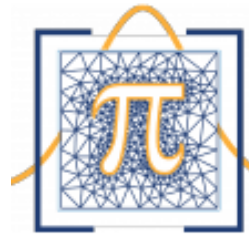


Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Facultad de Ciencias, Maestría en Matemática



Modelación y control óptimo de la propagación de especies invasivas en paisajes heterogéneos mediante autómatas celulares

David Enrique Motiño Tercero

Ciudad Tegucigalpa

Año 2022

Modelación y control óptimo de la propagación de especies invasivas en paisajes heterogéneos mediante autómatas celulares

David Enrique Motiño Tercero

Tesis presentado como requisito parcial para optar al título de:

Máster en Matemática con Orientación en Ingeniería Matemática

Coordinador:

Dr. Cristian Cruz

Línea de Investigación:

Matemática Computacional

Asesor:

MSc. Iván Henríquez.

UNAH

Escuela de Matemática

Tegucigalpa

2022

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por darme la inspiración y sabiduría para poder realizar este trabajo de tesis.

Agradezco enormemente la valiosa asesoría y motivación de MSc. Iván Henríquez en la elaboración de este proyecto de tesis. Su guía comprendió desde la propuesta del problema de tesis, la facilitación de fuentes de estudio, hasta la revisión detallada de los avances, sugiriendo las correcciones pertinentes.

Mi reconocimiento y agradecimiento al importante aporte del Dr. Julio Barragán en este proyecto de tesis, ya que algunas ideas centrales en este trabajo fueron propuestas por él.

Mi sincero agradecimiento a todos mis maestros de la maestría que formaron parte de este proyecto académico.

Mi agradecimiento al Departamento de Salud y Sanidad Forestal del ICF por la colaboración al brindarme datos e información sobre el fenómeno del gorgojo descortezador de pino en Honduras.

Resumen

En este estudio se aborda el fenómeno de propagación de especies invasivas que generan problemas ecológicos, ambientales y económicos a gran escala. Existen diferentes modelos que abordan este tipo de fenómenos para establecer políticas y estrategias óptimas que puedan erradicar o controlar los brotes de especies invasivas. La mayoría de los modelos se basan en espacio-tiempo, sin embargo, no suelen tomar en cuenta la heterogeneidad del paisaje en la que existen características espaciales que naturalmente rigen la dinámica de los brotes en combinación con otras variables relacionadas al comportamiento de la especie invasiva y especie víctima.

En este trabajo se propone un modelo económico que determina las políticas óptimas para el control de un brote; el modelo captura información relacionada a la heterogeneidad del espacio considerando algunas de las características espaciales del paisaje que tienen incidencia en el fenómeno, con el objetivo de tener una mejor predicción respecto a la dinámica de los brotes. El modelo consiste en un problema de optimización dinámica basado en autómatas celulares, por lo que, además de determinar las estrategias óptimas de control, también nos permite visualizar la dinámica del fenómeno en cada tiempo proyectado.

El modelo se aplicó a diferentes escenarios de heterogeneidad para el paisaje y se hace un contraste con paisajes homogéneos, obteniendo resultados interesantes que confirman la importancia de la heterogeneidad en los modelos de especies invasivas.

Palabras clave: *Especies invasivas, autómatas celulares, control óptimo, programación dinámica binaria, heterogeneidad del paisaje.*

Abstract

This study deals with the phenomenon of propagation of invasive species that generate ecological, environmental and economic problems on a large scale. There are different models that address this type of phenomenon to establish optimal policies and strategies that can eradicate or control outbreaks of invasive species. Most models are based in space-time, however, they do not usually take into account the heterogeneity of the landscape in which there are spatial characteristics that naturally govern the dynamics of the outbreaks in combination with other variables related to the behavior of the invasive species and victim species.

This paper proposes an economic model that determines the optimal policies for control of an outbreak; the model captures information related to the heterogeneity of the space considering some of the spatial characteristics of the landscape that have an incidence in the phenomenon, in order to have a better prediction regarding the dynamics of the outbreaks. The model consists of a dynamic optimization problem based on cellular automata, therefore, in addition to determining the optimal control strategies, it also allows us to visualize the dynamics of the phenomenon in each projected time.

The model was applied to different landscape heterogeneity scenarios and contrasted with homogeneous landscapes, obtaining interesting results that confirm the importance of heterogeneity in invasive species models.

Keywords: *Invasive species, cellular automata, optimal binary control, landscape heterogeneity.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1 Introducción	2
1.1 Preliminares	5
1.1.1 Paisajes homogéneos y heterogéneos	5
1.1.2 Autómatas Celulares	5
1.1.3 Problema de control óptimo discreto	8
1.2 Estado del arte	10
1.2.1 Modelo de Epanchin-Niell y Wilen	12
1.2.2 Modelo de Chalak, Pannell y Polyakov	22
2 Descripción del modelo	26
2.1 Modelo con la incorporación de la función de idoneidad	28
2.1.1 Formulación del modelo	28
2.1.2 Efecto de la función de idoneidad en la dinámica de las variables. . .	32
2.1.3 Interacción de la función de idoneidad con la variables de estado y de control	33
2.1.4 Situaciones que aborda la función de idoneidad	34

2.2	Modelo con la incorporación de la función de susceptibilidad (alta, media, baja y nula)	37
2.2.1	Formulación del modelo	38
2.2.2	Efecto de la función de susceptibilidad en la dinámica del modelo. . .	42
2.3	Modelo con la incorporación de la función de susceptibilidad para $N+1$ niveles.	49
2.3.1	Formulación del modelo	49
3	Marco computacional	53
3.1	Ensamblado de las matrices	57
3.2	Experimentos computacionales	64
3.2.1	Experimento 1: Simulación en paisaje homogéneo	64
3.2.2	Experimento 2: Simulación con paisaje heterogéneo	66
3.2.3	Experimento 3: Simulación con paisaje heterogéneo	68
3.2.4	Experimento 4: Simulación con paisaje heterogéneo	70
3.2.5	Experimento 5: Simulación con paisaje homogéneo y constricción . .	72
3.2.6	Experimento 6: Simulación con paisaje heterogéneo y constricción . .	74
3.2.7	Resumen de resultados	76
4	Conclusiones	77
5	Trabajos a futuro	79
	Bibliografía	80

Lista de Figuras

1-1	Tipos de celdas	6
1-2	Tipos de vecindarios. Fuente: Martínez, G.J. [12]	6
2-2	Efecto de la función de idoneidad.	33
2-1	Efecto de la función de idoneidad.	34
2-3	Habrà propagación si no se aplica un control	34
2-4	No habrá propagación	35
2-5	No puede haber propagación	35
2-6	Puede haber propagación pero se discrimina porque no es una celda de interés.	36
2-7	Tasa de propagación alta.	43
2-8	Tasa de propagación media.	45
2-9	Tasa de propagación baja.	47
2-10	Tasa de propagación nula.	48
3-1	Secuencia de procesos para la implementación del modelo (Fuente: Elaboración propia).	55
3-2	Enumeración de celdas para una región de $n \times m$ (Fuente: Elaboración propia).	60
3-3	Enumeración de aristas entre celdas para una región de $n \times m$. ($k = n(m - 1)$) (Fuente: Elaboración propia).	60
3-4	Estructura de las entradas no cero de la matriz de restricciones para región de 15×15 y $t_{max} = 20$ con paisaje homogéneo (Fuente: Elaboración propia).	62

3-5	Estructura de las entradas no cero de la matriz de restricciones para región de 15×15 y $t_{max} = 10$ con paisaje heterogéneo (Susceptibilidad alta, media, baja y nula) (Fuente: Elaboración propia).	63
3-6	Simulación en paisaje homogéneo	65
3-7	Simulación en paisaje heterogéneo	67
3-8	Simulación en paisaje heterogéneo	69
3-9	Simulación en paisaje heterogéneo	71
3-10	Simulación en paisaje homogéneo y constricción	73
3-11	Simulación en paisaje heterogéneo y constricción	75
3-12	Propagación en diferentes mapas de susceptibilidad	76
3-13	Propagación en paisaje homogéneo y heterogéneo	76

1 Introducción

Los fenómenos de especies invasivas son un problema cada vez más recurrente en los ecosistemas, cultivos y bosques, y representan desastres ecológicos, ambientales y económicos incalculables, por esta razón se dedican muchos esfuerzos para la erradicación o control de estos fenómenos por parte de los gobiernos, instituciones no gubernamentales, empresas privadas o por las mismas comunidades afectadas.

La dinámica de la propagación en los fenómenos de especies invasivas depende de las características espaciales de la región de estudio, que van desde la altura, la topografía, el clima, el tipo de vegetación y otros aspectos que condicionan la reproducción y propagación de las especies invasivas y de las especies afectadas. También el factor estocástico puede intervenir en la dinámica de estos fenómenos, ya sea que la propagación se efectúe de forma estocástica en lugares contiguos al brote o en lugares aislados.

Los problemas de especies invasivas han sido estudiados fuertemente desde los años 80, sin embargo, los modelos propuestos en estos primeros estudios eran espacialmente implícitos, es decir, sólo se enfocaban en la evolución de la población de las especies invasivas en función del tiempo, sin tomar en cuenta el espacio, esto significa que estos modelos sólo describen cómo aumenta o disminuye la población de la especie invasora en cada momento, pero no muestran el tamaño de la población y su dinámica en el paisaje, sólo lo detallan de forma

global¹.

En trabajos posteriores se empieza a crear modelos espacialmente explícitos, pero sin tomar en cuenta la heterogeneidad de la región, es decir, no toman en cuenta las características físicas y climáticas del espacio; a pesar de basarse en paisajes homogéneos, el hecho de ser modelos espacialmente explícitos, representan una mejora, ya que el modelo permite visualizar la evolución de la propagación o erradicación de la especie invasiva para cada localidad de la región en cada instante, sin embargo, el hecho de no tomar en cuenta la heterogeneidad del espacio significa que implícitamente se asume que todas las celdas del paisaje tiene el mismo nivel de susceptibilidad para la infestación de la especie invasiva, es decir, estas suposiciones simples en la dinámica del fenómeno implican que la propagación de la especie invasiva se puede realizar desde una localidad infestada a cualquier otra localidad vecina con la misma tasa de propagación².

También se han presentado modelos que tienen un componente estocástico, que se adapta, en cierta medida, al efecto estocástico natural en los fenómenos de especies invasivas. El componente estocástico en la dinámica del fenómeno implica una mejoría en el modelo, ya que capta el comportamiento estocástico del fenómeno que e implica una mejor predicción de la dinámica del fenómeno en cada instante³.

Los fenómenos de especies invasivas se pueden modelar con ecuaciones diferenciales o con

¹Ver por ejemplo Moody, Michael E. ; Mack, Richard N.: Controlling the spread of plant invasions: the importance of nascent foci. En: *Journal of Applied Ecology* (1988). y Pannell, David J.: An economic response model of herbicide application for weed control. En: *Australian Journal of Agricultural Economics* 34 (1990), Nr. 3.

²Ver por ejemplo Epanchin-Niell, Rebecca S. ; Wilen, James: Optimal control of spatial-dynamic processes: the case of biological invasions. En: *Resources for the Future DP* (2011).

³Ver por ejemplo Chalak, Morteza ; Pannell, David J. ; Polyakov, Maksym: Economics of controlling invasive species: a stochastic optimisation model for a spatial-dynamic process. 2011. y Homans, Frances ; Horie, Tetsuya: Optimal detection strategies for an established invasive pest. En: *Ecological economics* 70 (2011).

modelos discretos basados en autómatas celulares. En este estudio se propone un modelo discreto basado en autómatas celulares combinado con un problema de optimización dinámica [2, 5].

La dinámica de la propagación en el modelo que se propone está determinada por ciertas restricciones lógicas establecidas en función de las variables de estado y variables de control propuestas para cada celda.

En modelos propuestos anteriormente [2, 5] se asume, implícitamente, que la propagación de las especies invasivas desde una celda (i, j) se da en todas las direcciones en el vecindario de Von Neumann [9]. En este trabajo se propone un modelo que captura la heterogeneidad del paisaje, en función de un mapa de susceptibilidad del paisaje previamente definido para el fenómeno de estudio [11, 19, 20]. En este trabajo se toma como modelo base el modelo propuesto en el trabajo [5] de control óptimo de Rebecca S. Epanchin-Niell y James Wilen. El modelo propuesto entonces representa una mejora a dicho modelo base.

