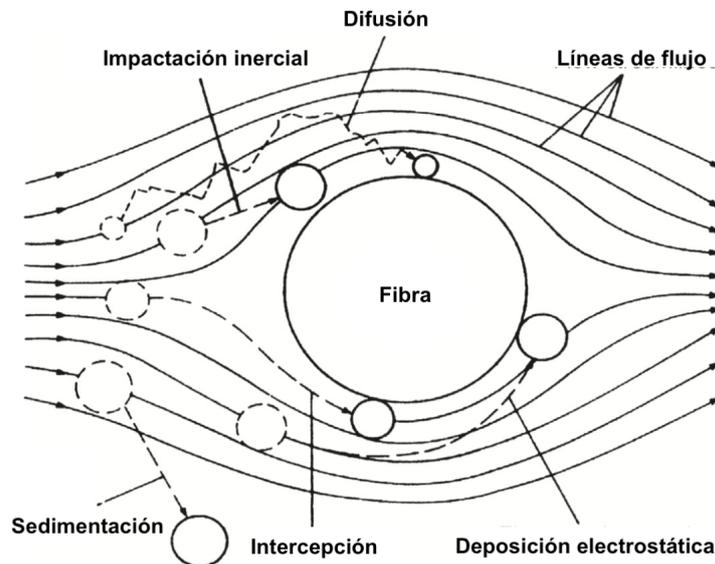
El objetivo principal de la filtración es la separación de fluidos de sólidos, ya sea porque nos interesa el fluido, por ejemplo, en el caso de los procesos de purificación de agua o también puede ser de nuestro interés el sólido mismo, por ejemplo, la separación de metales valiosos como el oro. Consideremos una partícula que se transporta con un fluido a través de medio filtrante, [29] define los siguientes mecanismos de captura de partículas:

- **Sedimentación, o asentamiento por gravedad:** aunque no es estrictamente un mecanismo de filtración, es importante tener en cuenta que las partículas más grandes y más densas pueden depositarse dentro de un sistema de filtración y potencialmente acumularse y afectar el rendimiento del sistema (esto puede ser un problema mayor si las partículas forman una escala o cemento juntas).
- **Tamizado:** si la partícula es más grande que los poros en el medio filtrante y no tiene suficiente inercia para dañar el medio, entonces se retendrá. En general el tamizado es un mecanismo que retiene las partículas de mayor tamaño.

- **La impactación inercial:** ocurre cuando la partícula no sigue la línea de flujo del fluido, sino que continúa en su camino existente para interceptar con el medio filtrante. La probabilidad de que esto ocurra depende del impulso de la partícula (y, por lo tanto, de la velocidad del fluido). Si este es un mecanismo importante de interacción, entonces el grado de paso de sólidos dependerá de la velocidad de flujo a través del filtro, siendo iguales todas las demás condiciones, es decir, temperatura, densidad, viscosidad.
- **Intercepción:** la partícula, siguiendo una línea de corriente, entra en contacto con el medio filtrante y se retiene. Se supone que el flujo de fluido es laminar y la probabilidad de captura a través de este mecanismo depende de la relación de tamaño de partícula a poro, y el enlace que se forma entre la partícula y el medio filtrante. Una vez más, la velocidad del fluido puede tener un efecto en este proceso.
- **Difusión:** dependiendo de las densidades de fluido y partículas y el tamaño de partícula, el movimiento de una partícula estará influenciado tanto por la línea de corriente general del fluido como por el movimiento browniano, un movimiento aparentemente aleatorio causado por colisiones con moléculas más pequeñas en el fluido esto puede dirigir la partícula al medio filtrante, donde puede permanecer dependiendo de la interacción partícula / medio.
- **Deposición electrostática:** en este caso, la carga superficial de la partícula puede ser opuesta a la de una fibra o poro en el medio filtrante, haciendo que su camino se desvíe hacia el medio donde permanece. También puede ocurrir un proceso análogo de deposición magnética.

En la Figura 2.2 se presenta una ilustración de los mecanismos discutidos previamente. Esta figura esta basada en un flujo perpendicular al eje de la fibra.

Figura 2.2: Mecanismos de filtración



Fuente: Figura tomada de [10]

2.2. Revisión de modelos existentes para medios filtrantes

Existen dos teorías principales para abordar los procesos de filtración en medios no tejidos, la teoría de modelos celulares y la teoría de canales, estas teorías son discutidas en [13]. La teoría de canales está basada en los procesos de filtración a través de lechos empaquetados no fibrosos como la arena, esta también es conocida como el modelo de tubos capilares, asume el medio como un conjunto de tubos cilíndricos que van de una superficie del medio a otra, no necesariamente en forma perpendicular a la superficie del medio. Esta teoría se puede aplicar a los medios filtrantes no tejidos en los procesos de filtración de líquidos.

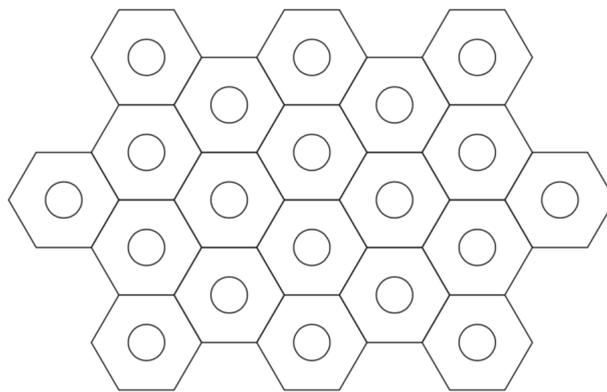
Por otra parte la teoría del modelo celular y el modelo de arrastre, los cuales fueron desarrolladas para los procesos de filtración de aire. La fibras son representadas como cilindros, esta teoría supone una serie de cilindros circulares, cada uno de ellos en una celda rodeada por envolturas cilíndricas. Wakeman y Tarleton [31] aplican el modelo celular al proceso de filtración de líquidos.

Una descripción microscópica de un proceso de filtración considera el filtro como un ensamble de colectores, su descripción caracteriza la estructura geométrica del material de filtración de forma que permita establecer relaciones con las propiedades macroscópicas. Entre los modelos microscópicos destacan el modelo de tubos capilares, los modelos basados en la teoría de poros, modelos de barrera y los modelos tridimensionales de mallas superpuestas [14].

También hay investigadores trabajando en el desarrollo de modelos computacionales tridimensionales aplicando procesamiento de imágenes [26, 24]. Los diagramas de Voronoi ampliamente usados para crear particiones en dos y tres dimensiones también han sido usados para modelar medios filtrantes [4].

Albrecht [1] y Sell [28] fueron de los primeros en realizar trabajos de patrones de flujo al rededor de conjuntos de cilindros paralelos, esto puede ser considerado como los primeros avances en los modelos cilíndricos, siendo el trabajo de Albrecht considerado como el pionero en este tipo de modelos. Los primeros enfoques del modelo cilíndrico de Langmuir [18] consistían en una serie de cilindros paralelos a la dirección del flujo, cada fibra era representada mediante un cilindro, el cual estaba rodeado por un espacio vacío en forma de hexágono, limitando con los espacios vacíos de las fibras adyacentes, formando así una especie de panal, Figura 2.3.

Figura 2.3: Modelo cilíndrico de Langmuir



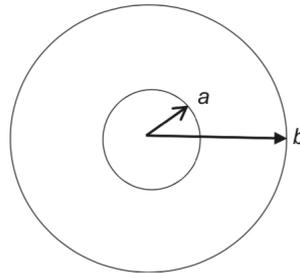
Fuente: Figura tomada de [13]

Langmuir reconoció que su modelo no representaba medios filtrantes reales por dos razones:

1. Las fibras de un filtro real tienen su eje aproximadamente paralelo a la superficie del medio.
2. Las fibras no son paralelas entre sí, sino que se cruzan en todos los ángulos y su distribución en el espacio es mucho menor que en el modelo.

El modelo de Langmuir fue diseñado para el estudio de filtración de aerosoles y lo basó para un fluido gaseoso. Happel [11] y Kuwabara [17] resolvieron el problema del flujo transversal. Ambas soluciones estaban basadas en dos cilindros concéntricos que se utilizan para representar un modelo de un fluido que fluye a través de un conjunto de cilindros, observe la Figura 2.4, este modelo es muy similar al modelo de Langmuir.

Figura 2.4: Modelo de Happel y Kuwabara



Fuente: Figura tomada de [13]

Happel hizo las siguientes suposiciones en el modelo:

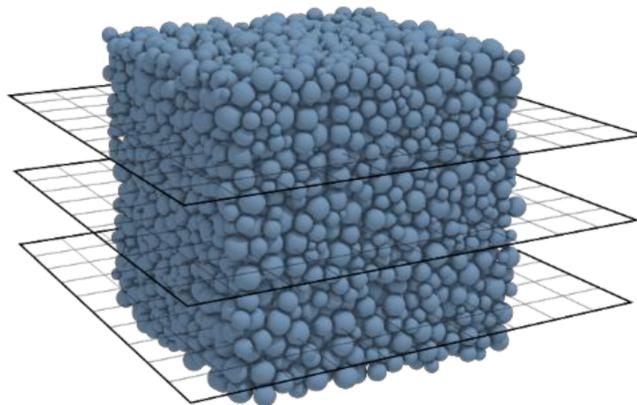
1. No hay deslizamiento en los límites de las celdas, a y b .
2. La trayectoria libre media de las moléculas de gas es muy pequeña en comparación con la dimensión del cilindro interior.
3. La forma de la sección transversal de la celda está representada por un círculo, cuya área es igual que la sección transversal de la geometría de celda real. En efecto, el límite exterior de la celda en b es un cilindro.

Ha habido muchas actualizaciones sobre las teorías de Kuwabara y Happel. Pitch [22, 23] modificó el modelo de Kuwabara asumiendo deslizamiento en la superficie del cilindro interno. Brown [3] menciona que la fuerza del modelo celular es su simplicidad. Brown observa que, en un medio real, no todas las fibras son perpendiculares al flujo ni son de diámetro uniforme, además la sección transversal de la fibra no es necesariamente circular. Otra observación de Brown es que la densidad del empaque varía según el medio.

Kirsch y Funchs [16, 15] trabajaron un modelo de abanico, este enfoque consistía en planos sucesivos de fibras paralelas; sin embargo, las fibras en cada plano giran en un ángulo arbitrario con respecto a las fibras paralelas en el plano anterior. Este modelo se basa en una dispersión homogénea de fibras, en los filtros reales, las fibras no se dispersan de manera tan homogénea. El modelo de abanico predijo una mayor resistencia que los filtros reales, por lo que se introdujo un factor de falta de homogeneidad para hacer el modelo más real [9].

Los modelos tridimensionales para medios filtrantes aplican técnicas de geometría computacional como el uso de los diagramas de Voronoi. Para modelar microestructuras poliédricas granulares se han usado técnicas como las particiones de Laguerre [24] permitiendo obtener una aproximación de la forma y tamaño de los granos reales del material, en la Figura 2.5 podemos observar un modelo construido con esta técnica.

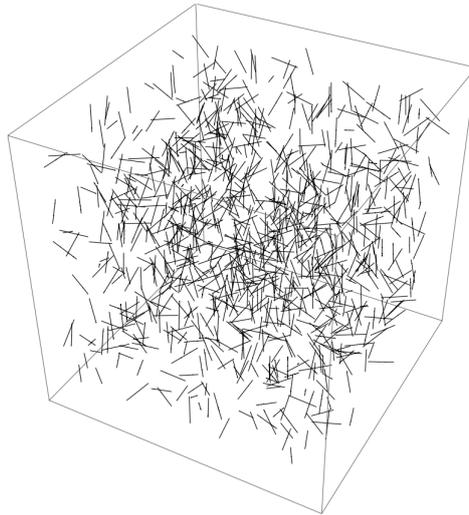
Figura 2.5: Modelo para microestructura granular



Fuente: Figura tomada de [24]

Otra idea bastante utilizada consiste en la construcción de modelos tridimensionales de fibras generados aleatoriamente [27] como se muestra en la Figura 2.6.

Figura 2.6: Modelo tridimensional de fibras

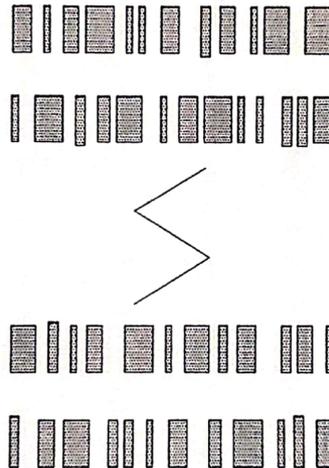


Fuente: Figura tomada de [27]

La complejidad de estos modelos tridimensionales vuelve prácticamente imposible resolver las ecuaciones de Navier-Stokes las cuales, en teoría, describen el flujo del fluido y las partículas, por esto la popularidad ganada por el método de simulación de Monte Carlo para abordar de forma más sencilla el problema del movimiento del fluido y de partículas a través de medios porosos.

El modelo del filtro propuesto en este trabajo combina características del modelo de tubos capilares, de los modelos basados en la teoría de poros y del modelo tridimensional de mallas superpuestas, ver la Figura 2.7. El propósito fundamental de este trabajo fue desarrollar un modelo del medio filtrante que sea capaz de predecir dinámicamente la eficacia de filtros fibrosos y que tenga la flexibilidad para analizar cambios en porosidad, forma de deposición de las partículas, tortuosidad de la trayectoria de las partículas que pasan y conectividad del medio.

Figura 2.7: Medio multicapa



Fuente: Figura tomada de [6]

2.3. Elementos para análisis estadístico y método de Monte Carlo

Definición 2.3.1. Definimos como un sistema a una colección de entidades relacionadas, a veces llamadas componentes o elementos que pueden tomar valores lógicos o numéricos, que forman un todo completo.

Los componentes del sistema realizan ciertas funciones que generan cambios en el estado del sistema.

El proceso de filtración es el sistema de estudio en esta tesis, las componentes del sistema son el medio filtrante, los fluidos y partículas contaminantes que interactúan con el filtro.

Algunas de las características que pueden definir el estado del proceso de filtración son:

1. **La eficiencia:** depende de qué tan fina es la filtración. Un filtro eficiente evita el desgaste prematuro de un motor por ejemplo.
2. **La vida útil:** depende de la cantidad de contaminación que se pueda bloquear antes de que el filtro deje de funcionar.

Coulson [5] define la filtración como:

«Se denomina filtración al proceso unitario de separación de sólidos en una suspensión a través de un medio mecánico poroso, también llamados tamiz, criba, cedazo o filtro».

Una vez definido el sistema de estudio, se debe proceder a construir un modelo mediante el cual se pueda predecir el comportamiento del sistema. Nos referimos por modelo a una abstracción del sistema real que pueda ser usada para generar las estimaciones. Este modelo debe ser lo mas parecido posible al sistema real de estudio e incorporar los elementos más importantes del mismo.

El modelo usado en este trabajo es el propuesto por [6], donde se detalla la geometría del medio filtrante y una forma de cuantificar la eficacia del filtro.

La representación geométrica del medio filtrante es un medio multicapa, donde cada capa tiene una distribución inicial de tamaño de poros. Para la construcción del medio artificial son consideradas las siguientes características:

1. ϵ : Porosidad
2. L : Grosor del medio filtrante
3. D_f : Diámetro promedio de la fibra

Cada capa es representada mediante una superficie sólida llena de poros, además se considera que existen múltiples conexiones de los poros de una capa a otra en el medio filtrante. La geometría de las capas es detallada más adelante en otro capítulo.

Las distribuciones de tamaños de poros fueron determinadas mediante el mecanismo Coulter Porometer [6], de esta forma podemos conocer una distribución empírica del tamaño de los poros, esta distribución se obtiene de forma acumulada, en la siguiente sección se detalla un algoritmo para obtener una muestra aleatoria de una variable aleatoria mediante su función de distribución acumulada.

2.3.1. Simulación de variables aleatorias

Una vez establecida la estrategia para el desarrollo del modelo para el sistema en cuestión se debe proceder a buscar una técnica para la estimación de las propiedades de interés. En este trabajo se construye el modelo del filtro y la simulación del movimiento de partículas utilizando simulaciones de Monte Carlo.

La simulación de Monte Carlo hace uso de distribuciones de probabilidad para realizar experimentos con el objetivo de llegar, después de un número de iteraciones, a lo que pasaría en un sistema real.

El objetivo es tratar de imitar computacionalmente el modelo, de forma tal que este sirva como generador de observaciones de las características del sistema que son de nuestro interés. El modelo a su vez está formado por diferentes componentes aleatorias que interactúan con él (distribución de partículas, distribución de tamaño de poros, trayectoria de las partículas a través del filtro).

Poder generar observaciones de una variable aleatoria se hace fundamental al utilizar este tipo de modelos de simulación, en la actualidad existen herramientas computacionales muy potentes (como R), para generar números y muestras aleatorias de alguna distribución paramétrica conocida. Las distribuciones de tamaños de poros es determinada por el equipo Coulter Porometer [6], a partir de esta distribución debemos obtener muestras aleatorias para la construcción de el medio filtrante, para este objetivo se utilizó el método de la transformada inversa para generar variables aleatorias. A continuación veremos algunas definiciones y resultados previos a estudiar el esquema general de la aplicación del método de Monte Carlo.

Definición 2.3.2. Dada una variable aleatoria X , una muestra aleatoria, es un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, obtenidas a partir de la variable aleatoria X y que se distribuyen igual que la misma.

Definición 2.3.3. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada (cdf) F . Como F es una función no decreciente, la función inversa F^{-1} puede ser definida como:

$$F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) \geq y, 0 \leq y \leq 1\}$$

Si $U \sim U(0, 1)$ entonces

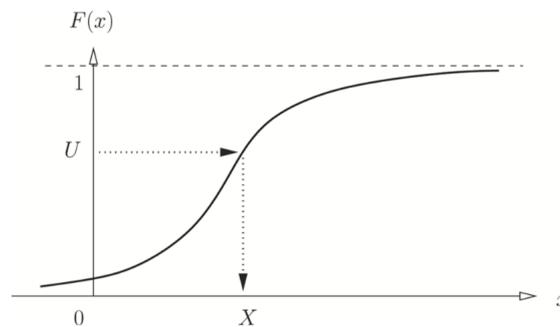
$$X = F^{-1}(U)$$

Tiene a F como cdf, es decir, como F es invertible y $P(U \leq u) = u$ tenemos que

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Así, para generar una variable aleatoria X con cdf F , debemos tomar $U \sim U(0, 1)$ y encontrar $X = F^{-1}(U)$. la Figura 2.8 ilustra en que consiste el método y en el Algoritmo 1 se detalla los pasos para realizar el método.

Figura 2.8: Método de la transformación inversa



Fuente: Figura tomada de [25]

Algoritmo 1 Método de la transformada inversa

Entrada: Función de distribución acumulada F .

Salida: Variable aleatoria X con una distribución de acuerdo a F .

- 1: Generar U de una distribución $U(0, 1)$
 - 2: $X \leftarrow F^{-1}(U)$
 - 3: **devolver** X
-

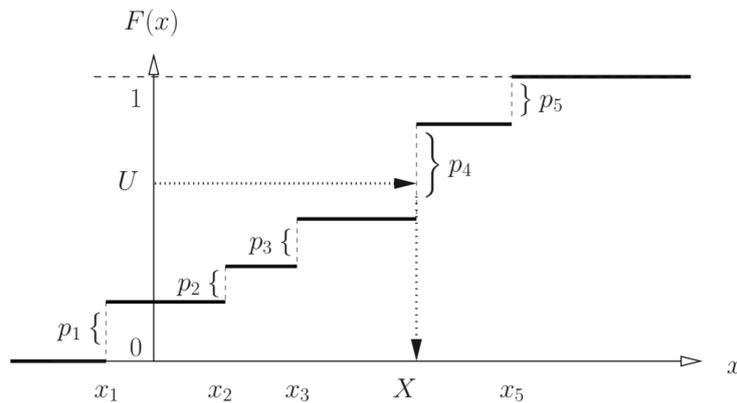
La definición anterior es para una variable aleatoria del tipo continuo, este método se puede ajustar fácilmente para variables aleatorias del tipo discreto

Sea X una variable aleatoria discreta con $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$ con $\sum p_i = 1$ y $x_1 < x_2 < \dots$. La cdf F de X está dada por

$$F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i, \quad i=1, 2, \dots$$

en la Figura 2.9 se ilustra el método de la transformada inversa para variables aleatorias discretas.

Figura 2.9: Método de la transformación inversa para una variable aleatoria discreta



Fuente: Figura tomada de [25]

Luego el método de la transformada inversa para variables aleatorias discretas es:

Algoritmo 2 Método de la transformada inversa para variables aleatorias discretas

Entrada: Función de distribución acumulada F .

Salida: Variable aleatoria X con una distribución de acuerdo a F .

- 1: Generar U de una distribución $U(0, 1)$
 - 2: Encontrar el entero positivo k más pequeño, tal que $U \leq F(x_k)$.
 - 3: $X \leftarrow x_k$
 - 4: **devolver** X
-

El Algoritmo 3 muestra los pasos para generar una observación de la eficiencia del filtro bajo diferentes condiciones que serán detalladas en capítulos posteriores.

Algoritmo 3 Pasos para generar la eficiencia del filtro

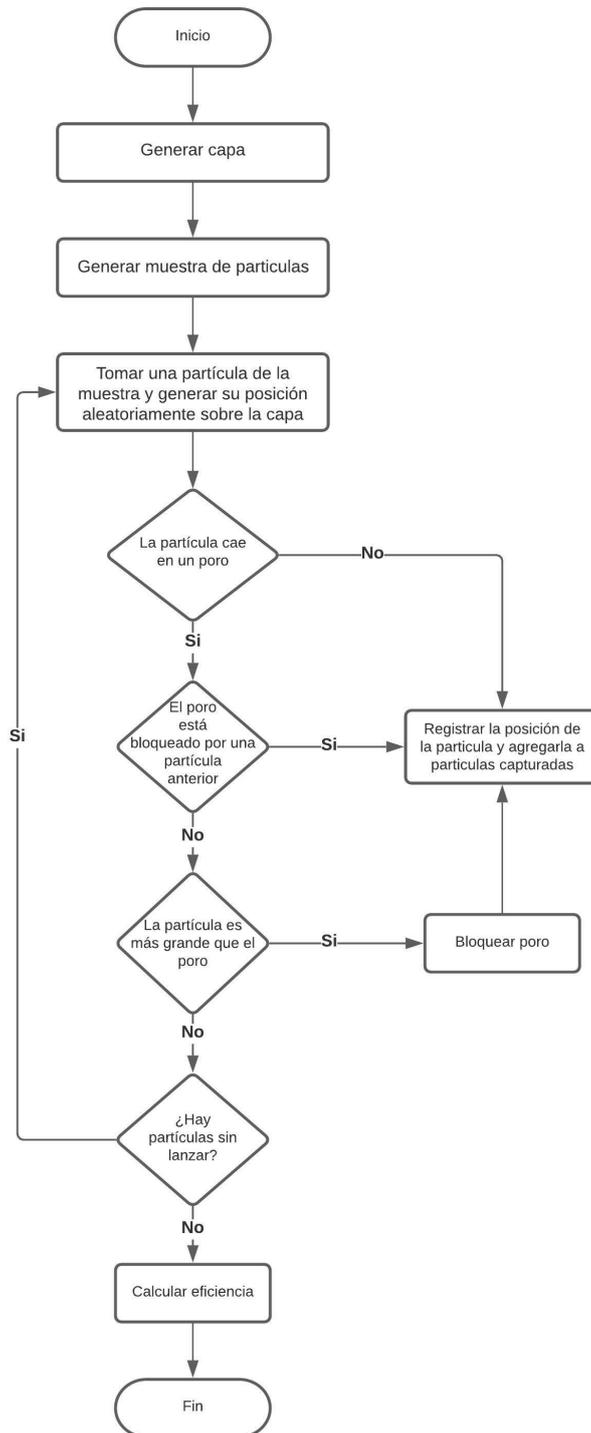
Entrada: Capa o capas del filtro, muestra de partículas, parámetros de los fluidos y contaminantes

Salida: Eficiencia del filtro.

- 1: Lanzar una cantidad de partículas por un intervalo de tiempo sobre las capas del medio filtrante.
 - 2: Contar la cantidad de partículas que pasaron las capas del filtro
 - 3: Calcular la eficiencia dividiendo el número de partículas que pasaron sobre el número de partículas lanzadas.
 - 4: **devolver** Eficiencia
-

La Figura 2.10 muestra un diagrama de flujo del proceso de lanzamiento y captura de partículas para el cálculo de la eficiencia.

Figura 2.10: Algoritmo para generar eficiencia



Fuente: Elaboración propia¹

¹Figuras sin fuente son de elaboración propia

2.3.2. Análisis estadístico

Ya hemos definido un modelo computacional capaz de generar una observación del proceso de filtración, con esto somos capaces de generar muestras aleatorias y poder hacer inferencia sobre la eficiencia del filtro. Los intervalos de confianza nos permiten encontrar un intervalo en el cual, con cierto nivel de confianza, podemos acotar la eficiencia del medio.

Definición 2.3.4. Sea θ un parámetro desconocido, definimos un intervalo de confianza de nivel $(1 - \alpha) \times 100\%$ a un intervalo definido por dos valores $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ tal que

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$

Si llamamos θ a la eficiencia real del filtro, entonces podemos encontrar, a partir de una muestra aleatoria, un intervalo de nivel $(1 - \alpha) \times 100\%$ que la contenga.

Para construir los intervalos de confianza es necesario definir un estimador puntual, $\hat{\theta}$ para el parámetro θ y conocer su distribución, cuando la distribución de el estimador es conocida, podemos construir intervalos de confianza de nivel exacto, mediante una estadística pivotal o podemos construir intervalos de confianza de nivel asintótico con ayuda del Teorema Central del Límite y otros resultados.

2.3.2.1. El método de Monte Carlo

El principio del método de Monte Carlo es estimar una cantidad desconocida haciendo uso de distribuciones de probabilidad que pueden modelar el fenómeno real, con esto buscamos reducir la incertidumbre estadística del modelo.

Suponga que queremos determinar la esperanza

$$\theta = E[H(X)] = \int H(x)f_X(x)dx$$

Donde X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$, y $H(X)$ es una función de valor real. Asumimos que θ no puede ser evaluada analíticamente y debemos realizar simulaciones para poder aproximar la integral. Un estimador insesgado

para θ es:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(x_i)$$

Particularmente, si tomamos $H(X) = X$, la identidad, entonces podemos hacer la siguiente estimación:

$$E[X] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Esto es, la media muestral calculada a partir de una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_N , este estimador cumple las propiedades de ser insesgado y además consistente para el parámetro θ , estas propiedades se definen a continuación [12].

Definición 2.3.5. Sea X_1, X_2, \dots, X_N una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con función de distribución $f_X(x)$ y sea θ un parámetro poblacional. Sea $T = T(X_1, X_2, \dots, X_N)$ un estadístico. Decimos que T es un estimador insesgado para el parámetro θ si

$$E(T) = \theta.$$

Definición 2.3.6 (Convergencia en probabilidad). Sea $\{X_N\}$ una secuencia de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria definida en un espacio muestral. Decimos que X_N converge en probabilidad a X si, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|X_N - X| \geq \epsilon] = 0$$

y lo escribimos como $X_N \xrightarrow{P} X$.

Teorema 2.3.1 (Ley débil de grandes números). Sea $\{X_N\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Sea $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$. Entonces

$$\bar{X}_N \xrightarrow{P} \mu$$

Definición 2.3.7 (Consistencia). Sea X una variable aleatoria con cdf $F_X(x)$ y sea θ un parámetro poblacional. Sea X_1, X_2, \dots, X_N una muestra de la distribución de X y sea T_N un estadístico. Decimos que T_N es un estimador consistente para θ si

$$T_N \xrightarrow{P} \theta$$

Para especificar la precisión de una estimación, es decir, qué tan cerca está el estimador $\hat{\theta}$ del parámetro real θ no basta con presentar una estimación puntual, sino que es necesario acompañarla de un intervalo de confianza, para construirlo, recordemos el teorema central del límite[12]:

Definición 2.3.8 (Convergencia en distribución). Sea $\{X_N\}$ una sucesión de variables aleatorias y sea X una variable aleatoria. Sea F_{X_N} y F_X las funciones de distribución acumuladas de X_N y X respectivamente. Sea $C(F_X)$ el conjunto de todos los puntos donde F_X es continua. Decimos que X_N converge en distribución a X si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{X_N}(x) = F_X(x), \forall x \in C(F_X)$$

Denotamos esta convergencia por

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

Teorema 2.3.2 (Teorema Central del Límite). Sea X_1, X_2, \dots, X_N observaciones de una muestra aleatoria de una distribución con esperanza finita μ y varianza positiva σ^2 .

Entonces la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sqrt{N}\sigma}$$

converge en distribución a una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1.