La validación del modelo está basado en experimentos computacionales considerando regiones con diferentes escenarios respecto a la heterogeneidad y lugares donde inicia el brote para los cuales se obtienen resultados lógicos esperados.

1.1. Preliminares

1.1.1. Paisajes homogéneos y heterogéneos

En la modelación de fenómenos cuyas variables espaciales corresponden a regiones geográficas, se le suelen llamar *paisajes* a estas regiones de estudio. Los paisajes pueden tener subregiones con características diferenciadas que inciden en la dinámica del fenómeno, cuando esto es así se dice que los paisajes son *heterogéneos*, si no existen subregiones con características diferenciadas que inciden en la dinámica del fenómeno, entonces se dice que el paisaje es *homogéneo*. La heterogeneidad de los paisajes se suelen definir mediante mapas de calor o de susceptibilidad.

1.1.2. Autómatas Celulares

Los autómatas celulares constituyen una clase particular de sistemas dinámicos discretos sobre reticulados, estos son sistemas dinámicos que pueden expresarse mediante una ecuación en diferencia de orden uno:

$$x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0$$

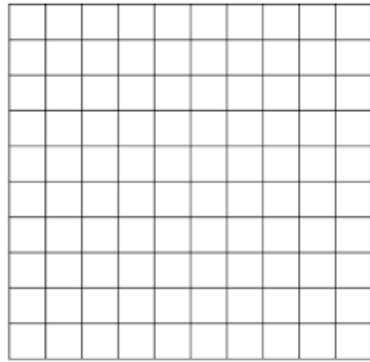
donde $x_n = \{x_n(i)\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ (d entero positivo fijo), cada $x_n(i)$ está en un espacio métrico M_i , llamado *espacio de fase del punto* $i \in \mathbb{Z}^d$, y F es un endomorfismo (Mapa de transición global) del producto topológico $M = \prod_{i \in \mathbb{Z}^d} M_i$ (Espacio de configuraciones) que preserva tal estructura topológica, es decir, $F(x) = \{F_i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$, donde $F_i : M \rightarrow M_i$. De esta forma, un sistema dinámico discreto sobre el reticulado \mathbb{Z}^d es la acción de \mathbb{N} con la evolución del sistema dada por F ; en el caso de ser F invertible la acción se extiende a \mathbb{Z} .

Los elementos que definen un autómata celular son:

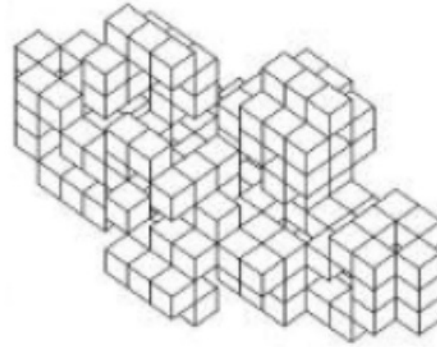
1. **El reticulado** $C := \mathbb{Z}^d$; para cada $i \in C$, $M_i = \mathcal{A}$ (métrica discreta) es un conjunto finito, denominado *alfabeto*.

Se realiza un reticulado en la región de estudio que produce un conjunto de celdas. La

geometría de las celdas usualmente son rectangulares, sin embargo, también pueden ser triangulares o hexagonales; el espacio de las celdas puede ser en dos o tres dimensiones.



Celdas rectangulares en 2D.
Fuente: Elaboración propia.



Celdas rectangulares en 3D.
Fuente: Reyes, D.A. [7]

Figura 1-1: Tipos de celdas

2. **Un vecindario finito** \mathbb{V} del origen en \mathbb{Z}^d .

Se define un vecindario para cada celda, en la figura se muestra los vecindarios usuales. La elección del vecindario tiene que ver con la simplicidad del modelo y con la dinámica del fenómeno que se quiere modelar.

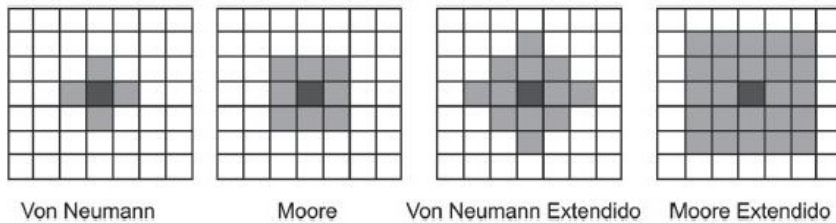


Figura 1-2: Tipos de vecindarios. Fuente: Martínez, G.J. [12]

3. **Un espacio de configuraciones**, $\Sigma(\mathcal{A}, d)$, es el conjunto de todas las sucesiones d -infinitas con valores en \mathcal{A} , es decir, $\Sigma(\mathcal{A}, d) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

4. Todas las posibles funciones de \mathbb{V} en \mathcal{A} , $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$ y

5. Una función de transición $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathcal{A}$

Tambiém se le llama *función bloque* determina el estado de cada celda en la siguiente fase, en función del estado actual de las celdas y de su vecindario. Cuando se quiere modelar fenómenos mediante autómatas celulares, la definición de la función de transición es la parte crucial de los autómatas celulares, ya que su definición determina la dinámica del sistema, la cual puede ser tan compleja como los fenómenos mismos que se modelan.

6. Una configuración inicial X_0

Para un tiempo inicial se debe conocer los estados de las celdas para estudiar su evolución en el tiempo.

Definición 1 *El autómata celular⁴ sobre el reticulado \mathbb{Z}^d con alfabeto \mathcal{A} y función bloque f , es el mapa de transición global $F : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$, definido por:*

$$F(x)(n) = f(x|\mathbb{V} + n)$$

para cada $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y cada $n \in \mathbb{Z}^d$; donde $x|\mathbb{V} + n$ denota la función de \mathbb{V} en \mathcal{A} dada por los valores que asume la sucesión x en el trasladado de \mathbb{V} por el vector d -dimensional de n .

En resumen los autómatas celulares son un conjunto de celdas cuyos estados van cambiando en el tiempo y se utilizan para simular y predecir la evolución de fenómenos físicos, biológicos, ecológicos y sociales, entre otros.

Una vez definido el conjunto de celdas, el vecindario, el conjunto de estados y la función de transición podemos ver la evolución de los autómatas en las fases futuras dada una configuración inicial.

⁴Definición tomada de [17].

1.1.3. Problema de control óptimo discreto

Dado un sistema dinámico, formulado en tiempo discreto, para N etapas o periodos, con condición inicial x_0 , para el cual se requiere determinar el vector de *control óptimo*

$u^* = (u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1))^T$ que minimiza (o maximiza) el funcional:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)]$$

y así conocer la *trayectoria de estado óptima* $x^* = (x^*(0), x^*(1), \dots, x^*(N-1), x^*(N))^T$.

Lo anterior corresponde a un *problema de control óptimo en tiempo discreto*[1] que consiste en:

$$\min_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)]$$

Sujeto a: $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$x(0) = x_0$$

$$u(k) \in \Omega(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Donde la evolución del sistema en el tiempo viene descrita por un sistema de ecuaciones en diferencias finitas, conocido como *ecuación de estado*:

$$x(k) = f(x(k), u(k), k), \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\text{con: } x(0) = x_0$$

siendo f una función:

$$f : D_1(\subset \mathbb{R}^n) \times D_2(\subset \mathbb{R}^m) \times \{0, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, \quad u, \quad k \quad) \longmapsto f(x, u, k)$$

Se supone que $u(k) \in \Omega(k) \subset \mathbb{R}^m$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

en donde para cada k , $\Omega(k)$ es el conjunto de controles admisibles.

El funcional objetivo es del tipo:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)],$$

siendo F y S funciones definidas como:

$$F : D_1(\subset \mathbb{R}^n) \times D_2(\subset \mathbb{R}^m) \times \{0, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, \quad u, \quad k \quad) \longmapsto F(x, u, k),$$

y

$$S : D_1(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x) \quad \longmapsto S(x).$$

respectivamente.

1.2. Estado del arte

Existen diversos trabajos de investigación que abordan los fenómenos de especies invasivas, entre estos, la mayoría están relacionados directa o indirectamente a modelos que se enfocan en el estudio de la dinámica de los brotes de especies invasivas en el espacio-tiempo. Predecir la dinámica de los brotes de especies invasivas permite tener cierta claridad en los escenarios a enfrentar en el futuro, para los cuales se podrán establecer políticas apropiadas para la contención o erradicación de los fenómenos de especies invasivas con el propósito de disminuir el impacto económico, ecológico y ambiental que generan los fenómenos de especies invasivas a gran escala.

A continuación se brinda una clasificación de los modelos de especies invasivas según sus características para tener un panorama general de las diferentes líneas de investigación respecto a los fenómenos de especies invasivas:

- **Modelos basados en autómatas celulares**⁵

Estos modelos son espacialmente explícitos por lo que permiten de una forma práctica la visualización de la dinámica de los brotes de especies invasivas; el trabajo en estos modelos se centra en establecer las reglas de transición adecuadas según el fenómeno que se estudie. Las reglas de transición pueden estar definidas de forma explícita o implícita, determinista o estocástica.

- **Modelos económicos**⁶

Estos modelos se basan en predecir el impacto económico o daños que producen los fenómenos de especies invasivas; otros modelos económicos se enfocan en establecer estrategias óptimas que minimicen los costos, ya sea por el control o por los daños que

⁵Ver por ejemplo los modelos en los trabajos de Epanchin-Niell y Wilen [5]; Chalak, Pannell y Polyakok [2]; y Yokomizo, Possingham, Thomas y Buckley [21].

⁶Ver por ejemplo los modelos en los trabajos de Olson y Roy [14]; Chalak, Pannell y Polyakok [2]; Epanchin-Niell y Wilen [5]; y Homans y Horie [10].

producen los brotes.

- **Modelos basados en paisajes homogéneos⁷**

Estos modelos asumen que el paisaje es homogéneo y el análisis va orientado en determinar el tamaño y dinámica de la población del brote en función del tiempo; también se analizan algunos aspectos cualitativos, por ejemplo: la geometría del paisaje, la geometría del brote, los lugares dónde se origina el brote, entre otros escenarios particulares.

- **Modelos basados en paisajes heterogéneos⁸**

Estos modelos capturan las características heterogéneas que inciden en la dinámica de los brotes de especies invasivas. La captura de las características heterogéneas del paisaje en los modelos se logra mediante la incorporación de ciertos parámetros en el modelo o mediante mapas de susceptibilidad.

- **Modelos estocásticos⁹**

En estos modelos la dinámica de los brotes de especies invasivas dependen de forma explícita o implícita de procesos estocásticos. Con qué probabilidad una celda será invadida desde una celda vecina, en qué ubicación remota surgirá un nuevo brote, cuál es el escenario esperado en un periodo de tiempo al surgir un brote de una especie invasiva, entre otros, son algunos de los aspectos que se abordan en estos modelos.

- **Estimación de parámetros y construcción de mapas de susceptibilidad¹⁰**

Estos trabajos tienen como objetivo realizar la estimación de los parámetros que definen los modelos de especies invasivas; también se construyen mapas de susceptibilidad que permiten a algunos modelos capturar la heterogeneidad de los paisajes, y gra-

⁷Ver por ejemplo los modelos en los trabajos de Epanchin-Niell y Wilen [5]; y Chalak, Pannell y Polyakok [2].

⁸Ver por ejemplo los modelos en los trabajos de Gustafson y Gardner [8]; Epanchin-Niell y Haight [4]; Lustig, Worner, Pitt, Doscher, Stouffer y Senay [11]; y Yoshimoto, Asante, Konoshima y Surovó [22].

⁹Ver por ejemplo los modelos en los trabajos de Saphores y Jean [18]; Olson y Roy [14]; Chalak, Pannell y Polyakok [2]; y Rasmussen y Hamilton[16].