Si llamamos $\mu = \theta$ y $\bar{X} = \hat{\theta}$ entonces, podemos reescribir el resultado del TCL de la forma:

$$\frac{\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Teorema 2.3.3 (Teorema de Slutsky). Sean $X_n \xrightarrow{D} X$ y $Y_n \xrightarrow{P} c$ entonces $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$

Podemos escribir la varianza como:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \int (x - \theta)^2 f_X(x) dx$$

la cual puede ser estimada por:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\theta})^2$$

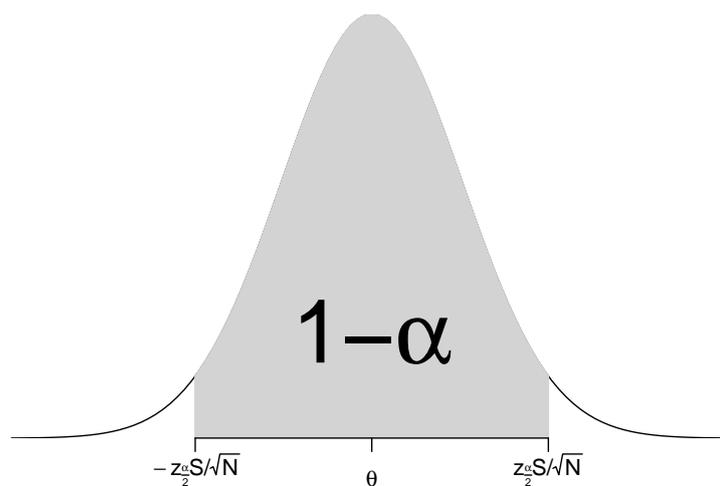
S^2 es un estimador consistente para σ^2 [12], es decir que $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$, esto implica que $\frac{S^2}{\sigma^2} \xrightarrow{P} 1$, luego por el teorema de Slutsky tenemos que:

$$\frac{\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)}{S} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Hemos encontrado una distribución asintótica para el estimador $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} \approx N\left(\theta, \frac{S^2}{N}\right)$$

Figura 2.11: Distribución asintótica del estimador $\hat{\theta}$



Con este resultado podemos construir un intervalo de confianza asintótico de nivel $1 - \alpha$, en la figura 2.11 podemos observar la distribución asintótica de $\hat{\theta}$.

$$P\left(\hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{N}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{N}}\right) \approx 1 - \alpha$$

Entonces, el esquema general de la aplicación del método para este problema sería:

1. Generar una muestra aleatoria x_1, x_2, \dots, x_N de eficiencias mediante el algoritmo 3, de forma que N sea lo suficientemente grande para garantizar la distribución asintótica.
2. Obtener una estimación puntual y una estimación por intervalos de confianza para el parámetro θ de la eficiencia.

Una vez definidos los fundamentos teóricos del problema de filtración, haber definido un algoritmo para la simulación de las eficiencias y proporcionar un método para resolver el problema de la estimación, podemos pasar a hablar sobre como representar computacionalmente la forma geométrica del medio filtrante. En el capítulo siguiente se habla sobre la simulación de la geometría del medio filtrante utilizando diagramas de Voronoi-Laguerre y el método de la intersección de envolventes.

Capítulo 3

Modelación de medios filtrantes utilizando diagramas de Voronoi-Laguerre

El objetivo de modelar un medio poroso es obtener una representación tan cercana como sea posible a la geometría del filtro real, para hacer esto, se toman ciertas características del filtro real y en base a ellas se genera un filtro artificial computacionalmente (modelo). En este trabajo el material fibroso no-tejido se modeló basándose en la porosidad (ϵ), espesor (L), diámetro promedio de fibras D_f y distribución de tamaño de poros del material filtrante. Con el objeto de incluir en el modelo la interconectividad de los poros se consideró que el medio poroso está formado por capas.

El medio filtrante artificial es representado tomando como base la idea utilizada en [7] el cual es multicapa, donde cada capa de pequeño espesor consiste de un conjunto de tubos cilíndricos huecos conectados por el material, cada poro en la capa es representado por un cilindro, cuyo radio es calculado a partir de una distribución de tamaños de poros que corresponde al material específico real. Se asume que la distribución de tamaños de poros para un material filtrante se determina con técnicas como la del punto de burbuja (The Buble Point Test).

Las desventajas del modelo de medio usado en [7] son: no permite ubicar las partículas capturadas en el sitio de captura en un sistema de coordenadas, no permite dar seguimiento

a las partículas no capturadas y no permite hacer visualizaciones del medio filtrante con las partículas capturadas.

En este trabajo superamos las limitaciones antes mencionadas aplicando los diagramas de Voronoi-Laguerre para modelar el medio filtrante; esto permite que, además de estimar la eficiencia del material filtrante, podremos estudiar la estructura dinámica de las partículas capturadas en el medio y con las visualizaciones cuasi 3D tener la capacidad de comparar con resultados experimentales. También se abre la posibilidad de estudiar propiedades topológicas del medio y del proceso de filtración, como ser la conectividad y la tortuosidad.

Existen otras técnicas que están siendo usadas para modelar medios fibrosos no-tejidos. Algunas técnicas aplicadas a procesos con ciertas características y otras que requieren recursos tecnológicos como microscopios electrónicos y con un alto costo computacional. Ninguna técnica hasta el momento resuelve completamente el problema de modelación de la estructura geométrica de materiales fibrosos no-tejidos.

3.1. Diagramas de Voronoi-Laguerre

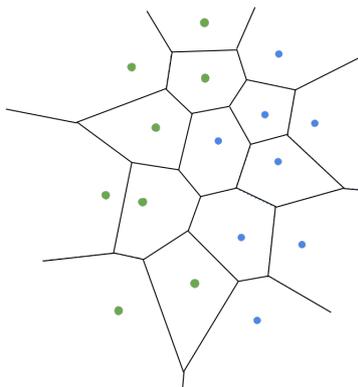
Un diagrama de Voronoi se define como una partición del plano en regiones, las cuales están determinadas mediante la distancia a los puntos en la región respecto a un punto o conjunto de puntos en específico, a continuación una definición formal de los diagramas de Voronoi descrita en [19].

Definición 3.1.1. Dado un conjunto finito de puntos del plano, P , el diagrama de Voronoi de P , $Vor(P)$, es la descomposición del plano en las regiones asociadas, por proximidad, a cada uno de los puntos en P . Dichas regiones se denominan regiones de Voronoi.

La región de Voronoi para un punto $p_i \in P$ es:

$$Vor(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 | d(x, p_i) \leq d(x, p_j) \forall j \neq i\}$$

Figura 3.1: Diagrama de Voronoi para un conjunto de puntos



Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagrama_de_Voronoi.png

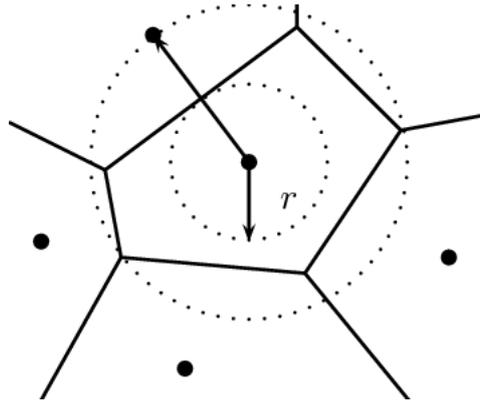
La Figura 3.1 es un ejemplo de un diagrama de Voronoi para un conjunto de puntos, cada punto en color verde o azul es llamado *generador* y cada polígono que envuelve los generadores son conocidos como *regiones de Voronoi*, *poligonos de Voronoi* o *celdas de Voronoi*. Es decir, las regiones de Voronoi están compuestas por los puntos en el plano que se encuentran a una distancia menor o igual al generador, que a cualquier otro generador en el dominio.

La importancia de los diagramas de Voronoi en esta tesis es que estos poseen ciertas propiedades que podamos aprovechar para la creación del medio artificial, la propiedad más importante es la siguiente:

Propiedad 3.1.1. Dadas dos celdas de Voronoi adyacentes, entonces la distancia de sus respectivos generadores a su arista en común es igual.

Esta propiedad nos permite concluir que dos regiones adyacentes pueden contener dos círculos que son tangentes en un punto, la Figura 3.2 nos ilustra lo mencionado. Esta propiedad tiene una limitante, y es que los círculos que son tangentes en un punto tienen que tener el mismo radio, pero existe una variante de los diagramas de Voronoi que permite conservar la propiedad en mención y sin la limitante de los radios iguales, esta variante se trata de los diagramas de Voronoi en la geometría de Laguerre.

Figura 3.2: Propiedad de círculos tangentes en dos celdas adyacentes



Fuente: Figura tomada de [8]

3.1.1. Diagramas de Voronoi-Laguerre

La representación geométrica de las capas del filtro consta de un conjunto de círculos disjuntos, cuando los generadores de las regiones en los diagramas de voronoi son sustituidos por círculos se puede lograr la representación deseada para las capas del filtro, para generar las regiones de Voronoi para un conjunto de círculos se debe cambiar la distancia euclidea por la distancia de Laguerre.

Definición 3.1.2. Sean p_i y r_i el centro y el radio de un círculo C_i y sea $p \in \mathbb{R}^2$, se define la distancia de Laguerre del punto p al círculo C_i como:

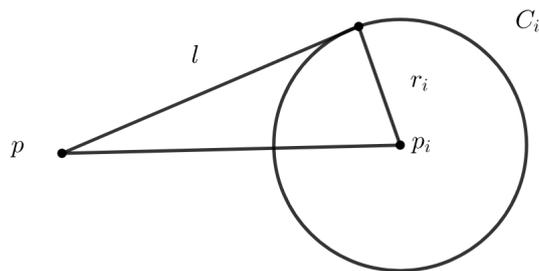
$$d_L(p, C_i) = d(p, p_i)^2 - r_i^2$$

Donde $d(p, p_i)$ representa la distancia euclidea entre el punto p y p_i .

Si definimos l como la recta que pasa por el punto p y es tangente a la circunferencia C_i , geoméricamente la distancia de Laguerre es el cuadrado de la distancia entre el punto p y el punto de tangencia de l en C_i . La Figura 3.3 ilustra la distancia de Laguerre [4].

Tomando la distancia de Laguerre como una distancia entre un círculo y un punto en \mathbb{R}^2 , podemos definir una región de Voronoi-Laguerre como:

Figura 3.3: Representación geométrica de la distancia de Laguerre



Definición 3.1.3. Dado un conjunto finito de círculos en el plano, P , el diagrama de Voronoi-Laguerre de P , $\text{VorLag}(P)$, es la descomposición del plano en las regiones asociadas, por proximidad, a cada uno de los puntos en P . Dichas regiones se denominan regiones de Voronoi-Laguerre.

La región de Voronoi-Laguerre para un círculo C_i de radio $r_i \in P$ es:

$$\text{VorLag}(C_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_L(x, C_i) \leq d_L(x, C_j) \forall j \neq i\}.$$

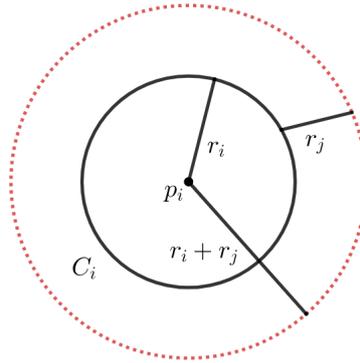
3.1.2. Empaquetamiento de círculos

El término de empaquetamiento de círculo se usa generalmente para evocar el estudio matemático de los arreglos de círculos no superpuestas que llenan un dominio determinado. Un problema típico de empaquetamiento de círculos es determinar el reparto de las partículas (círculos) que maximiza la densidad en el dominio. De hecho, la densidad es la proporción de espacio lleno por las partículas que tienen esta partición [2].

El algoritmo utilizado en esta tesis para generar el empaquetamiento es el algoritmo de intersección de envolventes, el cual consiste en colocar un círculo tangente en un punto a dos círculos previamente generados.

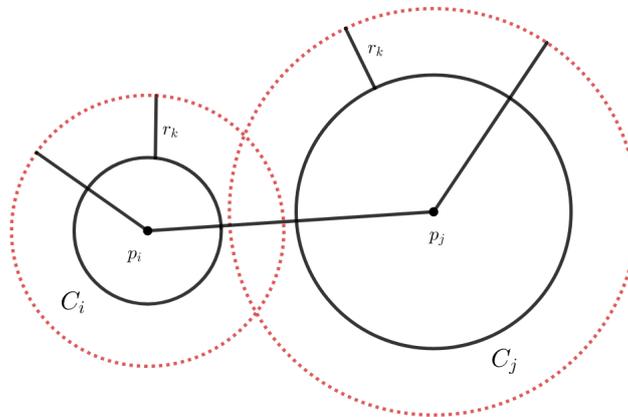
Definición 3.1.4. Dado un círculo C_i de radio r_i centrado en p_i , y dado un $r_j \in \mathbb{R}$, definimos la envolvente del círculo C_i con respecto a r_j como el círculo de radio $r_i + r_j$ centrado en p_i .

Figura 3.4: Envoltente del círculo C_i con radio r_i , con respecto a r_j



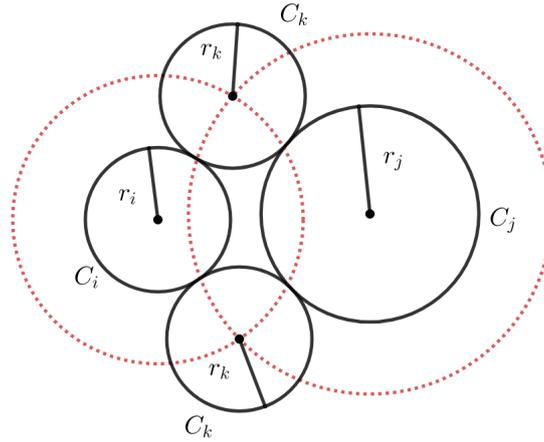
El algoritmo de intersección de envoltentes consiste en que a partir de dos círculos C_i y C_j de radios r_i y r_j , se puede ubicar un tercer círculo C_k de radio r_k , centrado en uno de los puntos de intersección de las envoltentes de C_i y C_j con respecto al radio r_k , por supuesto que los centros de los círculos C_i y C_k deben estar al menos a una distancia de $|r_i - r_j|$ y no superior a $r_i + r_j + 2r_k$, para que sus envoltentes puedan intersectarse.

Figura 3.5: Condiciones para la intersección de dos envoltentes



En la Figura 3.5 se ilustra las condiciones para las cuales dos envoltentes puedan intersectarse.

Figura 3.6: Intersección de envolventes de C_i y C_j con respecto al radio r_k



En la Figura 3.6 se ilustra la intersección de envolventes de los círculos C_i y C_j con respecto a r_k , claramente para cada par de círculos hay dos opciones para ubicar un tercer círculo C_k . A continuación se detalla el algoritmo usado para encontrar la intersección de envolventes. Vamos a denotar como $C_i^{r_k}$ a la envolvente del círculo i con respecto al radio r_k .

Algoritmo 4 Intersección de envolventes

Entrada: Radios y coordenadas de los centros de dos círculos C_i, C_j , radio de un círculo C_k .

Salida: Puntos de intersección de las envolventes de C_i y C_j con respecto al radio de C_k .

- 1: $R_i \leftarrow r_i + r_k$
 - 2: $R_j \leftarrow r_j + r_k$
 - 3: $d \leftarrow \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$
 - 4: $l \leftarrow \frac{R_i^2 + R_j^2 + d^2}{2d}$
 - 5: $h \leftarrow \sqrt{R_i^2 - l^2}$
 - 6: $x_{k1} \leftarrow \frac{l}{d}(x_j - x_i) + \frac{h}{d}(y_j - y_i) + x_i$
 - 7: $y_{k1} \leftarrow \frac{l}{d}(y_j - y_i) - \frac{h}{d}(x_j - x_i) + y_i$
 - 8: $x_{k2} \leftarrow \frac{l}{d}(x_j - x_i) - \frac{h}{d}(y_j - y_i) + x_i$
 - 9: $y_{k2} \leftarrow \frac{l}{d}(y_j - y_i) + \frac{h}{d}(x_j - x_i) + y_i$
 - 10: $p_{k1} \leftarrow (x_{k1}, y_{k1})$
 - 11: $p_{k2} \leftarrow (x_{k2}, y_{k2})$
 - 12: **devolver** p_{k1}, p_{k2}
-

El Algoritmo 4 devuelve dos posiciones posibles para el círculo nuevo. La decisión sobre cuál intersección tomar en cuenta dependerá si son disjuntos a otros círculos ubicados previamente.

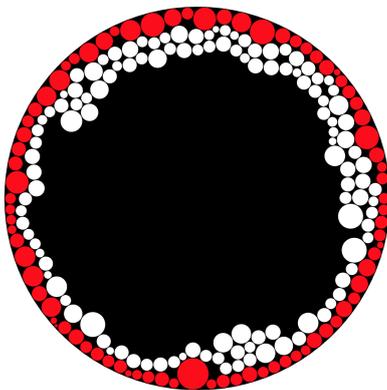
Para comenzar el llenado de círculos disjuntos sobre un dominio, se debe establecer un conjunto inicial de partida, esto se puede hacer de dos formas:

1. Comenzar con dos círculos tangentes en un punto ubicados de forma aleatoria dentro del dominio fijado, crear la partición de adentro hacia afuera.
2. Delimitar la frontera del dominio con una secuencia de círculos tangentes, crear la partición de afuera hacia adentro.

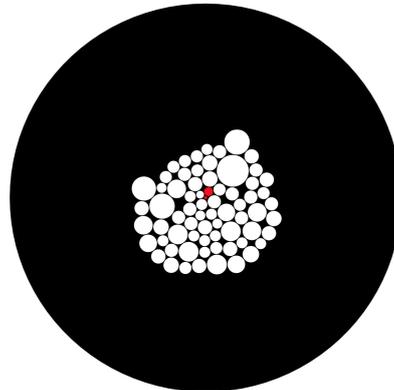
Ambos mecanismos pueden ser válidos, sin embargo, ambos muestran ciertas desventajas que el otro soluciona, en el mecanismo 1, de adentro hacia afuera, presenta problemas al momento de llegar a la frontera del dominio, mientras que el mecanismo 2, puede dejar un área considerable sin particionar en el centro del dominio. Los experimentos realizados con ambos mecanismos dan resultados más favorables para el mecanismo 2, por lo tanto ese es el mecanismo elegido para los experimentos finales.

En la Figura 3.7 se pueden observar ambos mecanismos para el conjunto inicial. En color rojo se marcan los círculos que definen el conjunto inicial, mientras en color blanco cómo se van acomodando los demás círculos.

Figura 3.7: Conjuntos de partida



(a) Partición de afuera hacia adentro



(b) Partición de adentro hacia afuera

Una vez definido el conjunto de partida, se debe comenzar con la ubicación de los demás poros, para esto se debe determinar un dominio de búsqueda, este dominio es un subconjunto de los poros previamente ubicados que se encuentran a una distancia de 2 veces el radio mayor entre los poros ya ubicados y el nuevo poro a ubicar, es en este dominio de búsqueda que se verificará si el nuevo poro se intersecta con otro ya ubicado

antes de no ser así, se acepta la nueva posición del poro y se actualiza la lista de poros ubicados.

Algoritmo 5 Generación de capa de filtro

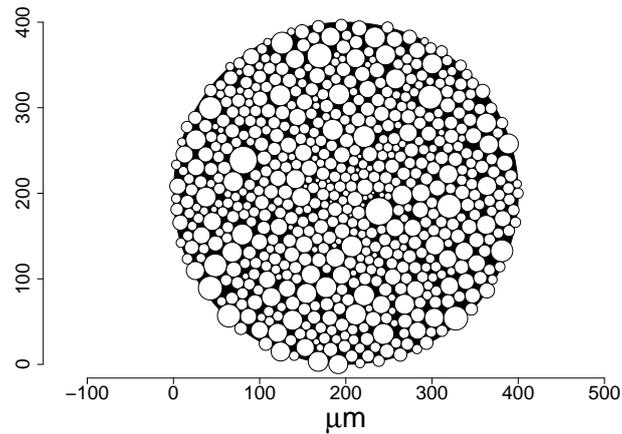
Entrada: Muestra de tamaño de poros, radio del dominio a ubicar los poros.

Salida: Coordenadas de los centros de los poros en el dominio.

- 1: Definir conjunto de partida.
- 2: **mientras** Existan poros para ubicar **hacer**
- 3: Seleccionar aleatoriamente uno de los poros previamente ubicados.
- 4: Seleccionar un r_k de la muestra de radio de poros restante después de extraer los poros del conjunto de partida.
- 5: Definir un dominio de búsqueda.
- 6: $kk \leftarrow$ número de poros en el dominio de búsqueda.
- 7: **para** $i = 1$ hasta $kk - 1$ **hacer**
- 8: **para** $j = kk$ hasta $i + 1$ **hacer**
- 9: $dC \leftarrow$ Distancia de los centros de C_i y C_j
- 10: $sR \leftarrow$ Suma de los radios de C_i^k y C_j^k
- 11: $rR \leftarrow$ Resta, en valor absoluto, de los radios de C_i y C_j
- 12: **si** ($dC \leq sR$ & $dC > rR$) **entonces**
- 13: Calcular la intersección de las envolventes de C_i y C_j
- 14: **si** (C_{k1} esta adentro del dominio y es disjunto a los demás poros) **entonces**
- 15: Aceptar la posición de C_k y actualizar la lista de poros ubicados.
- 16: Regresar al paso 2
- 17: **si no, si** (C_{k2} esta adentro del dominio y es disjunto a los demás poros) **entonces**
- 18: Aceptar la posición de C_k y actualizar la lista de poros ubicados.
- 19: Regresar al paso 2
- 20: **fin si**
- 21: **fin si**
- 22: **fin para**
- 23: **fin para**
- 24: **fin mientras**

Se desarrolló un programa en R para construir el modelo del medio filtrante sobre la base del método descrito. La Figura 3.8, muestra un ejemplo de un modelo de filtro de una capa generado aplicando el algoritmo sobre la base de diagramas de Voronoi-Laguerre.

Figura 3.8: Modelo de una capa generado



Una imagen tomada con un microscopio electrónico del material fibroso puede apreciarse en la Figura 3.9 [6]

Figura 3.9: Imagen de material fibroso captada con un microscopio electrónico



Fuente: Figura tomada de [6]

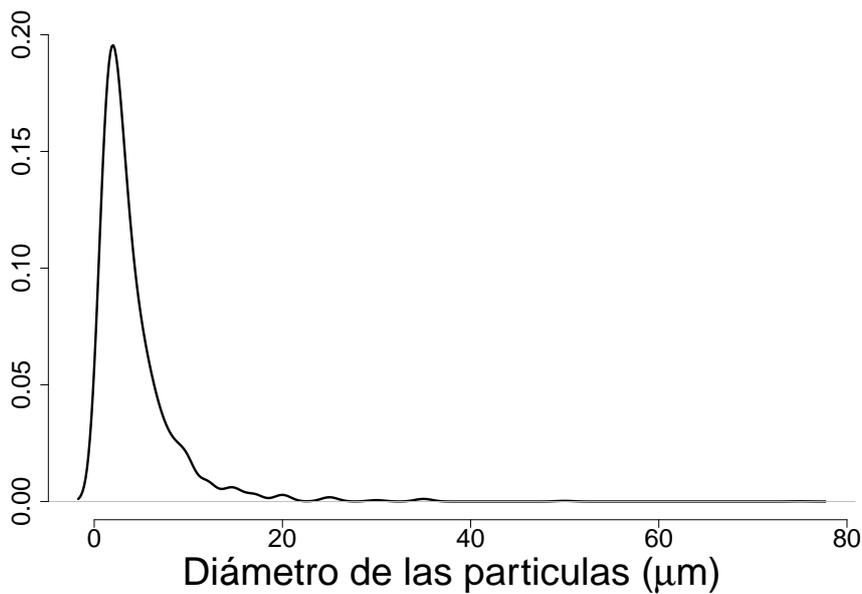
En apariencia el modelo generado en base a la distribución de tamaños de poros tiene diferencias con respecto a la imagen tomada con el microscopio electrónico, sin embargo, lo fundamental es que el modelo sea capaz de capturar propiedades como la porosidad, la distribución de tamaño de poros y que estime la eficiencia del material filtrante con buena aproximación.

Capítulo 4

Resultados y Análisis

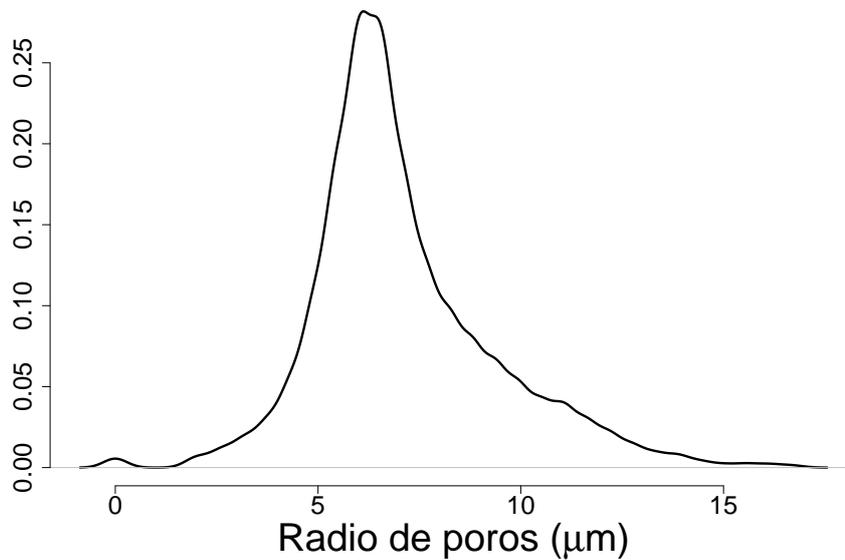
Con el propósito de realizar simulaciones y dar una validación al modelo del material fibroso se seleccionó un material no tejido usado en la industria de filtros para líquidos hidráulicos del cual conocemos su porosidad, diámetro medio de fibra, espesor y la distribución de tamaños de poros estimada usando el equipo Coulter Porometer [6]. Además, se usaron como partículas contaminantes las provenientes del polvo estándar ACFine [6]. En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran las distribuciones de los tamaños de poros y tamaños de partículas utilizadas en las simulaciones.

Figura 4.1: Distribución de diámetro de partículas



El movimiento de las partículas a través del medio se simuló asumiendo flujo tri-

Figura 4.2: Distribución de radio de los poros



dimensional aleatorio, aplicando el método de Monte Carlo [25]. Una partícula puede interactuar con un poro, fibra o partícula, la probabilidad de que la partícula impacte en una fibra viene dada por la solidez del material de filtración $(1 - \epsilon)$.

4.1. Estimación del tamaño de la muestra

Para determinar el tamaño de la muestra del filtro que se utilizará para efectuar las simulaciones numéricas se construyen modelos del filtro variando el radio del mismo. Con el radio, se calcula el área(A) de la muestra. Luego sobre la base de las propiedades del polvo ACFine Dust, en la Tabla 4.1, con la velocidad lineal del fluido (flujo volumétrico sobre área de la muestra) y un tiempo de duración del proceso de filtración se determina la cantidad de partículas, que se lanzarán aleatoriamente al medio filtrante.

La ecuación que determina el número de partículas es:

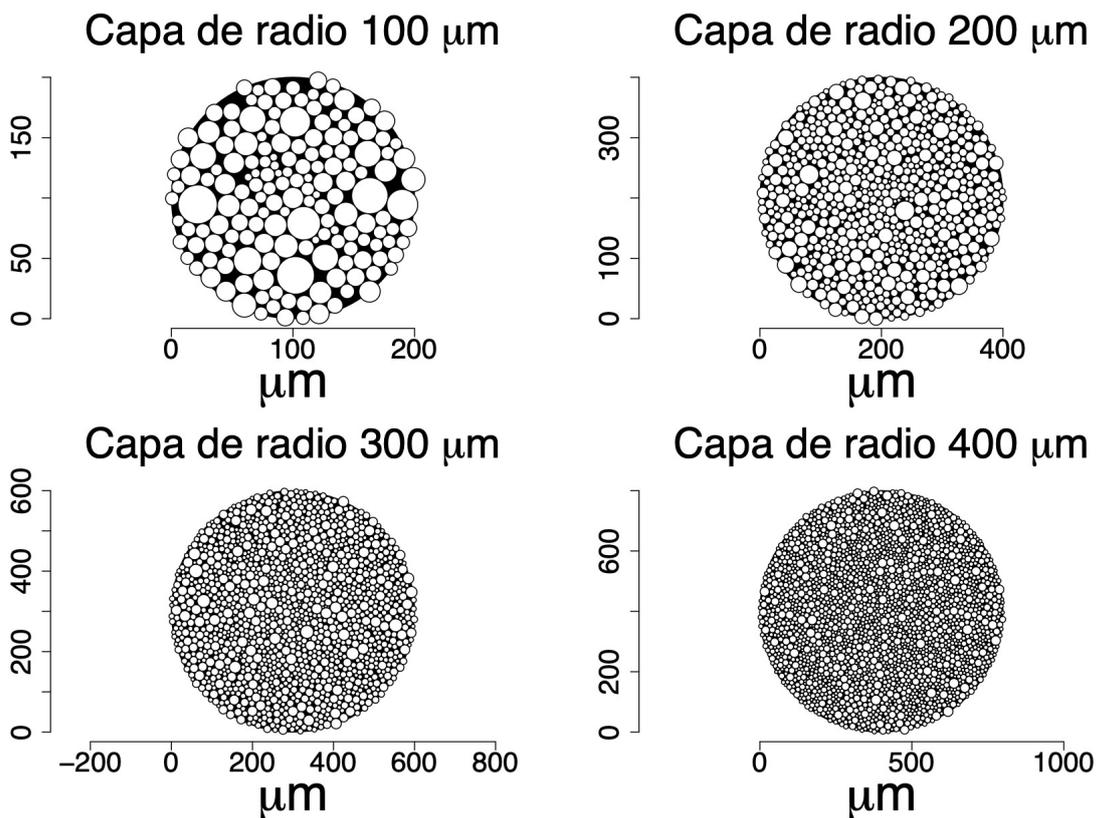
$$NUM = NPAR \times CONC \times V \times \Delta t \times A$$

Tabla 4.1: Parámetros de partículas, velocidad de fluido e incremento de tiempo

$NPAR$	$CONC$	V	Δt
$1,7519 \times 10^6/mg$	$1 mg/l$	$0,10 m/min$	$5 min$

En las Figuras 4.3 y 4.4, se presentan los modelos de una capa generados, para diferentes tamaños de muestra.