¹⁰Ver por ejemplo los trabajos de Lustig, Worner, Pitt, Doscher, Stouffer y Senay [11]; Valdez, Chang, Chen, Chiang y Santos [19]; y Vasquez, Chi-Farn Chen, Lin, Kuo, Yan-You Shen, Medina y Díaz [20].

cias a los sistemas de información geográfica (GIS) se pueden actualizar los mapas de susceptibilidad de una forma práctica.

El modelo propuesto en este trabajo está basado en el artículo “*Optimal control of spatial-dynamic Processes: The case of biological invasions*” realizado por *Epanchin-Niell y Wilen* [5], el cual fue mejorado por *Morteza Chalak, David Pannell, y Maksym Polyakov* en el artículo “*Economics of controlling invasive species: A stochastic optimisation model for a spatial-dynamic process*” [2], adaptando el modelo de Epanchin en un entorno estocástico.

Otro trabajo similar a estos dos estudios es el artículo “*Integer programming approach to control invasive species spread based on cellular automaton model*” realizado por *Yoshimoto, Asante, Konoshima y Surový* en el cual se propone un modelo basado en autómatas celulares que captura la heterogeneidad del paisaje.

A continuación se presenta la descripción del modelo de *Epanchin* y de *Chalak* para tener una mejor comprensión del modelo que se propondrá en este trabajo y así poder compararlo con éstos dos modelos precursores. Dado que el modelo de *Epanchin* sirvió de base para el modelo de *Chalak* y para el modelo que se propone en este trabajo, se dará una descripción detallada del modelo de *Epanchin* para comprender las ideas centrales de los dos modelos que se derivan de él.

1.2.1. Modelo de Epanchin-Niell y Wilen

Se plantea un modelo económico de control óptimo basado en un problema de optimización dinámica binaria en un contexto de autómatas celulares. La solución de este modelo nos permite establecer las estrategias óptimas para la contención, erradicación o en su defecto, en la renuncia a cualquier intento de controlar la propagación porque se elevan los costos en tratar de controlar en comparación al impacto económico que generan los daños si se deja que el fenómeno siga su curso natural. Por otro lado, la solución del modelo brinda la

visualización de la evolución del brote en cada tiempo proyectado.

El modelo está basado en autómatas celulares donde el conjunto de celdas es una retícula en la región de estudio, cada celda puede tener dos estados diferentes, **presencia** o **ausencia** de la especie o ente invasor.

En este modelo se consideran estrategias de control para cada celda en cada tiempo t , con el propósito de controlar o erradicar el fenómeno de especies invasivas o en general un fenómeno de difusión; estas estrategias son básicamente dos, *remoción de la especie o ente invasor en una celda infestada* y *bloqueo de la frontera de una celda con presencia de la especie invasora a una celda sin presencia*; estas estrategias tienen asociado un costo económico que se debe establecer previamente para plantear el modelo, ya que los costos de estas estrategias de control son parámetros del modelo.

La evolución de los estados en el tiempo para cada celda y la forma en la que actúan las estrategias de control en el fenómeno tienen ciertas particularidades que hay que mencionar para comprender mejor el funcionamiento del modelo; quizás la forma en la que evolucionan las variables de estado y la forma en cómo actúan las variables de control, como se podrá ver, no son las más apegadas a la realidad, sin embargo, esto tiene una razón de ser, que es plantear un modelo que capture el efecto de las estrategias de control propuestas y la dinámica más simple de los estados, omitiendo muchas características del paisaje donde se desarrolla el fenómeno de tal manera que el modelo sea lo más simplificado posible.

I. Variable de estados

Cada celda (i, j) puede tener el estado presencia o ausencia de la especie invasora en el tiempo t . Para comprender la evolución de los estados en cada celda (i, j) , interpretando el modelo se destacan las siguientes observaciones:

- Si en la celda (i, j) en el tiempo t hay presencia de la especie invasora entonces en el tiempo $t + 1$ puede seguir la presencia de la especie invasora o puede haber

ausencia por la remoción de la especie. De igual manera si en la celda (i, j) en el tiempo t hay ausencia de la especie invasora entonces en el tiempo $t + 1$ puede seguir la ausencia de la especie o puede haber presencia por la presencia del invasor en las celdas vecinas en el tiempo t .

- En algunos fenómenos la presencia permanente de una especie invasora durante un periodo de tiempo en una celda (i, j) puede modificar la dinámica de los estados en dicha celda, de tal manera que la presencia del invasor durante un periodo largo de tiempo en la celda puede provocar al exterminio total de las especies víctimas, provocando a su vez la migración o muerte de la especie invasora. Esto implica que dicha celda sale del esquema de autómatas celulares, puesto que dicha celda ya no puede tener ninguno de los estado posibles, a menos que se considere un tercer estado que indique que no hay presencia ni ausencia de la especie invasora en dicha celda. En este modelo ésto no se considera, es decir, la presencia permanente por un periodo de tiempo en una celda (i, j) no condiciona la dinámica de los estados en la celda para tiempos futuros.

II. Variable de control: Remoción de la especie invasora

Esta estrategia consiste en eliminar la especie invasora en una celda (i, j) en un tiempo t . Según este modelo, la acción de remover nos lleva a tomar en cuenta las siguientes observaciones:

- La remoción de la especie invasora en una celda (i, j) en el tiempo t es independiente de si se removi6 la especie en el pasado en dicha celda.
- En algunos fenómenos la remoción de la especie invasora en una celda puede modificar la evolución de los estados en dicha celda, por ejemplo en algunas plantas con presencia de invasores como hongos o insectos, la eliminación de la plaga implica la eliminación de la especie víctima, en este caso la planta, mediante la tala, quema o rociado de químicos; por lo tanto, si se elimina la especie víctima

ya no tiene sentido hablar de los estados presencia o ausencia; en este modelo se asume que la remoción de la especie invasora no implica el exterminio de la especie víctima, por lo menos no para toda la población de la especie víctima en la celda, esto implica que es factible la invasión en dicha celda en tiempos futuros.

III. Variable de control: Bloqueo de frontera

Esta estrategia consiste en bloquear la frontera entre una celda (i, j) no invadida y una celda vecina (k, l) invadida en el tiempo t , con el propósito de evitar que la celda sin presencia de la especie invasora se infeste por la celda vecina. Según este modelo, la acción de bloquear fronteras entre celdas nos lleva a tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- El bloqueo de la frontera entre una celda (i, j) no invadida y una celda (k, l) invadida en el tiempo t , evita que haya invasión hacia la celda (i, j) desde la celda vecina (k, l) en el tiempo t .
- El bloqueo de la frontera entre dos celdas en el tiempo t , sólo es efectiva durante el tiempo t , es decir, dicha frontera en el tiempo $t + 1$ y posteriores estaría desbloqueada, a menos que se vuelva a bloquear durante ese tiempo $t + 1$ y posteriores. Dependiendo del fenómeno que se trate, un bloqueo podría durar mucho tiempo en comparación a un periodo de tiempo en el modelo, lo cual implica que el costo de bloquear se da una sola vez durante lo que podría durar el brote en el paisaje. A pesar de esto, en algunos casos el bloqueo exige un trabajo de mantenimiento que garantice el bloque durante el tiempo previsto, de lo contrario el control de bloquear pierde su efecto antes de tiempo.

IV. Reglas de transición del modelo

El modelo base define de forma implícita que la propagación se da de forma radial por una unidad (en un vecindario de Von Neumann), esto en combinación con las estrategias de control que se vayan aplicando en cada instante determina la dinámica de las transiciones, por tanto, los estados en cada celda (i, j) están en función de los estados de las celdas vecinas y de las estrategias de control aplicadas en la celda (i, j) en cada tiempo t .

La transición de los estados en la celda (i, j) respecto a los estados de sus celdas vecinas y asumiendo que no se aplican las estrategias de control en el tiempo t , la celda pasa de tener ausencia a presencia en el tiempo t , si en el tiempo $t - 1$ la celda (i, j) presentaba ausencia y al menos una de las celdas vecinas tenía presencia de la especie invasora en el tiempo $t - 1$.

Queda claro por lo anterior que la propagación de la especie invasora sólo se puede dar de una celda infectada a una celda contigua, sin embargo, en la realidad es posible que los fenómenos demuestren que es posible la invasión de una celda con presencia de la especie invasora a una celda no necesariamente contigua [10, 22] incluso podría darse desde celdas muy distantes. La incorporación o no de estos eventos particulares en el modelaje del fenómeno es algo que debe analizarse según la realidad del fenómeno en estudio.

Otro aspecto importante que hay que mencionar, es que la *tasa de propagación* es la misma en todas las direcciones para cada celda (i, j) y se mantiene constante en el tiempo, en la realidad los fenómenos muestran que la tasa de propagación puede ser diferente en cada dirección por la heterogeneidad del paisaje y además puede variar en función del tiempo. No hay duda que la heterogeneidad es muy importante en la dinámica de los fenómenos de especies invasivas, ya que ciertas variables espaciales pueden influir directamente en el fenómeno condicionando el grado de susceptibilidad

en cada celda y también define la rapidez con la que se efectúa la propagación.

Este modelo a pesar de que no capta la heterogeneidad del paisaje, realizando algunos experimentos para diferentes patrones de propagación, como número de brotes, posición de los brotes en el paisaje, tamaño de los brotes, geometría del brote y del paisaje, nos puede llevar a descubrir diferentes escenarios de propagación y control interesantes que permitan establecer políticas de control óptimas [6].

La combinación de la interacción de una celda con sus celdas vecinas y la aplicación de las estrategias de control generan una gama de situaciones que definen las reglas de transición de los autómatas celulares en este modelo.

A continuación detallamos todos los casos posibles que definen la dinámica de los autómatas celulares.

- **Caso 1:** Tanto la celda (i, j) como sus celdas vecinas tienen ausencia de la especie invasora en el tiempo $t - 1$ y no se aplican las estrategias de control, entonces la celda (i, j) permanece con ausencia en el tiempo t .
- **Caso 2:** La celda (i, j) tiene ausencia de la especie invasora, pero al menos una de sus celdas vecinas tienen presencia en el tiempo $t - 1$ y no se aplican las estrategias de control, entonces la celda (i, j) pasa a tener presencia en el tiempo t .
- **Caso 3:** La celda (i, j) tiene presencia de la especie invasora en el tiempo $t - 1$ y no se aplican las estrategias de control, independientemente de los estados de sus celdas vecinas en el tiempo $t - 1$ entonces la celda (i, j) permanece con presencia.
- **Caso 4:** La celda (i, j) tiene ausencia de la especie invasora, pero al menos una de sus celdas vecinas tienen presencia en el tiempo $t - 1$ entonces la celda (i, j) llega a tener presencia en el tiempo t , sin embargo, se aplica remoción en la celda (i, j) , entonces la celda (i, j) permanece con ausencia.

- **Caso 5:** La celda (i, j) tiene ausencia de la especie invasora, pero al menos una de sus celdas vecinas tienen presencia en el tiempo $t - 1$ y se aplica bloqueo de frontera entre la celda (i, j) y sus celdas vecinas con presencia en el tiempo t , entonces la celda (i, j) permanece con ausencia.
- **Caso 6:** La celda (i, j) tiene presencia de la especie invasora e independientemente de los estados de sus celdas vecinas en el tiempo $t - 1$ y se aplica remoción en la celda (i, j) , en el tiempo t entonces la celda (i, j) pasa a tener ausencia.

V. Criterios para aplicar las estrategias de control según el modelo

La aplicación de las estrategias de control en una celda (i, j) para cada tiempo t depende del costo económico que implica la aplicación o no de dichas estrategias, pero el criterio no es tomando en cuenta sólo por la aplicación de las estrategias de control en la celda (i, j) en el tiempo t , si no de forma conjunta en un periodo de tiempo largo T , que implica la suma de los costos de la aplicación de las estrategias en todas las celdas y los costos que producen la presencia de la especie invasora en todos los tiempos t . Lo anterior conlleva a la formulación de un problema de optimización dinámica [1].

La solución del problema de optimización dinámica nos dice *cuándo, dónde y qué estrategias de control se deben aplicar*, también brinda los estados de cada celda en cada tiempo t , permitiendo así la visualización de la evolución del fenómeno.