Figura 4.3: Capas de radios 100, 200, 300 y 400 μm



Se realizan simulaciones del proceso de filtración considerando los mecanismos de filtración mencionados en la sección del modelo del proceso de filtración. En la Tabla 4.2 se muestran los resultados de la eficiencia en función del tamaño de muestra y se indica la varianza y el intervalo con un nivel de confianza del 95 %.

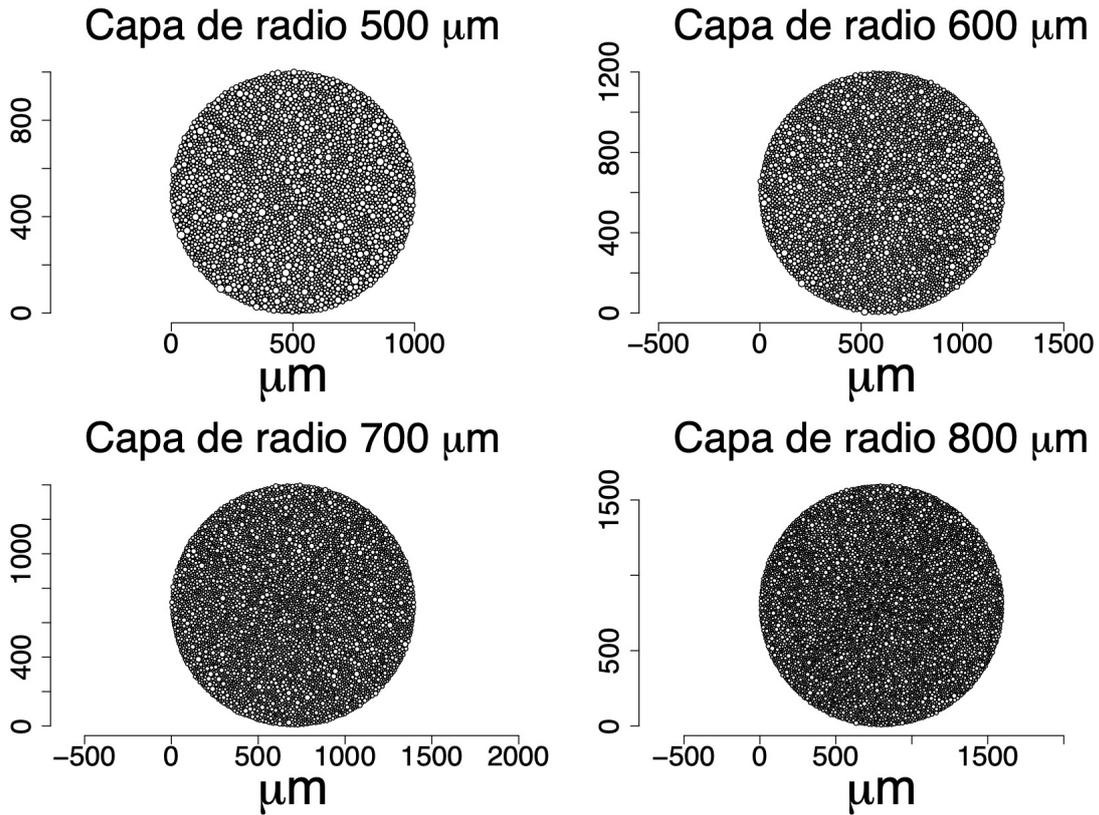
Figura 4.4: Capas de radios 500, 600, 700 y 800 μm


Tabla 4.2: Eficiencia en función del tamaño de muestra

Radio de capa (μm)	Número de partículas	Eficiencia	Varianza	LI	LS
100	28	0.1950	0.00595	0.1736	0.2164
200	111	0.1886	0.00103	0.1797	0.1976
300	248	0.1867	0.00039	0.1812	0.1921
400	441	0.1907	0.00030	0.1859	0.1956
500	688	0.1882	0.00023	0.1840	0.1924
600	991	0.1895	0.00017	0.1858	0.1932
700	1349	0.1854	0.00014	0.1822	0.1887
800	1762	0.1858	0.00005	0.1840	0.1877

Se realizaron varias simulaciones del proceso en función del número de iteraciones del método para poder visualizar la reducción de la varianza y la convergencia, en las Figuras 4.5 y 4.6 se puede visualizar como la variabilidad se reduce cuanto más grande es el tamaño de radio de la muestra del material.

Figura 4.5: Convergencia del método para radios de 100, 200, 300 y 400 μm

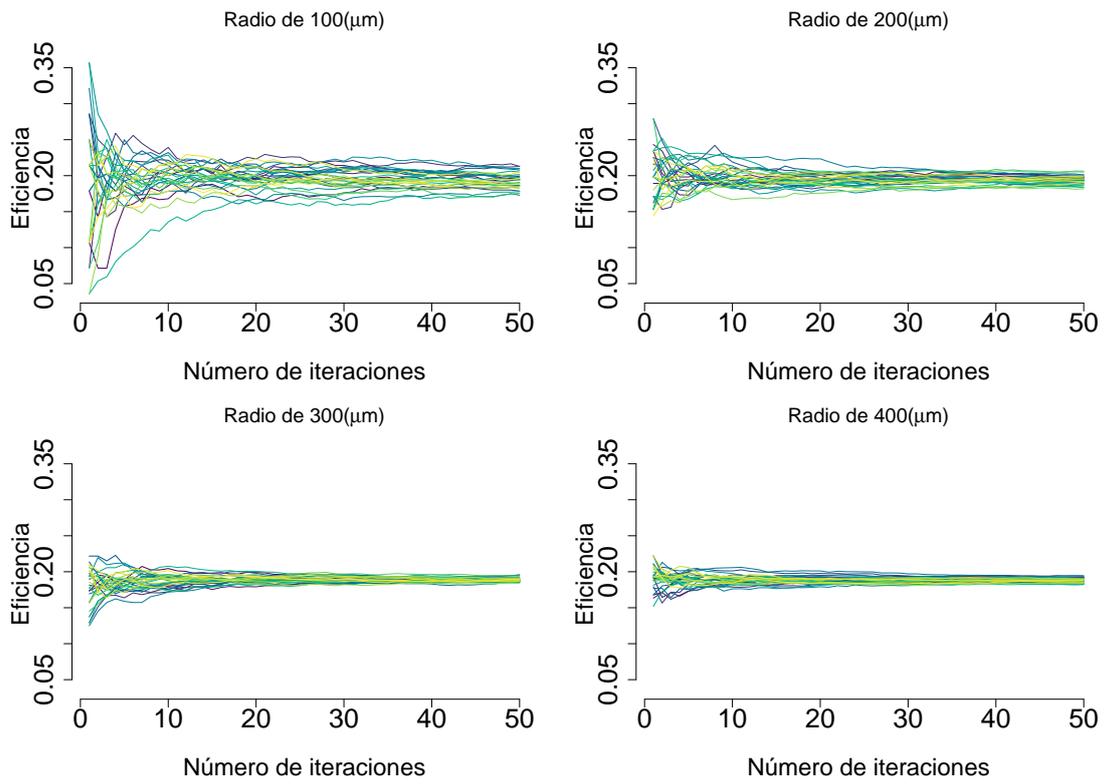
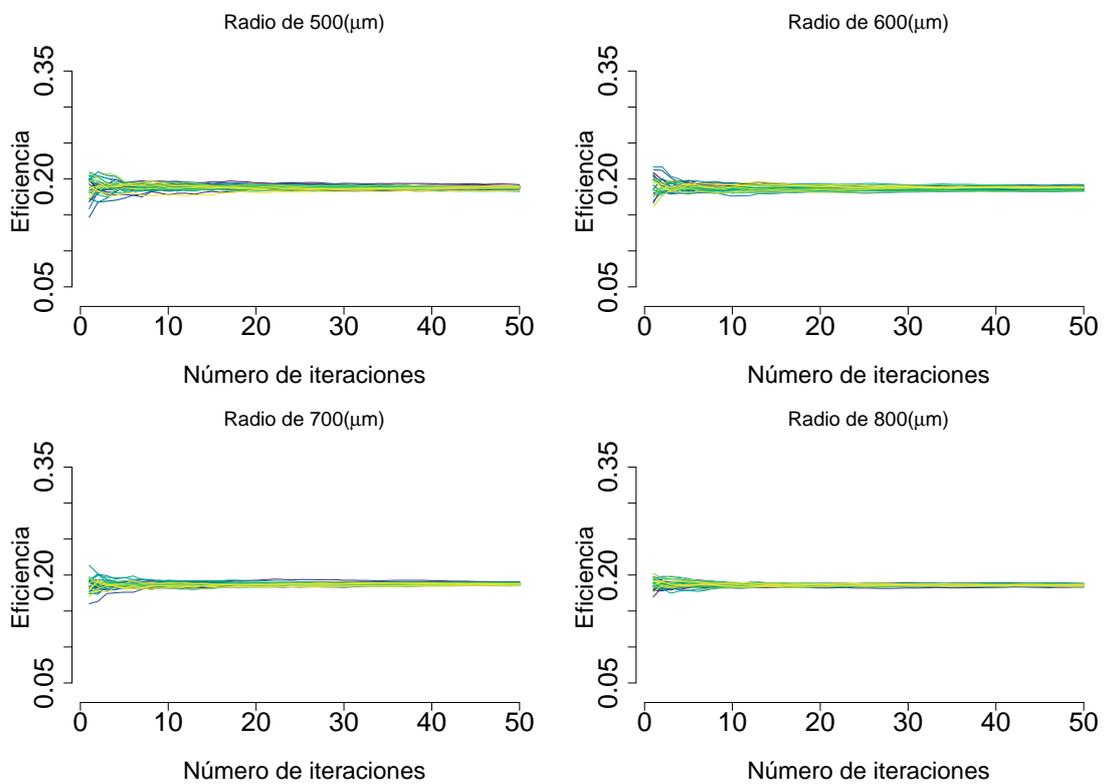


Figura 4.6: Convergencia del método para radios de 500, 600, 700 y 800 μm



De los experimentos podemos notar una reducción de la varianza y con esto un aumento en la precisión de las estimaciones con el aumento del tamaño del radio de la capa. En la Figura 4.8 se puede apreciar la reducción de la varianza y en la Figura 4.7, se muestra como varían y convergen las estimaciones de la eficiencia en función del tamaño de la muestra.

Figura 4.7: Cambio en la varianza al aumentar el tamaño de muestra para el cálculo de la eficiencia

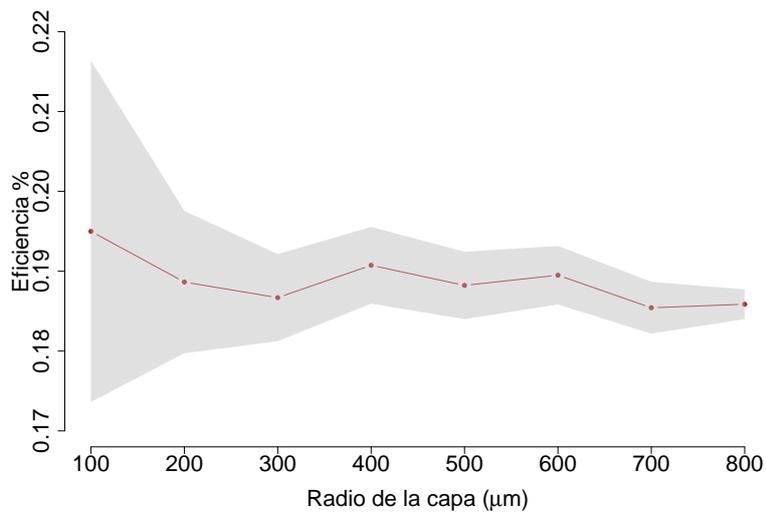
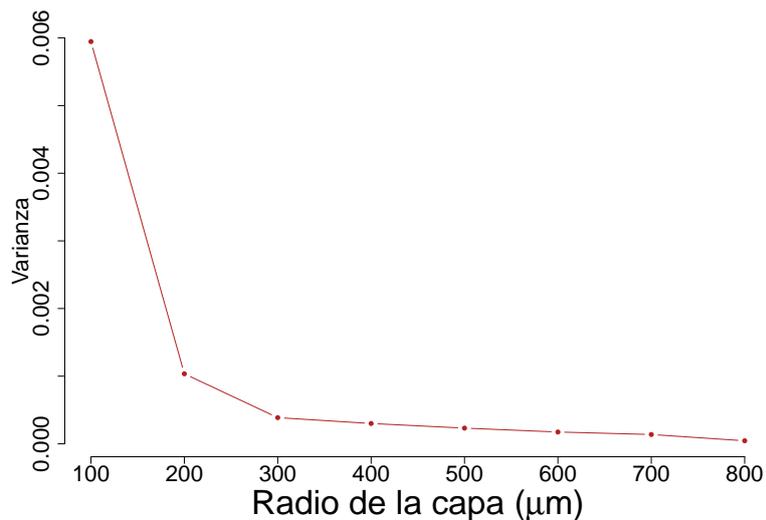


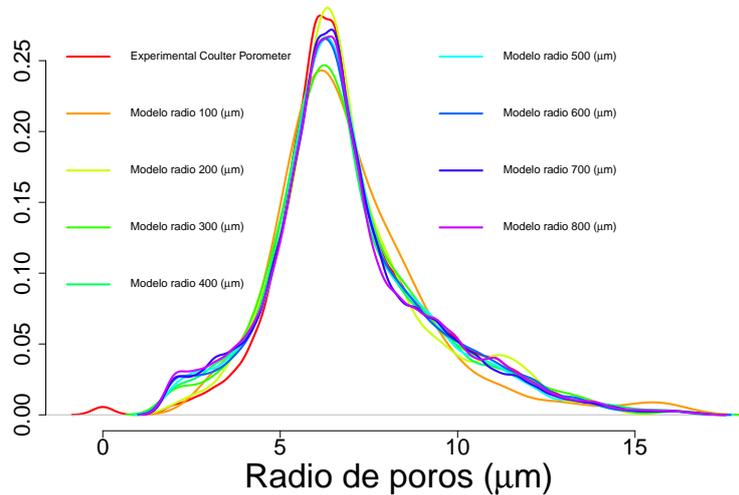
Figura 4.8: Varianza de las eficiencias por tamaño de radio de capa



Como lo indica la Tabla 4.2 y la figura 4.7, al aumentar el tamaño de la muestra la varianza disminuye, de forma que el intervalo de confianza para la estimación de la eficiencia se reduce a valores que son menores que la precisión que se tiene actualmente para medidas experimentales de la eficiencia en este tipo de procesos.

A manera de verificación hacia atrás, se recalculan las distribuciones de tamaños de poros, en base a los modelos generados. La Figura 4.9, compara la distribución del tamaño de poros (medida con equipo) con las estimadas de los modelos de filtros para diferentes tamaños de muestra.

Figura 4.9: Distribución de tamaños de poros medida y recalculada de los modelos para diferentes tamaños de muestra



En color rojo se observa la distribución original del Coulter Porometer y notamos como cuanto más grande es el radio más se aproxima la distribución de los poros de la muestra a la distribución original.