VI. Formulación del modelo

El modelo consiste en un problema de control óptimo basado en un autómata celular, a continuación definimos el autómata celular:

Autómata celular

- **El reticulado:** $C := \{1, 2, 3, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots, m\}$
- **El vecindario para cada celda $(i, j) \in C$:**

$$N_{ij} := \{(k, l) \in C : (i = k \text{ y } |j - l| = 1) \text{ o } (j = l \text{ y } |i - k| = 1)\}$$

(Vecindario de Von Neumann)

- **El conjunto de estados:** $U := \{0, 1\}$

El estado de cada celda (i, j) en el tiempo t lo denotaremos por $x_{i,j,t}$

- **La función de transición:**

$$\tau : U \times U^d \longrightarrow U$$

$$(x_{i,j}, x_1, \dots, x_d) \longmapsto u$$

donde

$$d := |N_{ij}|$$

VARIABLES DE ESTADO Y DE CONTROL

- $x_{i,j,t}$: Indica presencia/ausencia de la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de estado*).
- $y_{i,j,t}$: Indica si se remueve la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).
- $z_{i,j,k,l,t}$: Indica si se bloquea el borde comprendido entre la celda (i, j) y su celda vecina (k, l) en el tiempo t con el propósito de prevenir una invasión desde la celda (k, l) hacia la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).

PARÁMETROS

- r : Tasa de descuento.
- β_t : Factor de descuento en el tiempo t , donde $\beta_t = (1 + r)^{1-t}$.
- d : Costo por daño incurrido por periodo de tiempo en cada celda.
- e : Costo de remover la invasión de una celda.
- b : Costo de bloquear la invasión desde una celda vecina.

- t_{max} : Tiempo máximo en el que se proyecta la solución del modelo.

Formulación del problema de control óptimo

$$\text{mín} \sum_{t \in T, t > 0} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t} b \right\} \quad (1-1)$$

Sujeto a:

$$x_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-2)$$

$$y_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-3)$$

$$z_{i,j,k,l,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-4)$$

$$x_{i,j,0} = x_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C \quad (1-5)$$

$$y_{i,j,0} = 0, \quad \forall (i, j) \in C \quad (1-6)$$

$$z_{i,j,k,l,0} = 0, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C \quad (1-7)$$

$$x_{i,j,t} \geq x_{i,j,t-1} - y_{i,j,t}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0 \quad (1-8)$$

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t}, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0 \quad (1-9)$$

$$T = \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\}. \quad (1-10)$$

Los fenómenos de especies invasivas alcanzan un *punto de equilibrio*¹¹, ya sea porque se erradique totalmente la especie invasora, porque todo el paisaje sea invadido o porque el tamaño de la población de la especie invasora se mantenga por debajo de cierto umbral de tal manera que no genere problemas significativos.

¹¹Punto de equilibrio en este trabajo se refiere al estado estacionario que alcanzan los fenómenos de especies invasivas en el contexto de sistema dinámico.

Haciendo uso del *Principio de Optimalidad de Bellman* [1] este problema se resolverá como un problema de optimización dinámica con horizonte temporal finito determinado a priori, ya que desde el punto de vista de implementación computacional es factible resolverlo. Resolviendo en un horizonte finito es posible que el sistema alcance un estado aparentemente estacionario pero posteriormente puede salir de él y volver alcanzarlo más adelante, contrario a los problemas con horizonte infinito para los cuales se sabe que si el sistema no cambia en dos periodos consecutivos entonces se puede garantizar que se ha alcanzado un estado estacionario.

Para garantizar que el sistema con horizonte infinito alcance un estado estacionario, se fijarán restricciones respecto a los costos por daños y por la aplicación de controles después de que el sistema alcanza un aparente estado estacionario para un tiempo promedio t_{med} lo suficientemente grande que garantice dicho equilibrio.

Definimos las siguientes restricciones al modelo descrito anteriormente para garantizar la solución de equilibrio del problema:

- $x_{i,j,t} = x_{i,j,t_{med}}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $y_{i,j,t} = y_{i,j,t_{med}}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $z_{i,j,k,l,t} = z_{i,j,k,l,t_{med}}, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t > t_{med}.$

donde $1 < t_{mid} < t_{max}$.

Para los tiempos $t_{max} + 1$ hasta el infinito calculamos los costos por daños o control en estado estacionario:

$$\sum_{t=t_{max}+1}^{\infty} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t_{max}} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t_{max}} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t_{max}} b \right\} \quad (1-11)$$

Luego sumamos este cálculo a la función objetivo (1-1).

1.2.2. Modelo de Chalak, Pannell y Polyakov

Se parte del modelo económico presentado en el trabajo de control óptimo de *Epanchin-Niell* y *Wilen* [5], y se le incorpora a dicho modelo características estocásticas relacionadas a la propagación y control. Se establecen probabilidades relacionadas a la ocurrencia de que haya propagación hacia una celda desde una celda vecina, de forma similar con las estrategias de control, se establecen probabilidades respecto a si se aplican las estrategias de control de remover y bloquear la propagación.

Formulación del modelo

El modelo consiste en un problema de control óptimo basado en un autómata celular, a continuación definimos el autómata celular:

Autómata celular

- **El reticulado:** $C := \{1, 2, 3, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots, m\}$

- **El vecindario para cada celda** $(i, j) \in C$:

$$N_{ij} := \{(k, l) \in C : (i = k \text{ y } |j - l| = 1) \text{ o } (j = l \text{ y } |i - k| = 1)\}$$

(Vecindario de Von Neumann)

- **El conjunto de estados:** $U := \{0, 1\}$

El estado de cada celda (i, j) en el tiempo t lo denotaremos por $x_{i,j,t}$

- **La función de transición:**

$$\tau : U \times U^d \longrightarrow U$$

$$(a_{i,j}, u_1, \dots, u_d) \longmapsto u$$

donde

$$d := |N_{ij}|$$

VARIABLES DE ESTADO Y DE CONTROL

- $a_{i,j,t}$: Indica presencia/ausencia de la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de estado*).
- $c_{i,j,t}$: Indica si se remueve la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).
- $b_{i,j,k,l,t}$: Indica si se bloquea el borde comprendido entre la celda (i, j) y su celda vecina (k, l) en el tiempo t con el propósito de prevenir una invasión desde la celda (k, l) hacia la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).

PARÁMETROS

- r : Tasa de descuento.
- δ_t : Factor de descuento en el tiempo t , donde $\delta_t = (1 + r)^{1-t}$.
- d : Costo por daño incurrido por periodo de tiempo en cada celda.
- cc : Costo de remover la invasión de una celda.
- bc : Costo de bloquear la invasión desde una celda vecina.
- t_{max} : Tiempo máximo en el que se proyecta la solución del modelo.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

$$\min \sum_{t \in T, t > 0} \delta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} a_{i,j,t} d + \sum_{(i,j) \in C} c_{i,j,t} cc + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} b_{i,j,k,l,t} bc \right\} \quad (1-12)$$

Sujeto a:

$$a_{i,j,0} = a_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C \quad (1-13)$$

$$c_{i,j,0} = 0, \quad \forall(i, j) \in C \quad (1-14)$$

$$b_{i,j,k,l,0} = 0, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C \quad (1-15)$$

$$0 \leq \text{rand}(a)_{i,j,t} \leq 1, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-16)$$

$$0 \leq \text{rand}(c)_{i,j,t} \leq 1, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-17)$$

$$0 \leq \text{rand}(b)_{i,j,k,l,t} \leq 1, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-18)$$

$$p(a)_{i,j,t} \in \{0, 2, 0, 8, 1\}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-19)$$

$$p(c)_{i,j,t} \in \{0, 2, 0, 8, 1\}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-20)$$

$$p(b)_{i,j,k,l,t} \in \{0, 2, 0, 8, 1\}, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T \quad (1-21)$$

$$s(a)_{i,j,t} = 1, \quad \forall(i, j) \in C, \quad \text{rand}(a)_{i,j,t} \leq p(a)_{i,j,t} \quad (1-22)$$

$$s(a)_{i,j,t} = 0, \quad \forall(i, j) \in C, \quad \text{rand}(a)_{i,j,t} \geq p(a)_{i,j,t} \quad (1-23)$$

$$s(c)_{i,j,t} = 1, \quad \forall(i, j) \in C, \quad \text{rand}(c)_{i,j,t} \leq p(c)_{i,j,t} \quad (1-24)$$

$$s(c)_{i,j,t} = 0, \quad \forall(i, j) \in C, \quad \text{rand}(c)_{i,j,t} \geq p(c)_{i,j,t} \quad (1-25)$$

$$s(b)_{i,j,k,l,t} = 1, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad \text{rand}(b)_{i,j,k,l,t} \leq p(b)_{i,j,k,l,t} \quad (1-26)$$

$$s(b)_{i,j,k,l,t} = 0, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad \text{rand}(b)_{i,j,k,l,t} \geq p(b)_{i,j,k,l,t} \quad (1-27)$$

$$a_{i,j,t} \geq a_{i,j,t-1} - c_{i,j,t} s(c)_{i,j,t}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0 \quad (1-28)$$

$$a_{i,j,t} \geq a_{k,l,t-1} - c_{i,j,t} s(c)_{i,j,t} - b_{i,j,k,l,t} s(b)_{i,j,k,l,t}, \quad \forall(k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall(i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0 \quad (1-29)$$

$$a_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad T = \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\}. \quad (1-30)$$

Haciendo uso del *Principio de Optimalidad de Bellman* [1] este problema se resolverá como un problema de optimización dinámica con horizonte temporal finito determinado a priori, ya que desde el punto de vista de implementación computacional es factible resolverlo. Resolviendo en un horizonte finito es posible que el sistema alcance un estado aparentemente estacionario pero posteriormente puede salir de él y volver alcanzarlo más adelante, contrario a los problemas con horizonte infinito para los cuales se sabe que si el sistema no cambia en dos periodos consecutivos entonces se puede garantizar que se ha alcanzado un estado estacionario.

Para garantizar que el sistema con horizonte infinito alcance un estado estacionario, se fijarán restricciones respecto a los costos por daños y por la aplicación de controles después de que el sistema alcanza un aparente estado estacionario para un tiempo promedio t_{med} lo suficientemente grande que garantice dicho equilibrio.

Definimos las siguientes restricciones al modelo descrito anteriormente para garantizar la solución de equilibrio del problema:

- $a_{i,j,t} = a_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $c_{i,j,t} = c_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $b_{i,j,k,l,t} = b_{i,j,k,l,t_{med}}, \quad \forall (k,l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$

donde $1 < t_{mid} < t_{max}$.

Para los tiempos $t_{max} + 1$ hasta el infinito calculamos los costos por daños o control en estado estacionario:

$$\sum_{t=t_{max}+1}^{\infty} \delta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} a_{i,j,t_{max}} d + \sum_{(i,j) \in C} c_{i,j,t_{max}} cc + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} b_{i,j,k,l,t_{max}} bc \right\} \quad (1-31)$$

Luego sumamos este cálculo a la función objetivo (1-12).

2 Descripción del modelo

Los primeros modelos de propagación de especies invasivas se definían suponiendo un paisaje homogéneo lo cual provoca que los parámetros del modelo se vuelvan sensibles a pequeños cambios arrastrando errores en la predicción de la propagación [13, 15]. En la actualidad disponemos de herramientas tecnológicas como los satélites que nos brindan *Sistemas de Información Geográfica* (por sus siglas en inglés SIG) que hace posible incorporar la naturaleza heterogénea de los paisajes que rigen el comportamiento de los fenómenos de propagación de especies invasivas [3], por lo cual es una característica deseable en la modelación de estos fenómenos con el fin de establecer políticas de control más acertadas [4, 15].

Para poder incorporar la información heterogénea del paisaje en estudio se debe hacer un análisis previo para identificar cuáles son las variables que tienen mayor incidencia en la reproducción y propagación de la especie invasora, una vez que se tienen definidas estas variables se procede a construir un mapa de idoneidad del paisaje (ver por ejemplo [11, 19, 20]) y así poder tomar esta información e insetarla en el modelo.