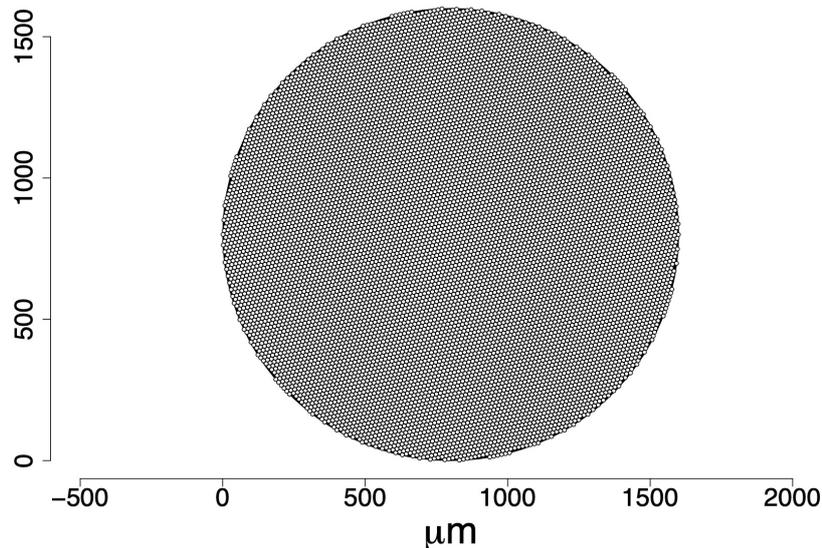
El alto grado de aproximación de las distribuciones de los modelos construidos comparada con la distribución del material muestra la capacidad del modelo de captar características del medio filtrante.

Considerando los resultados anteriores, se seleccionó el tamaño de la muestra del filtro con radio $800 \mu m$ y área $0.02 cm^2$. En este caso se usará ese tamaño de muestra del medio filtrante generado para realizar simulaciones y mostrar la versatilidad del modelo para realizar estimaciones de interés en un proceso de filtración.

4.2. Simulaciones de procesos de filtración para filtros con poros de igual tamaño

Una vez definido el tamaño de la muestra para la capa del medio filtrante para las simulaciones procedemos a realizar algunos experimentos con el objetivo de validar el modelo computacional, en esta sección tomamos poros de tamaño igual para construir las capas del filtro, la porosidad del material fue de $\epsilon = 0,883$, el modelo simulado, considerando poros de diámetro $14 \mu m$ alcanzó una porosidad de $\hat{\epsilon} = 0,88307$. En la Figura 4.10 podemos observar la visualización en dos dimensiones de la capa generada.

Figura 4.10: Capa de radio $800 \mu m$ con poros de diámetro de $14 \mu m$



Los siguientes experimentos se realizan variando los tamaños de las partículas con el objetivo de validar que el modelo computacional funciona correctamente.

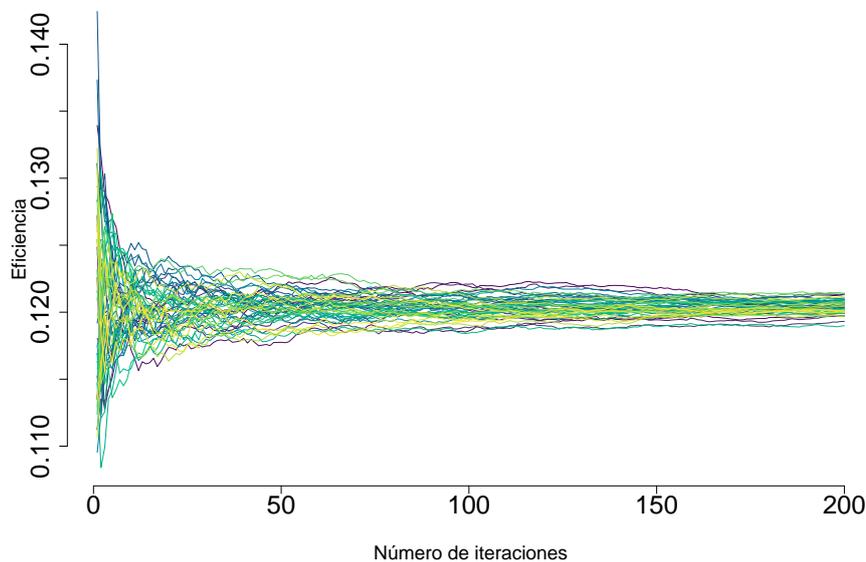
4.2.1. Partículas de igual tamaño

Consideramos partículas de tamaño más pequeño que el diámetro de los poros de la capa del filtro, tomamos un diámetro de partículas de $13 \mu m$, esperando que las partículas que caigan en los poros puedan pasar debido a que su tamaño es menor y la captura ocurrirá en las fibras, con esto esperamos que la eficiencia sea cercana a la solidez de la capa.

Para hacer la estimación se realizaron 200 repeticiones de los lanzamientos de partículas y fueron calculadas las eficiencias y el intervalo de confianza del 95 %.

En la Figura 4.11 podemos ver la convergencia del método para la la estimación de la eficiencia haciendo 50 simulaciones en función del número de iteraciones. Con 200 iteraciones notamos como al final la eficiencia converge a un valor cercano a la eficiencia esperada teóricamente, ya que la captura de partículas ocurre solamente en las fibras que constituyen la parte sólida.

Figura 4.11: Convergencia del método

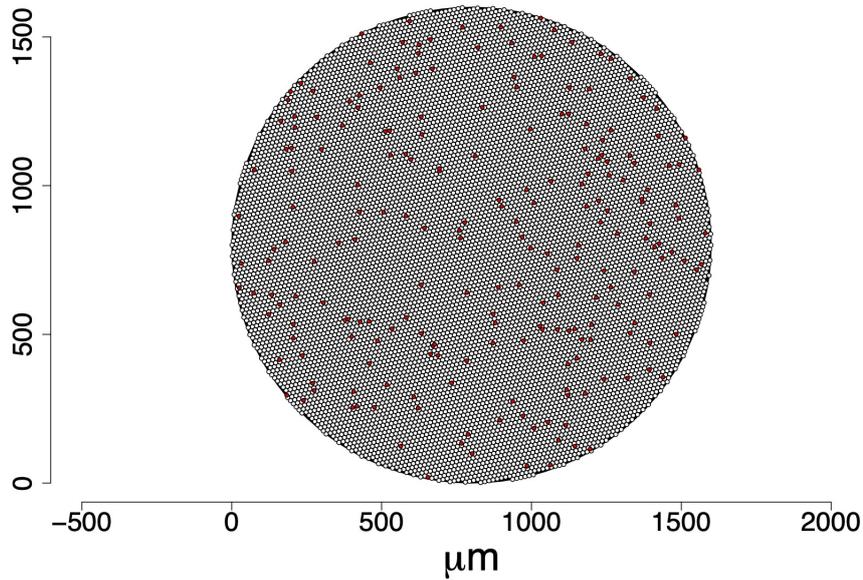


La solidez del material está dada por $1 - \epsilon = 0,117$, en la Tabla 4.3 notamos que la estimación con un nivel de confianza del 95 % es muy buena.

Tabla 4.3: Estimación con partículas de $13 \mu m$ de diámetro

IC del 95 %		
Eficiencia	LI	LS
0.1192	0.1182	0.1203

En al Figura 4.12 se puede apreciar como la captura de partículas ocurre solamente en las fibras de la capa.

Figura 4.12: Captura de partículas con $13 \mu m$ de diámetro

4.2.2. Partículas de diferentes tamaños

Luego se procedió a realizar experimentos variando las distribuciones del tamaño de las partículas y calculando la eficiencia. Se utilizaron las siguientes distribuciones uniformes en los diámetros de las partículas:

Distribución uniforme en el intervalo de 10 a 18

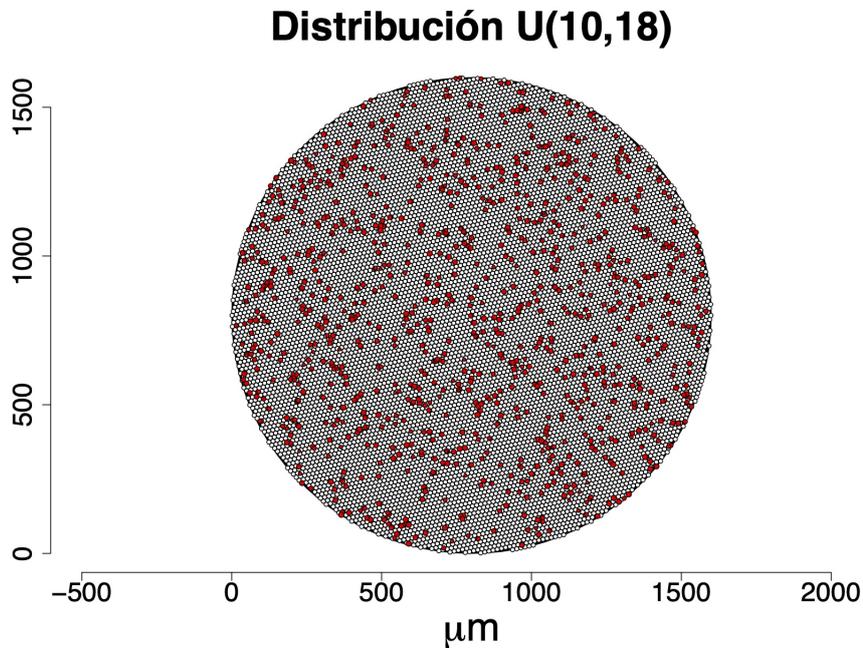
Los diámetros de las partículas varían entre 10 y 18 micrómetros, con el objetivo que la mediana de la distribución sea del diámetro de los poros, $14 \mu m$, es decir, que la mitad de las partículas serán de tamaño menor que los poros y la otra mitad tamaños mayores. En comparación con las simulaciones con partículas menores que el diámetro de los poros, en este caso esperamos que la eficiencia suba ya que habrán partículas que serán capturadas por tamizado, por ser más grandes que el tamaño de los poros, los resultados se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Estimación con partículas que siguen una distribución $U(10, 18)$

Eficiencia	IC del 95 %	
	LI	LS
0.5762	0.5746	0.5779

En la Figura 4.13 podemos notar las capturas en la capa y vemos como estas ocurren tanto en las fibras como en los poros y también se puede apreciar algunas capturas por contacto entre partículas previamente capturadas en los poros.

Figura 4.13: Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(10, 18)$



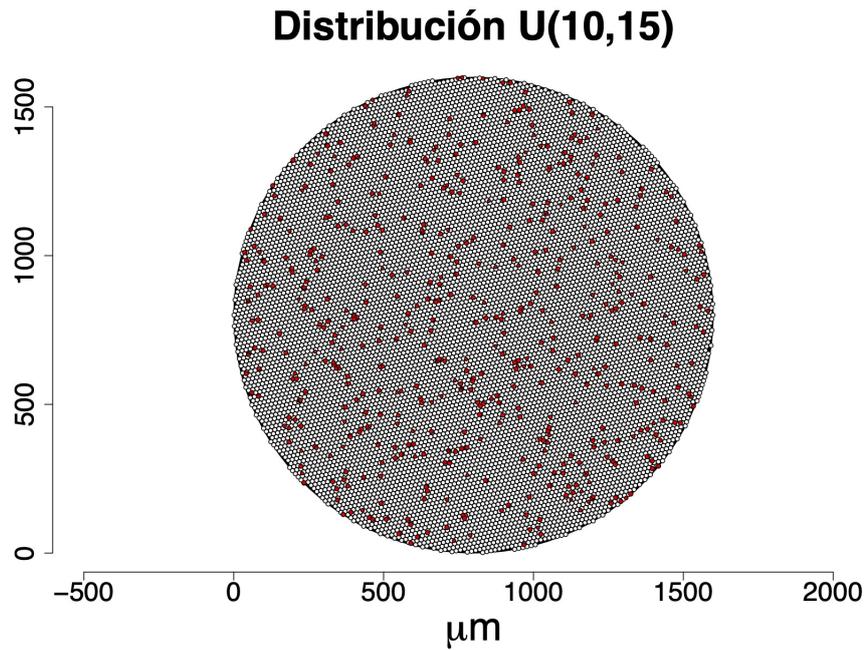
Distribución Uniforme en el intervalo de 10 a 15

Los diámetros de las partículas siguen una distribución donde la mayoría son de tamaños menores que el diámetro promedio de la capa, esperamos ver una eficiencia mayor que en las partículas de tamaños menores que los poros pero menor que en la de la distribución $U(10, 18)$, los resultados de la eficiencia estimada se observa en la Tabla 4.5 y en la Figura 4.14 notamos las partículas capturadas, se puede notar una menor cantidad de partículas capturadas en la capa y los resultados fueron los esperados.

Tabla 4.5: Estimación con partículas que siguen una distribución $U(10, 15)$

IC del 95 %		
Eficiencia	LI	LS
0.3056	0.3041	0.3071

Figura 4.14: Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(10, 15)$



Distribución Uniforme en el intervalo de 13 a 18

Los diámetros son en su mayoría mayores que los poros, por lo tanto, la eficiencia subirá en comparación con las distribuciones anteriores, ya que habrá una mayor captura de partículas en la capa por tamizado.

Tabla 4.6: Estimación con partículas que siguen una distribución $U(13, 18)$

IC del 95 %		
Eficiencia	LI	LS
0.8337	0.8325	0.8350

Distribución Uniforme en el intervalo de 15 a 18

Los diámetros de las partículas son todos mayores que los diámetros de los poros, por tanto la eficiencia debe ser de un 100% ya que todas las partículas deben quedar capturadas. La estimación puntual fue de 1 y la varianza 0, la capa con las partículas capturadas se ve en la Figura 4.16.