Se consideró como modelo base el modelo económico presentado en el trabajo de control óptimo de *Epanchin-Niell* y *Wilen* [5] que propone un problema de optimización dinámica binaria, cuya solución permite optimizar los recursos para el control del fenómeno de especies invasivas, y a su vez nos brinda la visualización de la dinámica de la propagación del brote mediante la simulación basado en autómatas celulares.

No hay duda que el modelo base de *Epanchin* formula una forma práctica y simplificada la modelación de fenómenos de especies invasivas, y a pesar de que el modelo no captura la información importante que representa la heterogeneidad del paisaje respecto algunas variables de interés que condicionan la dinámica de la propagación, permite realizar diferentes experimentos computacionales que nos pueden llevar a observaciones muy interesantes respecto a las políticas de control óptimas a implementar en función de los patrones de propagación que resultan de las simulaciones con el modelo [6].

En este trabajo se quiere aportar mejoras al modelo base, conservando las bondades del modelo base sin complicar la solución del mismo. Dado que el modelo base asume un paisaje homogéneo, las mejoras que se proponen aquí están encaminadas a la incorporación de la heterogeneidad del paisaje al modelo mejorando la dinámica de las simulaciones respecto a la realidad de los fenómenos.

2.1. Modelo con la incorporación de la función de idoneidad

En este modelo se incorpora la *función de idoneidad* que captura ciertas características de la heterogeneidad del paisaje, dicha incorporación mejora la dinámica de las propagaciones de los brotes. La función de idoneidad capta la información de la heterogeneidad del paisaje mediante un mapa de idoneidad, previamente definido, el cual identifica cuáles son las celdas que tienen las condiciones idóneas mínimas para ser invadidas.

2.1.1. Formulación del modelo

El modelo consiste en un problema de control óptimo basado en un autómata celular, a continuación definimos el autómata celular:

Autómata celular

- **El reticulado:** $C := \{1, 2, 3, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots, m\}$

- **El vecindario para cada celda $(i, j) \in C$:**

$$N_{ij} := \{(k, l) \in C : (i = k \text{ y } |j - l| = 1) \text{ o } (j = l \text{ y } |i - k| = 1)\}$$

(Vecindario de Von Neumann)

- **El conjunto de estados:** $U := \{0, 1\}$

El estado de cada celda (i, j) en el tiempo t lo denotaremos por $x_{i,j,t}$

- **La Función de transición¹:**

$$\tau : U \times U^d \times T \longrightarrow U$$

$$(x_{i,j}, u_1, \dots, u_d, t) \longmapsto u$$

¹La función de transición en este modelo si depende del tiempo, a diferencia de los modelos presentados en las secciones (1.2.1) y (1.2.2), dado que el modelo asume un paisaje heterogéneo donde los mapas de susceptibilidad pueden variar respecto al tiempo.

donde

$$d := |N_{ij}|$$

$$T := \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\} \text{ (periodos de tiempo)}$$

Variables de estado y de control

- $x_{i,j,t}$: Indica presencia/ausencia de la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de estado*).
- $y_{i,j,t}$: Indica si se remueve la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).
- $z_{i,j,k,l,t}$: Indica si se bloquea el borde comprendido entre la celda (i, j) y su celda vecina (k, l) en el tiempo t con el propósito de prevenir una invasión desde la celda (k, l) hacia la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).

Parámetros

- r : Tasa de descuento.
- β_t : Factor de descuento en el tiempo t , donde $\beta_t = (1 + r)^{1-t}$.
- d : Costos por daño incurrido por periodo de tiempo en cada celda.
- e : Costo de remover la invasión de una celda.
- b : Costo de bloquear la invasión desde una celda vecina.
- t_{max} : Tiempo máximo en el que se proyecta la solución del modelo.

Formulación del problema de control óptimo

$$\min \sum_{t \in T, t > 0} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t} b \right\} \quad (2-1)$$

Sujeto a:

- $x_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T$
- $y_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T$
- $z_{i,j,k,l,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T$
- $\delta(i, j, k, l, t) \in \{0, 1\}, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0, \quad (\text{Función de idoneidad})$
- $x_{i,j,0} = x_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$
- $y_{i,j,0} = 0, \quad \forall (i, j) \in C$
- $z_{i,j,k,l,0} = 0, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$
- $x_{i,j,t} \geq x_{i,j,t-1} - y_{i,j,t}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0$
- $x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - \delta(i, j, k, l, t), \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0$
- $T = \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\}.$

Para garantizar que el sistema con horizonte infinito alcance un estado estacionario, se fijarán restricciones respecto a los costos por daños y por la aplicación de controles después de que el sistema alcanza un aparente estado estacionario para un tiempo promedio t_{med} lo

suficientemente grande que garantice dicho equilibrio.

Definimos las siguientes restricciones al modelo descrito anteriormente para garantizar la solución de equilibrio del problema:

- $x_{i,j,t} = x_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $y_{i,j,t} = y_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $z_{i,j,k,l,t} = z_{i,j,k,l,t_{med}}, \quad \forall (k,l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$

donde $1 < t_{mid} < t_{max}$.

Para los tiempos $t_{max} + 1$ hasta el infinito calculamos los costos por daños o control en estado estacionario:

$$\sum_{t=t_{max}+1}^{\infty} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t_{max}} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t_{max}} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t_{max}} b \right\} \quad (2-2)$$

Luego sumamos este cálculo a la función objetivo (2-1).

2.1.2. Efecto de la función de idoneidad en la dinámica de las variables.

La incorporación de la función de idoneidad en el modelo base cambia la dinámica de las variables de estados y de control, es decir, se modifican las reglas de transición definidas implícitamente en el modelo base, por tanto, la solución del modelo muestra una evolución posiblemente diferente (dependiendo de como responde la función de idoneidad respecto al paisaje) a no incorporar la función de idoneidad. La pregunta que nos aborda entonces es: ¿Qué efecto tiene la función de idoneidad en la transición de los autómatas celulares y qué mejora representa en la predicción de la evolución del fenómeno en la realidad?

La función de idoneidad sólo interviene en la restricción del modelo que está relacionado con la estrategia de control de *bloqueo de frontera*, la cual tiene como objetivo evitar la invasión de una celda con presencia a una celda vecina con ausencia de la especie invasora.

La función de idoneidad toma el valor 0 ó 1 y está definida en función del mapa de idoneidad, la cual mide las variables de mayor incidencia en la propagación de la especie invasiva, tomando valores para cada celda (i, j) en cada tiempo t . La función de idoneidad se define tomando como referencia un análisis previo identificando las variables de importancia que gobiernan la dinámica de la propagación de especies invasivas.

El efecto que tiene la función de idoneidad cuando toma el valor de 1 en la restricción, es evitar que el modelo sugiera activar las variables de control o la variable de estado. Esto significa que no será necesario aplicar las estrategias de control y tampoco habrá propagación hacia la celda (i, j) . Esto en el fenómeno se puede interpretar como que la propagación hacia la celda (i, j) *no es factible* por lo que no se destinarán recursos para la aplicación de las estrategias de control, ni tampoco habrá daños por invasión. En cambio, cuando la función de idoneidad toma el valor 0 para que la restricción se cumpla debe activarse al-

guna de las estrategias de control o la variable de estado. Esto en el fenómeno se puede interpretar como que la propagación hacia la celda (i, j) es factible por lo que será necesario la aplicación de las estrategias de control, o en su defecto, dejar que la propagación se efectúe.

Como podemos ver el efecto de la función de idoneidad en el modelo es “discriminar” la propagación de la especie invasora en ciertas celdas, donde el criterio se basa en un mapa de idoneidad previamente construido [11, 19, 20].

2.1.3. Interacción de la función de idoneidad con la variables de estado y de control

A continuación exploramos todos los casos posibles² que causa la función de idoneidad en la restricción relacionada con la estrategia de control *bloqueo de frontera*.

Restricción: $x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - \delta(i, j, k, l, t)$

Si $\delta(i, j, k, l, t)=0$

Si $\delta(i, j, k, l, t)=1$

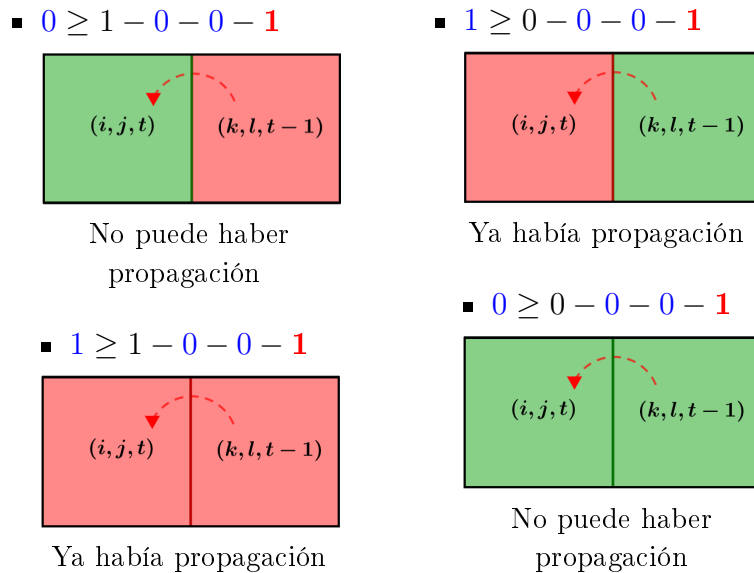


Figura 2-2: Efecto de la función de idoneidad.

²Todas las figuras mostradas en esta sección son propias.

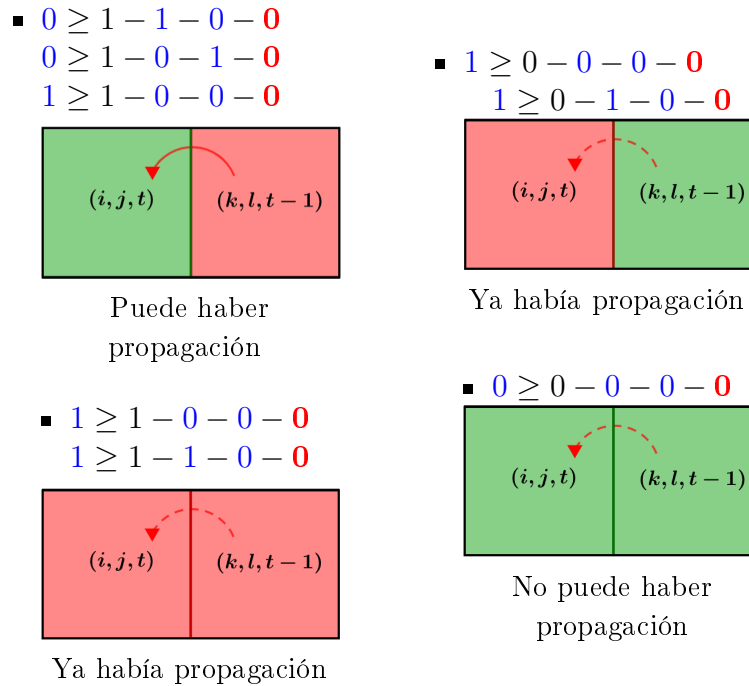


Figura 2-1: Efecto de la función de idoneidad.

2.1.4. Situaciones que aborda la función de idoneidad

- **Caso 1: Presencia de especie víctima en la celda con condiciones idóneas**

En este caso la celda (i, j) tiene presencia de la especie víctima en el tiempo t y presenta condiciones idóneas para que se lleve a cabo la propagación desde la celda vecina (k, l) , la cual tiene presencia de la especie invasora en el tiempo $t - 1$, entonces la función de idoneidad toma el valor 0 y esto provoca que el modelo sugiera que la variable de estado o una de las variables de control tomen el valor 1.

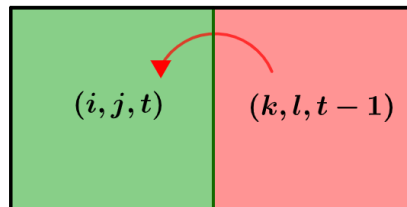


Figura 2-3: Habrá propagación si no se aplica un control

- **Caso 2: Presencia de especie víctima en la celda sin condiciones idóneas**

En este caso la celda (i, j) tiene presencia de la especie víctima en el tiempo t , sin embargo, no presenta condiciones idóneas³ para que se lleve a cabo la propagación desde la celda vecina (k, l) , la cual tiene presencia de la especie invasora en el tiempo $t - 1$, entonces la función de idoneidad toma el valor 1 y esto provoca que el modelo sugiera que la variable de estado y las variables de control tomen el valor 0.

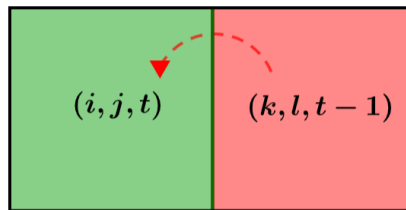


Figura 2-4: No habrá propagación

- **Caso 3: No hay presencia de especie víctima en la celda**

En este caso la celda (i, j) no tiene presencia de la especie víctima en el tiempo t , entonces la función de idoneidad toma el valor 1, lo cual implica que no habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t , aunque en el tiempo $t - 1$ una de sus celdas vecinas (k, l) tenga presencia de la especie invasora. Esto es así ya que en una celda que no haya presencia de la especie víctima entonces la especie invasora no podrá alimentarse, alojarse o reproducirse.

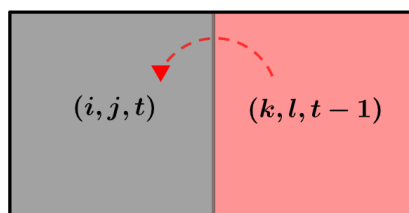


Figura 2-5: No puede haber propagación

³Existen diferentes factores que determinan si en una región hay condiciones idóneas para que la especie invasora se propague, las condiciones climáticas de la región y las condiciones de salud de la especie víctima podrían ser factores de peso para que haya idoneidad.

- **Caso 4: La celda no forma parte de la región de estudio**⁴

Por un asunto de simplicidad, el modelo se aplica a regiones rectangulares que enmarcan la verdadera región de estudio que muy probablemente sea una región irregular (no necesariamente un rectángulo), si una celda (i, j) está fuera de la región de estudio y en la que posiblemente si haya presencia de la especie víctima, interactúa en el modelo pero es discriminada por la función de idoneidad para que no sume daños por la presencia de la especie invasora ni costos por control.

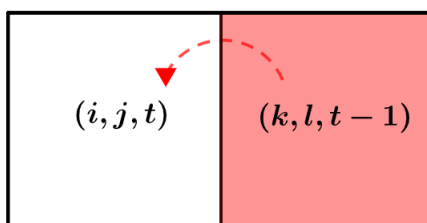


Figura 2-6: Puede haber propagación pero se discrimina porque no es una celda de interés.

⁴En este caso se debe analizar qué tanto puede incidir en la dinámica de la propagación, la discriminación de las celdas que están fuera de la región de estudio por cuestiones de división geográfica, se debe tomar en cuenta la geometría de la región de estudio y la del brote, entre otros aspectos. (Ver la propagación en los ejemplos presentados en [6])

2.2. Modelo con la incorporación de la función de susceptibilidad (alta, media, baja y nula).

El modelo anterior que incorpora la función de idoneidad en las restricciones, “*discrimina*” ciertas celdas, es decir, esas celdas discriminadas no pueden ser invadidas, esto repercute en la dinámica de la propagación volviéndolo más acorde a la realidad del fenómeno en estudio. La función de idoneidad se basa en un mapa que determina qué celdas son las idóneas para que haya propagación desde una de sus celdas vecinas y qué celdas no tienen las condiciones idóneas mínimas para que haya propagación y por lo tanto son discriminadas en el sentido que no pueden ser invadidas, pero siguen formando parte del esquema de variables de estado en el modelo.

A pesar de que el modelo base se mejora con la incorporación de la función de idoneidad, la discriminación o no de una celda mediante la función de idoneidad puede ser muy drástica, por lo que se propone un modelo que siga la misma idea de la función de idoneidad pero que aplique la “discriminación” de forma parcial durante un periodo de tiempo, es decir, que frene la propagación hacia una celda desde una celda vecina durante un tiempo determinado, esta mejora se considera en este trabajo con la incorporación de una función que se nombra como *función de susceptibilidad* y que está definida en base a un mapa con diferentes niveles de susceptibilidad (alta, media, baja y nula). La incorporación de la función de susceptibilidad en el modelo base representa una variante más general respecto al modelo que incorpora la función de idoneidad, y el efecto que genera la incorporación de esta función de susceptibilidad en la dinámica de las variables de estado y de control es el de una mayor complejidad, semejante en cierta medida, a la naturaleza compleja de los fenómenos de especies invasivas expresada en el mapa de susceptibilidad. Como se podrá ver más adelante la función de susceptibilidad provoca en la dinámica del modelo, una propagación más rápida en las celdas que son más susceptibles y una propagación lenta en las celdas menos susceptibles, es decir, la función de susceptibilidad genera *diferentes tasas de propagación*. La función de

susceptibilidad en el modelo se alimenta de un mapa de susceptibilidad con cuatro diferentes niveles previamente construido, y las buenas predicciones del modelo respecto al fenómeno que se esté estudiando recaen sobre el mapa de susceptibilidad, por lo que se deben dedicar muchos esfuerzos para construir buenos mapas de susceptibilidad si se quiere aplicar este modelo.

2.2.1. Formulación del modelo

El modelo consiste en un problema de control óptimo basado en un autómata celular, a continuación definimos el autómata celular:

Autómata celular

- **El reticulado:** $C := \{1, 2, 3, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots, m\}$

- **El vecindario para cada celda** $(i, j) \in C$:

$$N_{ij} := \{(k, l) \in C : (i = k \text{ y } |j - l| = 1) \text{ o } (j = l \text{ y } |i - k| = 1)\}$$

(Vecindario de Von Neumann)

- **El conjunto de estados:** $U := \{0, 1\}$

El estado de cada celda (i, j) en el tiempo t lo denotaremos por $x_{i,j,t}$

- **La Función de transición⁵:**

$$\tau : U \times U^d \times T \longrightarrow U$$

$$(x_{i,j}, u_1, \dots, u_d, t) \longmapsto u$$

donde

$$d := |N_{ij}|$$

$$T := \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\} \text{ (periodos de tiempo)}$$

⁵La función de transición en este modelo si depende del tiempo, a diferencia de los modelos presentados en las secciones (1.2.1) y (1.2.2), dado que el modelo asume un paisaje heterogéneo donde los mapas de susceptibilidad pueden variar respecto al tiempo.

VARIABLES DE ESTADO Y DE CONTROL

- $x_{i,j,t}$: Indica presencia/ausencia de la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de estado*).
- $y_{i,j,t}$: Indica si se remueve la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).
- $z_{i,j,k,l,t}$: Indica si se bloquea el borde comprendido entre la celda (i, j) y su celda vecina (k, l) en el tiempo t con el propósito de prevenir una invasión desde la celda (k, l) hacia la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).

PARÁMETROS

- r : Tasa de descuento.
- β_t : Factor de descuento en el tiempo t , donde $\beta_t = (1 + r)^{1-t}$.
- d : Costos por daño incurrido por periodo de tiempo en cada celda.
- e : Costo de remover la invasión de una celda.
- b : Costo de bloquear la invasión desde una celda vecina.
- t_{max} : Tiempo máximo en el que se proyecta la solución del modelo.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

$$\min \sum_{t \in T, t > 0} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t} b \right\} \quad (2-3)$$

Sujeto a:

- $x_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T$

- $y_{i,j,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T$
- $z_{i,j,k,l,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T$
- $S(i, j, k, l, t) \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0, \quad (\text{Función de susceptibilidad})$
- $x_{i,j,0} = x_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$
- $y_{i,j,0} = 0, \quad \forall (i, j) \in C$
- $z_{i,j,k,l,0} = 0, \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$
- $x_{i,j,t} \geq x_{i,j,t-1} - y_{i,j,t}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 0$
- $x_{i,j,1} \geq x_{k,l,0} - y_{i,j,1} - z_{i,j,k,l,1} - S(i, j, k, l, 1), \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$
- $x_{i,j,2} \geq x_{k,l,1} + \left[\frac{S(i, j, k, l, 2) + 2}{3} \right] x_{k,l,0} - y_{i,j,2} - z_{i,j,k,l,2} - S(i, j, k, l, 2), \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$
- $x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \left[\frac{S(i, j, k, l, t) + 2}{3} \right] x_{k,l,t-2} + \left[\frac{S(i, j, k, l, t) + 1}{3} \right] x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - S(i, j, k, l, t), \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t \in T, \quad t > 2$
- $T = \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\}.$
- $t_{max} \geq 3$

Para garantizar que el sistema con horizonte infinito alcance un estado estacionario, se fijarán restricciones respecto a los costos por daños y por la aplicación de controles después de que el sistema alcanza un aparente estado estacionario para un tiempo promedio t_{med} lo suficientemente grande que garantice dicho equilibrio.

Definimos las siguientes restricciones al modelo descrito anteriormente para garantizar la solución de equilibrio del problema:

- $x_{i,j,t} = x_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i, j) \in C, \quad t > t_{med}.$

- $y_{i,j,t} = y_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $z_{i,j,k,l,t} = z_{i,j,k,l,t_{med}}, \quad \forall (k,l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$

donde $1 < t_{mid} + 2 < t_{max}$.

Para los tiempos $t_{max} + 1$ hasta el infinito calculamos los costos por daños o control en estado estacionario:

$$\sum_{t=t_{max}+1}^{\infty} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t_{max}} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t_{max}} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t_{max}} b \right\} \quad (2-4)$$

Luego sumamos este cálculo a la función objetivo (2-3).

2.2.2. Efecto de la función de susceptibilidad en la dinámica del modelo.

El modelo con la función de susceptibilidad captura la información de un mapa con cuatro niveles diferentes de susceptibilidad (alta, media, baja y nula) y el modelo los interpreta como diferentes tasas de propagación provocando que la dinámica de los experimentos sean más acorde a la realidad del fenómeno, cuya dinámica se rige principalmente por la heterogeneidad del paisaje además de otros aspectos como lo son la geometría del brote y los lugares donde surgen los brotes [6]. Desde luego el éxito predictivo del fenómeno con este modelo pasa por la construcción del mapa de susceptibilidad, es decir, un mapa más cercano a la realidad del fenómeno provocará que el modelo nos brinde proyecciones futuras más certeras.

Una observación importante es que el modelo con la función de susceptibilidad con los niveles (alta, media, baja y nula) es un modelo más general que el modelo con la función de idoneidad, ya que si la función de susceptibilidad sólo toma los valores 0 y 3 entonces queda un modelo equivalente al modelo con la función de idoneidad que toma los valores 0 y 1 respectivamente. A continuación se muestra los diferentes escenarios en la dinámica de propagación que provoca la función de susceptibilidad:

- **Caso 1: Susceptibilidad alta** ($S(i, j, k, l, t) = 0$)

Al sustituir $S(i, j, k, l, t) = 0$ en el modelo tenemos:

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \left\lfloor \frac{0+2}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-2} + \left\lfloor \frac{0+1}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 0$$

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t}$$

Como podemos ver por la desigualdad anterior en este caso la dinámica del modelo en el tiempo t sólo tiene memoria para el tiempo anterior ($t - 1$) en las celdas vecinas.

Si la variable de estado en la celda vecina cumple que $x_{k,l,t-1} = 1$ (Ver Figura 2-7.b), entonces se puede observar en la desigualdad que la variable de estado $x_{i,j,t}$ se ve comprometida a tomar el valor 1 para que la desigualdad se cumpla, a menos que salga más barato aplicar una medida de control, lo cual implica que $y_{i,j,t} = 1$ o que $z_{i,j,k,l,t} = 1$.

Podemos concluir entonces que asumiendo presencia de la especie víctima en la celda (i, j) en el tiempo t , si en el tiempo $t-1$ una de sus celdas vecinas (k, l) tiene presencia de la especie invasora y no se aplica ningún control, entonces la función de susceptibilidad determina que si habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t . Si en el tiempo $t-1$ no hay presencia de la especie invasora en la celda vecina (k, l) (Ver Figura 2-7.a) entonces no habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t .