Figura 4.15: Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(13, 18)$

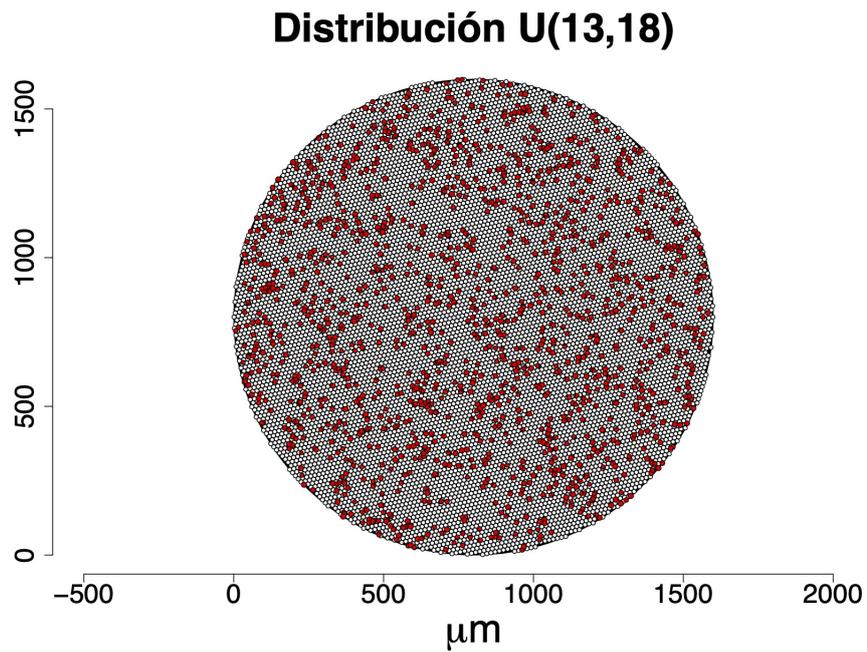
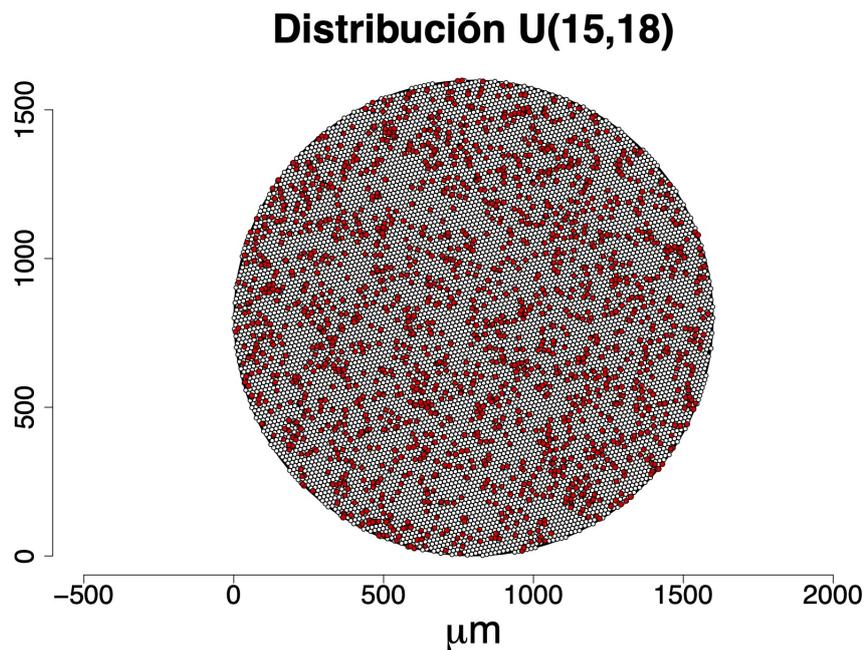


Figura 4.16: Captura de partículas con tamaño según una distribución $U(15, 18)$



Validación del supuesto de normalidad

Para verificar si con 200 iteraciones del método es suficiente para asegurar la normalidad en las estimaciones se realizan muchas muestras con 200 iteraciones y se aplica un test de normalidad en las estimaciones, el test que se utilizó fue la prueba de normalidad de Anderson-Darling, que se basa en la diferencia de cuadrados entre las distribuciones, pero

en su caso otorga una mayor relevancia a los datos existentes en las colas de la distribución [21], esta prueba contrasta las siguientes hipótesis:

H_0 : Los datos siguen una distribución normal

H_1 : Los datos no siguen una distribución normal

La Tabla 4.7 muestra los valores p de las pruebas realizadas con un nivel de significancia de 0.05, notamos que en todos los casos la decisión nos lleva al no rechazo de la hipótesis nula y por lo tanto no podemos rechazar que los datos siguen una distribución normal.

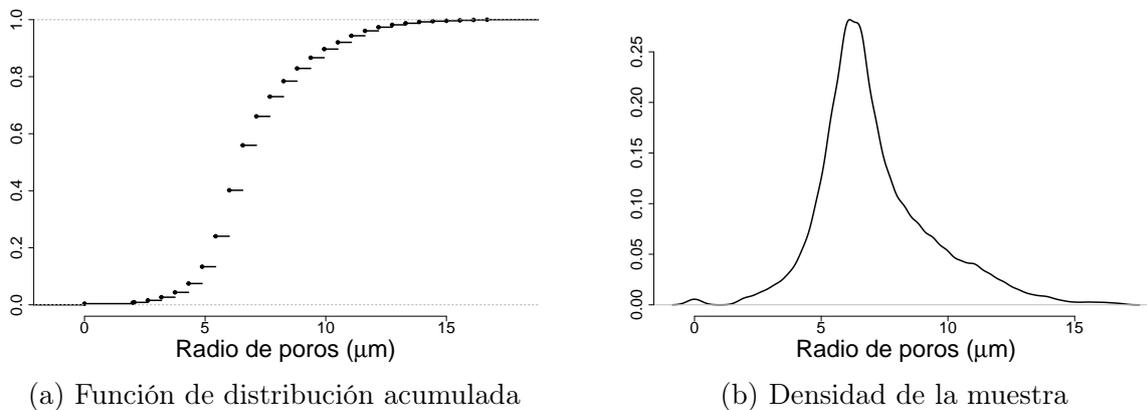
Tabla 4.7: Valores p del test de normalidad de Anderson-Darling

Distribución de Tamaño de partículas	Valor p
13 μm	0.9259
U(10,18)	0.3233
U(10,15)	0.3099
U(13,18)	0.2513

4.3. Simulaciones de procesos de filtración para filtros con distribuciones de tamaños de poros determinadas por Coulter Porometer

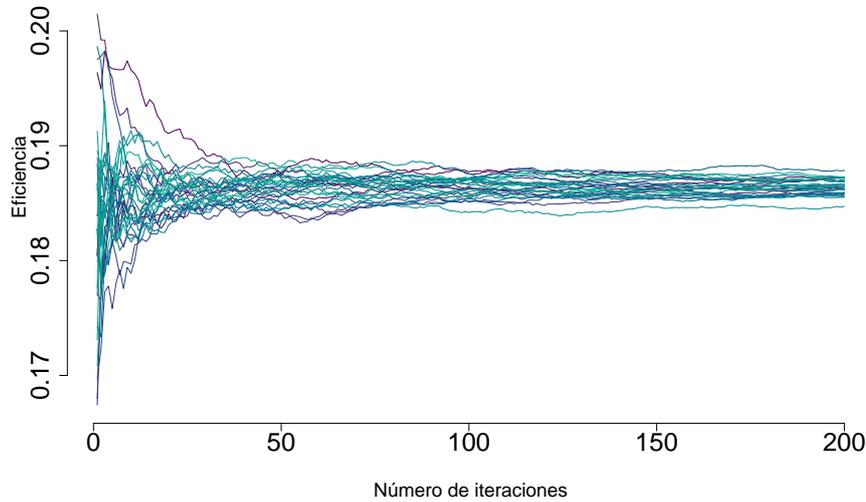
Se presentan los resultados de simulaciones usando modelo de una capa y modelo de tres capas para estimar la eficiencia del filtro. La distribución de tamaño de los poros utilizada fue la que se determinó mediante el Coulter Porometer [6], la distribución reportada por el equipo se presenta en forma acumulada, a partir de esta se hace una estimación de la función de densidad del tamaño de los poros del filtro, la acumulada y la función de densidad se observan en la Figura 4.17.

Figura 4.17: Distribución acumulada y densidad del tamaño de poros



Al igual que en los casos de distribuciones de poros de tamaños iguales en los experimentos, considerando la distribución de los tamaños determinados por el Coulter Porometer, se realizaron gráficos para ver la convergencia del método que se se observa en la Figura 4.18.

Figura 4.18: Convergencia del método con distribución de poros determinadas por Coulter Porometer



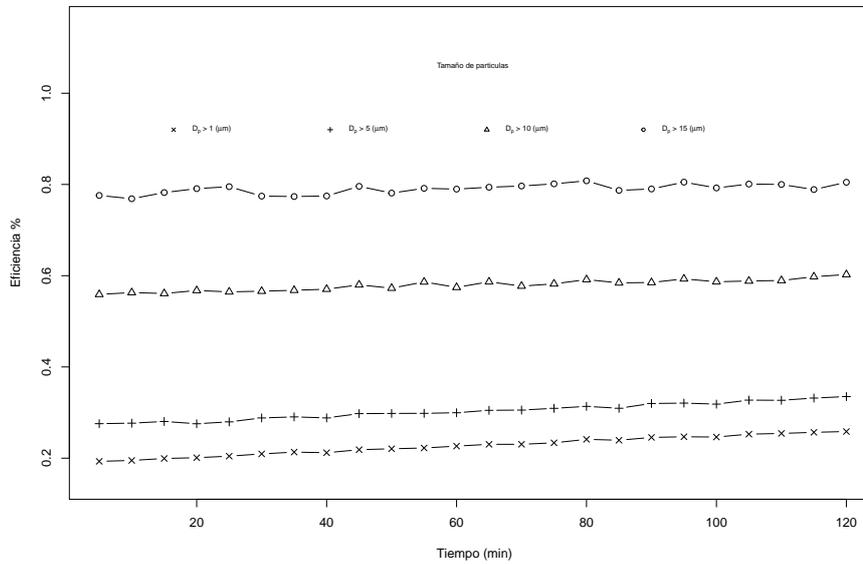
En la figura se observa cómo converge el método cuando aumenta el número de iteraciones, además para validar el supuesto de normalidad, se procede como antes, aplicando el test de Anderson Darling dando un valor p de 0.9757, por lo tanto no podemos rechazar el supuesto de normalidad asintótica en las estimaciones.

4.3.1. Modelo de una capa

La simulación se realizó considerando un proceso de filtración de duración de 120 minutos con la muestra seleccionada. En la Figura 4.19 se muestran gráficamente los resultados para la eficiencia en función del tiempo y clasificadas por tamaños de partículas. El modelo de una capa es apropiado cuando debido a combinación de factores del proceso de filtración la mayor parte de las capturas se realizan en la superficie del material filtrante.

El modelo de filtro permite llevar recuento de las partículas capturadas en poros, en fibra y en poros bloqueados, registrando también los tamaños de partículas y poros. Estos registros posibilitan efectuar estimaciones de eficiencia del filtro por tamaño de partícula y en función del tiempo como lo muestra la Figura 4.19. Como se esperaba la eficiencia aumenta al aumentar el tamaño de partículas.

Figura 4.19: Estimaciones dinámicas de la eficiencia del filtro para diferentes tamaños de partículas



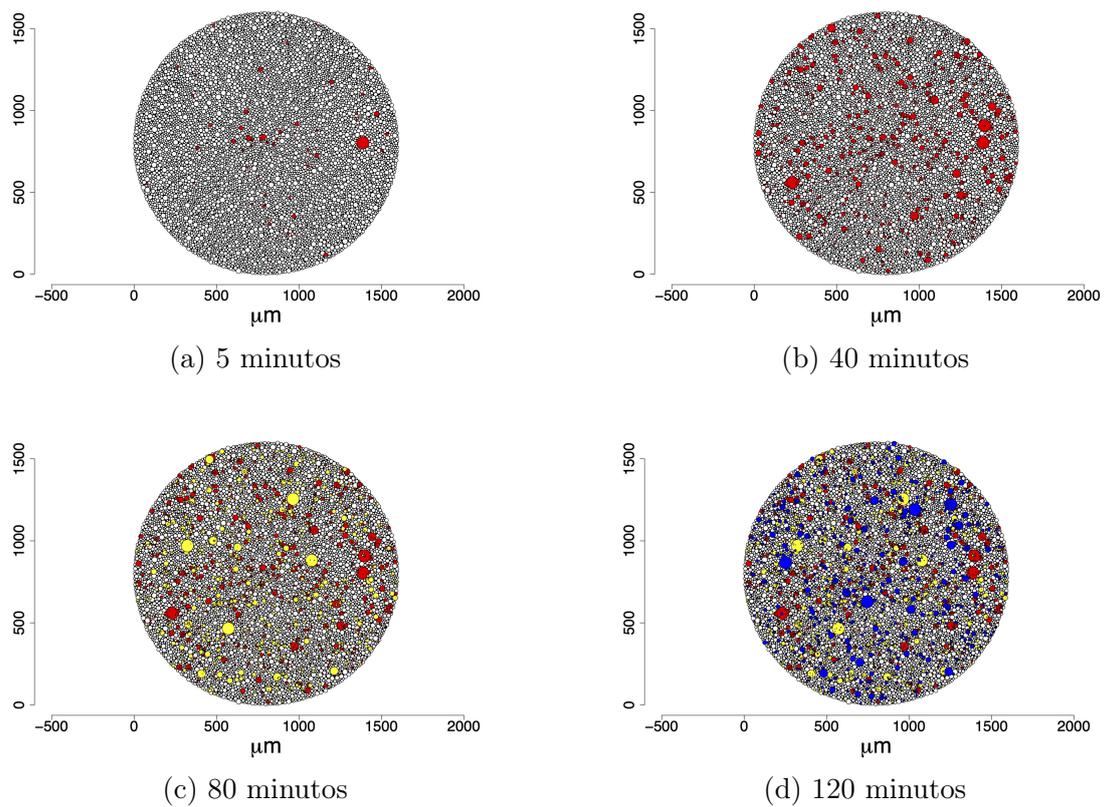
En la Tabla 4.8 se indican las varianzas máximas para las estimaciones de las eficiencias en función del tiempo y por tamaño de partículas en el modelo de una capa. Notamos que los valores de las varianzas aumentan al aumentar el tamaño de partículas, esto se explica porque la cantidad de partículas grandes es menor. En general, se observa que los valores de las varianzas son consistentes con los experimentos para determinar el tamaño de la muestra.

Tabla 4.8: Varianzas máximas para la eficiencia por tamaño de partículas modelo de una capa

Tamaño de Partículas	$D_p > 1 \mu m$	$D_p > 5 \mu m$	$D_p > 10 \mu m$	$D_p > 15 \mu m$
Varianza Máxima	0.00028	0.00125	0.00382	0.01442

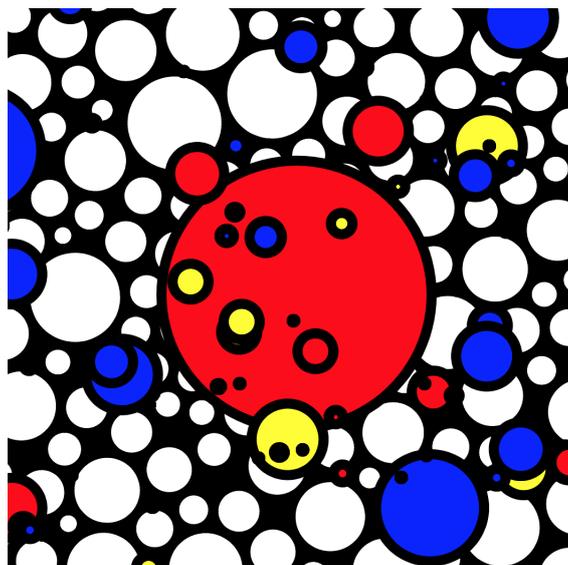
En la Figura 4.20 se visualizan las partículas capturadas en diferentes tiempos. Los gráficos muestran la capacidad del modelo para ubicar las partículas capturadas en la estructura geométrica del medio en función del tiempo.