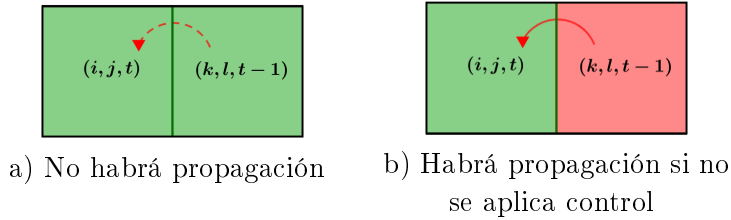


Figura 2-7: Tasa de propagación alta.

■ **Caso 2: Susceptibilidad media** ($S(i, j, k, l, t) = 1$)

Al sustituir $S(i, j, k, l, t) = 1$ en el modelo tenemos:

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \left\lfloor \frac{1+2}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-2} + \left\lfloor \frac{1+1}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 1$$

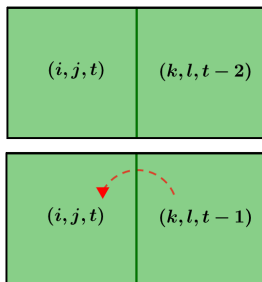
$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + x_{k,l,t-2} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 1$$

Como podemos ver por la desigualdad anterior en este caso la dinámica del modelo

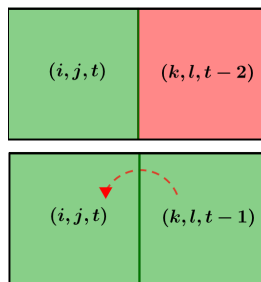
en el tiempo t tiene memoria para dos tiempos pasados ($t - 1$ y $t - 2$) en las celdas vecinas.

Si las variables de estado en las celdas vecinas cumplen que $x_{k,l,t-1} = 1$ y $x_{k,l,t-2} = 1$ (Ver Figura 2-8.d), entonces se puede observar en la desigualdad que la variable de estado $x_{i,j,t}$ se ve comprometida a tomar el valor 1 para que la desigualdad se cumpla, a menos que salga más barato aplicar una medida de control, lo cual implica que $y_{i,j,t} = 1$ o que $z_{i,j,k,l,t} = 1$.

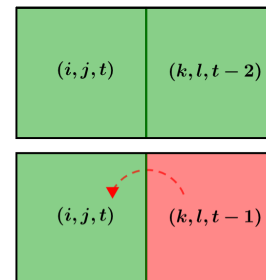
Podemos concluir entonces que asumiendo presencia de la especie víctima en la celda (i, j) en el tiempo t , si en los tiempos $t - 1$ y $t - 2$ una de sus celdas vecinas (k, l) tiene presencia de la especie invasora y no se aplica ningún control, entonces la función de susceptibilidad con valor 1 determina que si habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t . Si en algunos de los tiempos $t - 1$ o $t - 2$ no hay presencia de la especie invasora en la celda vecina (k, l) (Ver Figuras 2-8.a, 2-8.b y 2-8.c) entonces no habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t .



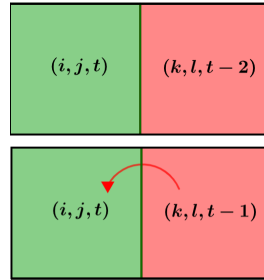
a) No habrá propagación



b) No habrá propagación



c) No habrá propagación



d) Habrá propagación si no se aplica control

Figura 2-8: Tasa de propagación media.

■ **Caso 3: Susceptibilidad baja** ($S(i, j, k, l, t) = 2$)

Al sustituir $S(i, j, k, l, t) = 2$ en el modelo tenemos:

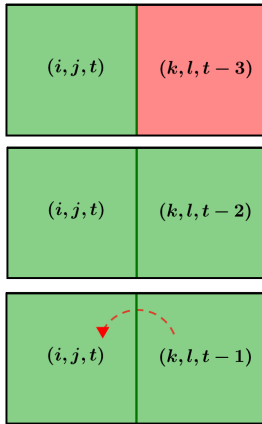
$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \left\lfloor \frac{2+2}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-2} + \left\lfloor \frac{2+1}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 2$$

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + x_{k,l,t-2} + x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 2$$

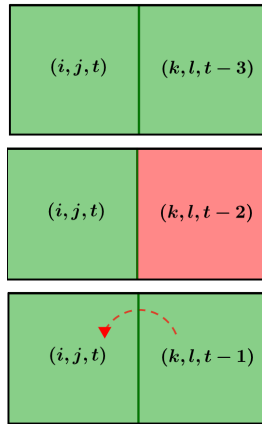
Como podemos ver por la desigualdad anterior en este caso la dinámica del modelo en el tiempo t tiene memoria para tres tiempos pasados ($t-1$, $t-2$ y $t-3$) en las celdas vecinas.

Si las variables de estado en las celdas vecinas cumplen que $x_{k,l,t-1} = 1$, $x_{k,l,t-2} = 1$ y $x_{k,l,t-3} = 1$ (Ver Figura 2-9.a), entonces se puede observar en la desigualdad que la variable de estado $x_{i,j,t}$ se ve comprometida a tomar el valor 1 para que la desigualdad se cumpla, a menos que salga más barato aplicar una medida de control, lo cual implica que $y_{i,j,t} = 1$ o que $z_{i,j,k,l,t} = 1$.

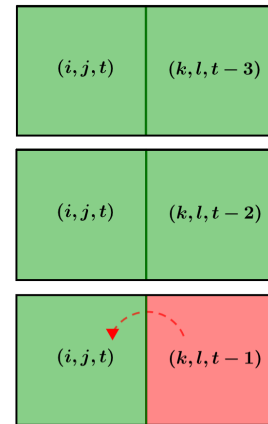
Podemos concluir entonces que asumiendo presencia de la especie víctima en la celda (i, j) en el tiempo t , si en los tiempos $t - 1$, $t - 2$ y $t - 3$ una de sus celdas vecinas (k, l) tiene presencia de la especie invasora y no se aplica ningún control, entonces la función de susceptibilidad con valor 1 determina que si habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t . Si en algunos de los tiempos $t - 1$, $t - 2$ o $t - 3$ no hay presencia de la especie invasora en la celda vecina (k, l) (Ver Figuras 2-9.a, 2-9.b, 2-9.c, 2-9.d, 2-9.e, 2-9.f y 2-9.g) entonces no habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t .



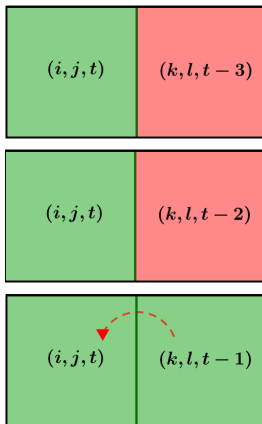
a) No habrá propagación



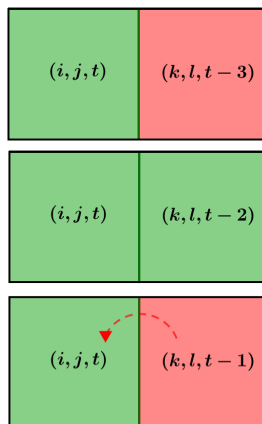
b) No habrá propagación



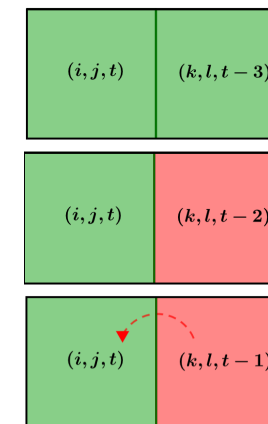
c) No habrá propagación



d) No habrá propagación



e) No habrá propagación



f) No habrá propagación

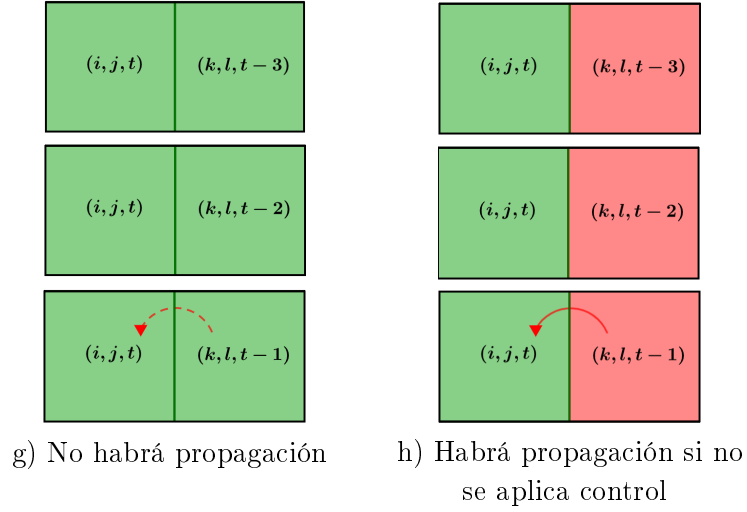


Figura 2-9: Tasa de propagación baja.

■ **Caso 4: Susceptibilidad nula** ($S(i, j, k, l, t) = 3$)

Al sustituir $S(i, j, k, l, t) = 3$ en el modelo tenemos:

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \left\lfloor \frac{3+2}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-2} + \left\lfloor \frac{3+1}{3} \right\rfloor x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 3$$

$$x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + x_{k,l,t-2} + x_{k,l,t-3} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - 3$$

Como podemos ver por la desigualdad anterior en este caso la dinámica del modelo en el tiempo t tiene memoria para tres tiempos pasados ($t-1$, $t-2$ y $t-3$) en las celdas vecinas.

Independientemente de los valores de las variables de estado en las celdas vecinas $x_{k,l,t-1}$, $x_{k,l,t-2}$ y $x_{k,l,t-3}$, incluso si $x_{k,l,t-1} = x_{k,l,t-2} = x_{k,l,t-3} = 1$, entonces se puede observar en la desigualdad que la variable de estado $x_{i,j,t}$ no se ve comprometida a tomar el valor 1, por lo que el modelo indicará que tome el valor 0, de igual manera

las variables de control $y_{i,j,t} = 0$ y $z_{i,j,k,l,t} = 0$.

Podemos concluir entonces que no habrá propagación hacia la celda (i, j) en el tiempo t y no será necesario aplicar ningún control. Esta situación se puede interpretar como que la función de susceptibilidad “discrimina” la celda (i, j) en el modelo (así como la función de idoneidad en el modelo anterior cuando $\delta(i, j, k, l, t) = 0$) y puede ser por diferentes motivos, podría ser que la celda (i, j) si puede ser invadida, es decir, si hay presencia de la especie víctima pero no forma parte de la región de estudio (Ver Figura 2-10.a) y debe discriminarse para que no sume daños por la presencia de la especie invasora ni costos por control⁶; otra situación es que la celda (i, j) si es parte de la región de estudio pero no es posible que haya invasión, ya sea porque no hay presencia de la especie víctima o porque si hay presencia de la especie víctima pero presenta condiciones especiales que no hacen posible la invasión en dicha celda (Ver Figura 2-10-b). Por un asunto de simplicidad el modelo se aplica a regiones rectangulares que enmarcan la verdadera de región de estudio que muy probablemente sea irregular (No necesariamente un rectángulo), si una celda (i, j) está fuera de la región de estudio y en la que posiblemente si haya presencia de la especie víctima, interactúa en el modelo pero es discriminada por el mapa de susceptibilidad.

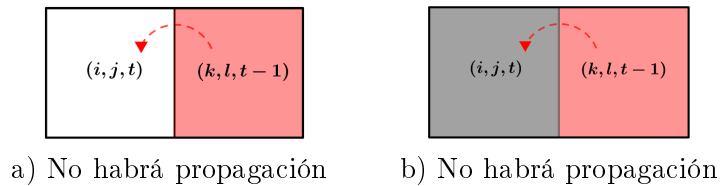


Figura 2-10: Tasa de propagación nula.