Figura 4.20: Partículas capturadas en la superficie del filtro



Otra de las ventajas del modelo desarrollado es que permite registrar la ubicación y hacer visualización de partículas capturadas sobre otras partículas, en la Figura 4.21 se ilustra esta bondad del modelo.

Figura 4.21: Partículas capturadas sobre partículas

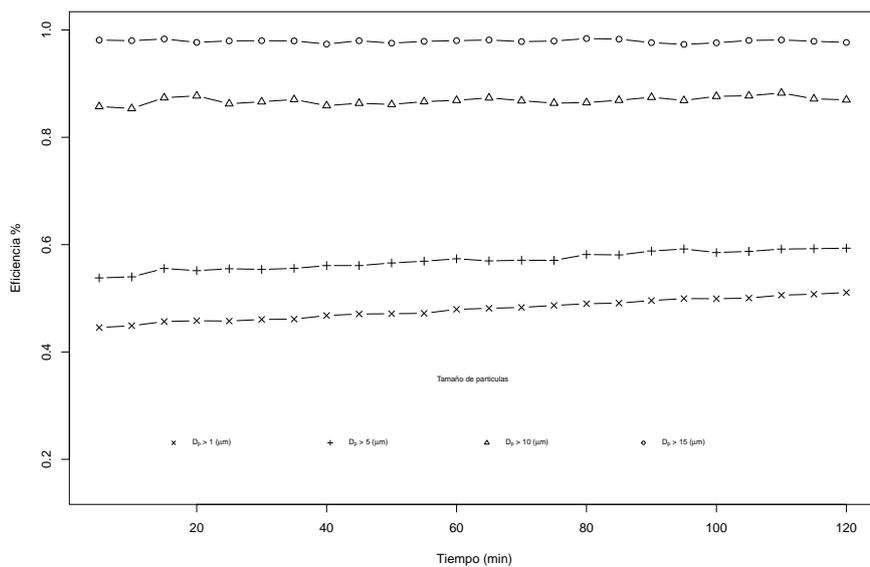


4.3.2. Modelo de tres capas

La simulación se realizó considerando un proceso de filtración de duración de 120 minutos con la muestra seleccionada.

En la Figura 4.22 se muestran gráficamente los resultados para la eficiencia en función del tiempo y clasificadas por tamaños de partículas. Se observa claramente como en el modelo multicapa la eficiencia aumenta respecto al modelo de una sola capa. Este tipo de modelos es apropiado cuando debido al tamaño de partículas, material de filtración y mecanismos de filtración involucrados la captura de partículas también ocurre en la profundidad del material.

Figura 4.22: Estimaciones dinámicas de la eficiencia del filtro para diferentes tamaños de partículas.



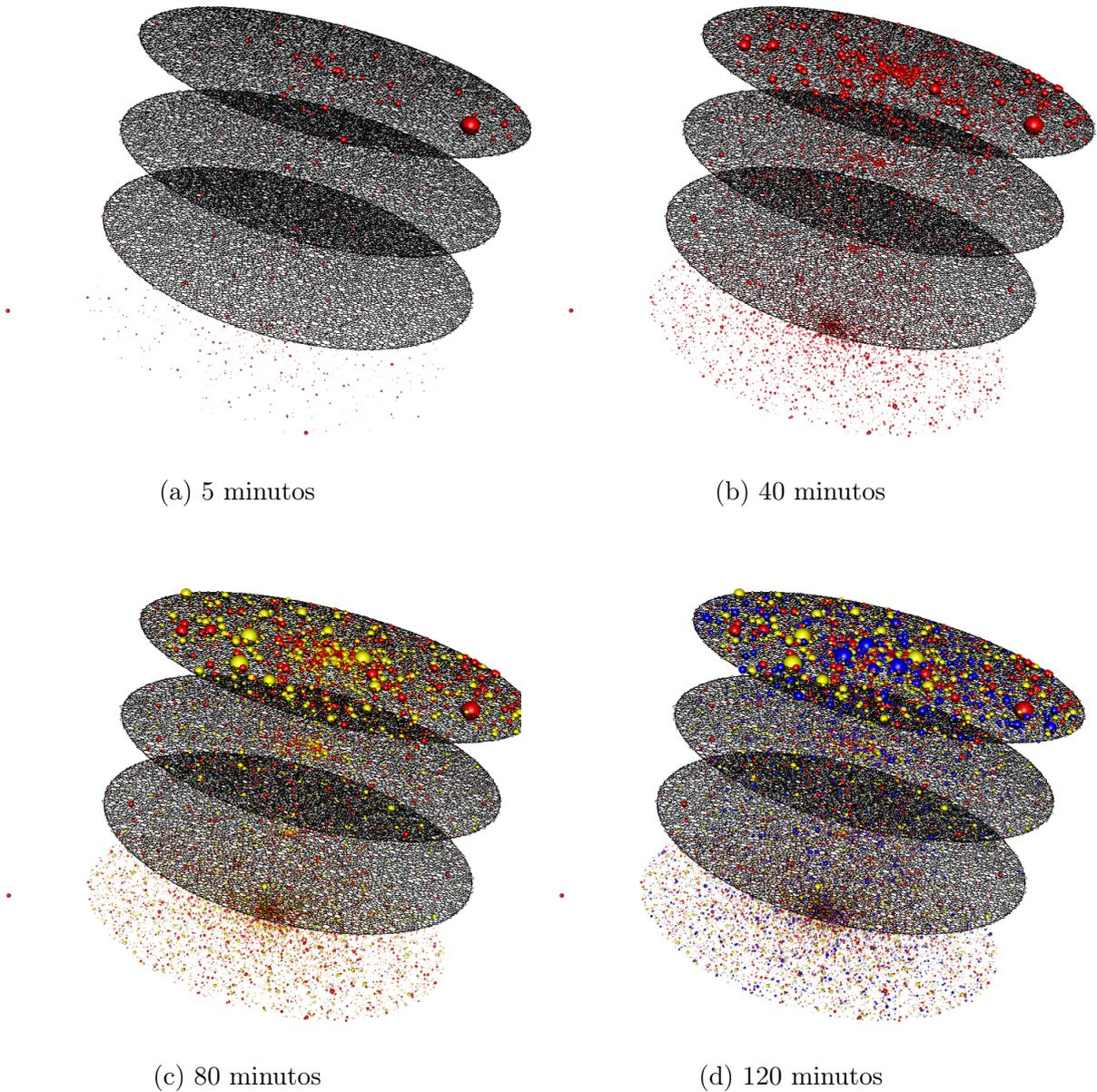
En la Tabla 4.9 están indicadas las varianzas máximas para las estimaciones en función del tiempo y por tamaño de partículas en el modelo multicapa. En general, observamos un comportamiento similar a los resultados del modelo de una capa.

Tabla 4.9: Varianzas máximas para la eficiencia por tamaño de partículas modelo multicapa.

Tamaño de Partículas	$D_p > 1 \mu m$	$D_p > 5 \mu m$	$D_p > 10 \mu m$	$D_p > 15 \mu m$
Varianza Máxima	0.00032	0.00092	0.00247	0.00096

En la Figura 4.23 se visualiza en cuasi 3D la captura y el paso de partículas en las tres capas, para diferentes tiempos del proceso de filtración.

Figura 4.23: Simulación del modelo del filtro de tres capas



Los primeros cuarenta minutos se lanzaron partículas de color rojo, los siguientes 40 minutos las partículas fueron de color amarillo y los últimos cuarenta minutos las partículas fueron azules.

Las visualizaciones junto con todos los datos generados permiten hacer análisis detallados de procesos de filtración. Por ejemplo, se podrá analizar la trayectoria de las partículas que pasan o que son capturadas en las capas, con lo cual se puede estimar la tortuosidad y conectividad del medio. También se puede hacer estimaciones de eficiencias por capas. La estimación de la capacidad del material filtrante es posible, ya que se puede calcular la cantidad de masa de partículas capturadas.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1. Conclusiones

1. Aplicando los diagramas de Voronoi-Laguerre fue posible construir modelos geométricos para representar la estructura de materiales fibrosos; los modelos tienen propiedades como la porosidad y la distribución de tamaños de poros aproximadamente iguales a los de los materiales.
2. Se asumió flujo tridimensional aleatorio para describir el movimiento de las partículas hacia el material de filtración y en su interior; esto permite simplificar una de las complejidades en el proceso de filtración.
3. Los resultados de la simulación para la estimación de las eficiencias de los materiales fibrosos en función del tiempo y del tamaño de partículas están en un buen acuerdo con el comportamiento general esperado. El algoritmo implementado en R permite realizar fácilmente análisis estadístico.
4. La metodología desarrollada en esta investigación para generar modelos de medios filtrantes fibrosos ofrece una gran versatilidad para simular y estudiar procesos de filtración. Con los datos obtenidos en las simulaciones no solo se pueden hacer estimaciones de la eficiencia de los filtros en función del tiempo y del tamaño de partículas. Se obtienen datos de la ubicación de las partículas capturadas y no capturadas en las diferentes capas. Con esos datos se hace posible estimar trayectorias,

tortuosidad y conectividad.

5. Una gran ventaja del modelo de filtro desarrollado aplicando los diagramas de Voronoi-Laguerre es que permite hacer visualizaciones en 2D y cuasi 3D, las cuales serán muy útiles para analizar los cambios dinámicos de la estructura del filtro a medida que se capturan partículas.

5.2. Trabajos futuros

1. Trabajar en el desarrollo de algoritmos para estimar tortuosidad, conectividad y porosidad en función del tiempo.
2. Realizar pruebas del modelo desarrollado comparando con datos experimentales; para ello, seguramente, habrá que implementar más mecanismos de filtración dependiendo del proceso particular de filtración.
3. Reducir el costo computacional al generar el modelo con el tamaño de muestra apropiada. Una posibilidad es desarrollo de algoritmo con programación en paralelo.

Bibliografía

- [1] Albrecht, F. (1931). Theoretische untersuchungen über die ablagerung von staub aus strömender luft und ihre anwendung auf die theorie der staubfilter. *Phys. Z*, 32:48–56.
- [2] Benabbou, A., Borouchaki, H., Laug, P., and Lu, J. (2008). Sphere packing and applications to granular structure modeling. In *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pages 1–18. Springer.
- [3] Brown, R. (1998). Airflow through filters-beyond single-fiber theory.
- [4] Burtseva, L., Werner, F., Salas, B. V., Pestryakov, A., Romero, R., and Petranovskii, V. (2015). *Modeling of the material structure using Voronoi diagrams and tessellation methods*. Univ., Fak. für Mathematik.
- [5] Coulson, J., Richardson, J., Backhurst, J., and Harker, J. (2003). Capítulo 9: Filtración. *Ingeniería Química: operaciones básicas*, 2:413.
- [6] Destephen, J. A. (1995). *Liquid filtration simulation through nonwoven fibrous materials: a dissertation presented to the faculty of the Graduate School, Tennessee Technological University*. PhD thesis, Tennessee Technological University.
- [7] Destephen, J. A. and Choi, K.-J. (1996). Modelling of filtration processes of fibrous filter media. *Separations Technology*, 6(1):55–67.
- [8] Dimakis, A. G., Sarwate, A. D., and Wainwright, M. J. (2006). Geographic gossip: Efficient aggregation for sensor networks. In *Proceedings of the 5th international conference on Information processing in sensor networks*, pages 69–76.

- [9] Fuchs, N., Kirsch, A., and Stechkina, I. (1973). A contribution to the theory of fibrous aerosol filters. In *Faraday Symposia of the Chemical Society*, volume 7, pages 143–156. Royal Society of Chemistry.
- [10] Grant, D., Liu, B., Fisher, W., and Bowling, R. (1989). Particle capture mechanisms in gases and liquids: an analysis of operative mechanisms in membrane/fibrous filters. *The Journal of Environmental Sciences*, 32(4):43–51.
- [11] Happel, J. (1959). Viscous flow relative to arrays of cylinders. *AICHE Journal*, 5(2):174–177.
- [12] Hogg, R., Mckean, J., and Craig, A. (2012). Introduction to mathematical statistics seventh edition. *Pearson Education*.
- [13] Hutten, I. M. (2007). *Handbook of nonwoven filter media*. Elsevier.
- [14] Khan, A. (1995). Historical review of filtration theories in fibrous media. *Adv. Filtr. Sep. Technol.*, 9:200–203.
- [15] Kirsch, A. and Fuchs, N. (1968). Studies on fibrous aerosol filters—iii diffusional deposition of aerosols in fibrous filters. *Annals of Occupational Hygiene*, 11(4):299–304.
- [16] Kirsch, A. A. and Fuchs, N. (1967). Studies on fibrous aerosol filters—ii. pressure drops in systems of parallel cylinders. *Annals of Occupational Hygiene*, 10(1):23–30.
- [17] Kuwabara, S. (1959). The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in a viscous flow at small reynolds numbers. *Journal of the physical society of Japan*, 14(4):527–532.
- [18] Langmuir, I. (1942). Osrd report no. 865. *Office of Scientific Research and Development: Washington, DC, USA*.
- [19] Moreno Durán, J. L. and Ordóñez Pérez, S. (2009). Diagramas de voronoi de alcance limitado.
- [20] Pan, N. and Zhong, W. (2006). Fluid transport phenomena in fibrous materials. *Textile Progress*, 38(2):1–93.

- [21] Pedrosa, I., Juarros-Basterretxea, J., Robles-Fernández, A., Basteiro, J., and García-Cueto, E. (2015). Pruebas de bondad de ajuste en distribuciones simétricas, ¿ qué estadístico utilizar? *Universitas psychologica*, 14(1):245–254.
- [22] Pich, J. (1966a). Pressure drop of fibrous filters at small knudsen numbers. *Annals of Occupational Hygiene*, 9(1):23–27.
- [23] Pich, J. (1966b). Theory of aerosol filtration by fibrous and membrane filters. *Aerosol science*.
- [24] Roselló Valera, R. L., Pérez Morales, I. P., and Díaz-Guzmán Casañas, H. (2016). Modelación geométrica de microestructuras granulares poliédricas. *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*, 10:186–194.
- [25] Rubinstein, R. Y. and Kroese, D. P. (2016). *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 10. John Wiley & Sons.
- [26] Sambaer, W., Zatloukal, M., and Kimmer, D. (2011). 3d modeling of filtration process via polyurethane nanofiber based nonwoven filters prepared by electrospinning process. *Chemical Engineering Science*, 66(4):613–623.
- [27] Sampson, W. W. (2008). *Modelling stochastic fibrous materials with mathematica®*. Springer Science & Business Media.
- [28] Sell, W. (1931). *Staubausscheidung an einfachen Körpern und Luftfiltern*. PhD thesis, Verlag nicht ermittelbar.
- [29] Sutherland, K. S. and Chase, G. (2011). *Filters and filtration handbook*. Elsevier.
- [30] Tharewal, P., Landage, S., and Wasif, A. (2013). Application of nonwovens for air filtration. *International Journal of Advanced Research in IT and Engineering*, 2(2):14–36.
- [31] Wakeman, R. J. and Tarleton, E. S. (1999). *Filtration: equipment selection, modelling and process simulation*. Elsevier.