⁶En este caso se debe analizar qué tanto puede incidir en la dinámica de la propagación, la discriminación de las celdas que están fuera de la región de estudio por cuestiones de división geográfica, se debe tomar en cuenta la geometría de la región de estudio y la del brote, entre otros aspectos. (Ver la propagación en los ejemplos presentados en [6])

2.3. Modelo con la incorporación de la función de susceptibilidad para N+1 niveles.

El modelo con la incorporación de la función de susceptibilidad con los 4 niveles (alta, media, baja y nula) lo asociamos con tasas de propagación (alta, media, baja y nula), para ser más precisos, en un escenario de propagación sin ningún control, si la propagación alta invade k celdas entonces la propagación media invade $\frac{2}{3}k$ celdas, la propagación baja invade $\frac{1}{3}k$ celdas y la propagación nula invade 0 celdas, sin embargo, estas tasas de propagación no necesariamente tendrán exactamente estas relaciones en el fenómeno, por lo tanto, se extiende la función de susceptibilidad a $N + 1$ niveles que nos permita considerar en el modelo la cantidad de niveles necesarios, en combinación con un adecuado tamaño para las celdas, para hacer una adecuación correcta de las tasas de propagación del fenómeno en estudio.

2.3.1. Formulación del modelo

El modelo consiste en un problema de control óptimo basado en un autómata celular, a continuación definimos el autómata celular:

Autómata celular

- **El reticulado:** $C := \{1, 2, 3, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots, m\}$
- **El vecindario para cada celda $(i, j) \in C$:**
$$N_{ij} := \{(k, l) \in C : (i = k \text{ y } |j - l| = 1) \text{ o } (j = l \text{ y } |i - k| = 1)\}$$

(Vecindario de Von Neumann)
- **El conjunto de estados:** $U := \{0, 1\}$

El estado de cada celda (i, j) en el tiempo t lo denotaremos por $x_{i,j,t}$

- **La Función de transición⁷:**

$$\tau : U \times U^d \times T \longrightarrow U$$

$$(x_{i,j}, u_1, \dots, u_d, t) \longmapsto u$$

donde

$$d := |N_{ij}|$$

$$T := \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\} \text{ (periodos de tiempo)}$$

VARIABLES DE ESTADO Y DE CONTROL

- $x_{i,j,t}$: Indica presencia/ausencia de la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de estado*).
- $y_{i,j,t}$: Indica si se remueve la especie invasora en la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).
- $z_{i,j,k,l,t}$: Indica si se bloquea el borde comprendido entre la celda (i, j) y su celda vecina (k, l) en el tiempo t con el propósito de prevenir una invasión desde la celda (k, l) hacia la celda (i, j) en el tiempo t (*variable de control*).

PARÁMETROS

- r : Tasa de descuento.
- β_t : Factor de descuento en el tiempo t , donde $\beta_t = (1 + r)^{1-t}$.
- d : Costos por daño incurrido por periodo de tiempo en cada celda.
- e : Costo de remover la invasión de una celda.
- b : Costo de bloquear la invasión desde una celda vecina.

⁷La función de transición en este modelo si depende del tiempo, a diferencia de los modelos presentados en las secciones (1.2.1) y (1.2.2), dado que el modelo asume un paisaje heterogéneo donde los mapas de susceptibilidad pueden variar respecto al tiempo.

- t_{max} : Tiempo máximo en el que se proyecta la solución del modelo.

Formulación del problema de control óptimo

$$\min \sum_{t \in T, t > 0} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t} b \right\} \quad (2-5)$$

Sujeto a:

- $x_{i,j,t} \in \{0, 1\}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$
- $y_{i,j,t} \in \{0, 1\}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$
- $z_{i,j,k,l,t} \in \{0, 1\}$, $\forall (k, l) \in N_{i,j}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$
- $S(i, j, k, l, t) \in \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$, $\forall (k, l) \in N_{i,j}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$, $t > 0$, (**Función de susceptibilidad**)
- $x_{i,j,0} = x_{i,j}$, $\forall (i, j) \in C$
- $y_{i,j,0} = 0$, $\forall (i, j) \in C$
- $z_{i,j,k,l,0} = 0$, $\forall (k, l) \in N_{i,j}$, $\forall (i, j) \in C$
- $x_{i,j,t} \geq x_{i,j,t-1} - y_{i,j,t}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$, $t > 0$
- $x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \sum_{r=1}^{t-1} \left[\frac{S(i, j, k, l, t) + N - r}{N} \right] x_{k,l,t-r-1} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - S(i, j, k, l, t)$,
 $\forall (k, l) \in N_{i,j}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$, $1 \leq t \leq N - 1$
- $x_{i,j,t} \geq x_{k,l,t-1} + \sum_{r=1}^{N-1} \left[\frac{S(i, j, k, l, t) + N - r}{N} \right] x_{k,l,t-r-1} - y_{i,j,t} - z_{i,j,k,l,t} - S(i, j, k, l, t)$,
 $\forall (k, l) \in N_{i,j}$, $\forall (i, j) \in C$, $t \in T$, $t > N - 1$
- $T = \{0, 1, 2, 3, \dots, t_{max}\}$.

- $t_{max} \geq N$

Para garantizar que el sistema con horizonte infinito alcance un estado estacionario, se fijarán restricciones respecto a los costos por daños y por la aplicación de controles después de que el sistema alcanza un aparente estado estacionario para un tiempo promedio t_{med} lo suficientemente grande que garantice dicho equilibrio.

Definimos las siguientes restricciones al modelo descrito anteriormente para garantizar la solución de equilibrio del problema:

- $x_{i,j,t} = x_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $y_{i,j,t} = y_{i,j,t_{med}}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$
- $z_{i,j,k,l,t} = z_{i,j,k,l,t_{med}}, \quad \forall (k,l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in C, \quad t > t_{med}.$

donde

$$1 < t_{mid} + N - 1 < t_{max}.$$

Para los tiempos $t_{max} + 1$ hasta el infinito calculamos los costos por daños o control en estado estacionario:

$$\sum_{t=t_{max}+1}^{\infty} \beta_t \left\{ \sum_{(i,j) \in C} x_{i,j,t_{max}} d + \sum_{(i,j) \in C} y_{i,j,t_{max}} e + \sum_{\substack{(k,l) \in N_{i,j}, \\ (i,j) \in C}} z_{i,j,k,l,t_{max}} b \right\} \quad (2-6)$$

Luego sumamos este cálculo a la función objetivo (2-5).

3 Marco computacional

La implementación del modelo se realizó en MatLab. Dicha implementación se puede dividir en 8 módulos:

1. **Definición de la retícula:** Para la región de estudio y el tiempo máximo a resolver se debe tomar en cuenta:

- a) Las diferentes tasas de propagación de la especie invasiva.
- b) En base a lo anterior se establece el tamaño de las celdas y la unidad de tiempo adecuada.

2. **Construcción del mapa de susceptibilidad**

La construcción del mapa de susceptibilidad se realiza en base a un estudio minucioso donde se debe tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- a) Identificación de las variables de importancia en el fenómeno: Estas variables son las que inciden directamente en la reproducción de la especie invasiva, en el transporte y aquellas que debilitan y vuelven vulnerable a potenciales invasiones a la especie víctima.
- b) Obtención de los datos respecto a las variables de importancia establecidas anteriormente; estos datos se deben mapear usando algún software de GIS con un tamaño de pixel proporcional a los tamaños de las celdas definidos previamente.

- c) Una vez mapeadas las diferentes capas de datos relacionadas a las variables de importancia se construye una capa cuyas celdas tengan asociado un valor numérico que oscila entre un valor mínimo y máximo correspondientes a susceptibilidad baja (incluso podría ser nula) y alta respectivamente.

El valor de susceptibilidad asignado a cada celda se define en función de las variables de importancia, las cuales tiene asociados pesos que indican una jerarquía de importancia, donde las de mayor jerarquía tiene mayor impacto.

3. Definición de la función de susceptibilidad

- a) Se establece el número de niveles de susceptibilidad N que exige el modelo: Se determina en función de las diferentes tasas de propagación del fenómeno en combinación con el tamaño de las celdas.
- b) Se define los valores que toma la función de susceptibilidad en función del mapa de susceptibilidad, para ello se definen N rangos entre el valor mínimo y máximo que brinda el mapa de susceptibilidad y según el valor que tenga una celda en el mapa de susceptibilidad, la función de susceptibilidad toma el nivel de susceptibilidad que corresponde.

4. Estimación de los costos

- a) Costos por daños de presencia de la especie invasiva en una celda.
- b) Costos por bloquear frontera entre dos celdas.
- c) Costos por remover la especie invasiva en una celda.

5. Determinación del parámetro económico tasa de descuento: r .

6. Ensamblado del vector de variables y de la matriz de restricciones del problema de optimización.

7. Solución del problema de optimización.

Al convertir el problema de control óptimo en uno de programación lineal discreta, se logra resolver de forma simultanea, todos los estados y controles desde $t = 1$ hasta $t = t_{max}$.

8. Simulación de la solución.

Una vez resuelto el problema de control óptimo para todos los estados y controles desde $t = 1$ hasta $t = t_{max}$, en este módulo se muestran los estados de cada celda para cada tiempo t , y así apreciar la evolución de los autómatas en el periodo de tiempo definido.

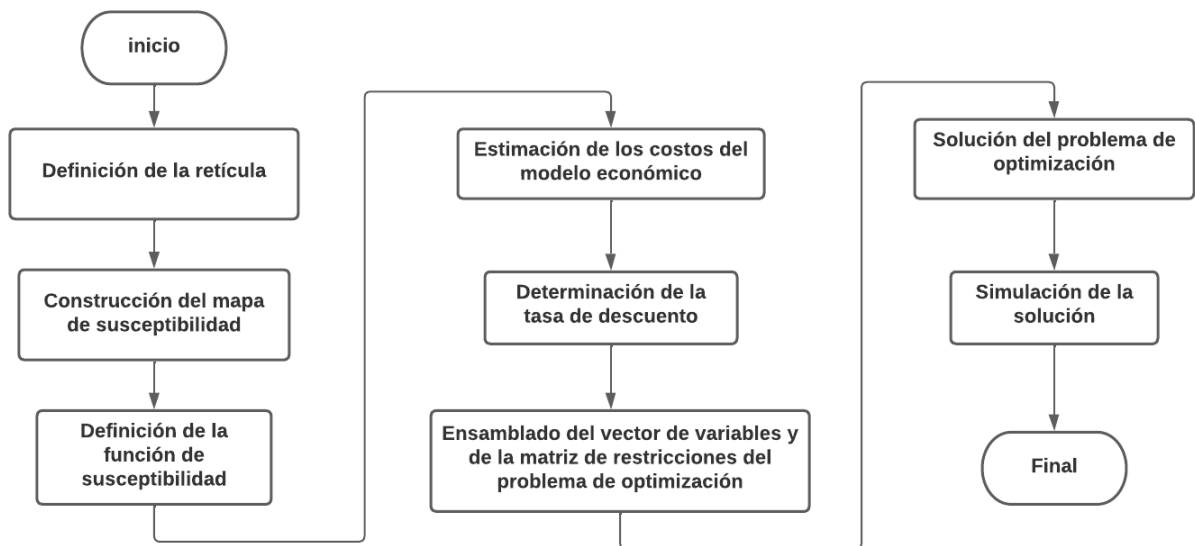


Figura 3-1: Secuencia de procesos para la implementación del modelo (Fuente: Elaboración propia).

Respecto a los experimentos

Los experimentos en este trabajo son ficticios, es decir, no corresponden a un fenómeno en particular, entonces se hacen las siguientes consideraciones:

1. Se trabaja con retículas cuyas celdas no tienen un tamaño predefinido, sólo se definen el número de celdas que comprende la cuadrícula.
2. Se utilizan diferentes mapas de susceptibilidad con características especiales.
3. Se trabajan con la función de susceptibilidad para 4 niveles: Alta, media, baja y nula.
4. El tiempo máximo en el que se resuelve se especifica en cada experimento.
5. Los costos económicos son *daño*: $d = 1$, para *bloquear* (b) y *remover* (e) se especifican en cada experimento.
6. Se trabaja con la *tasa de descuento* $r = 0,05$.
7. Para resolver el problema de optimización se usó la función de MatLab **intlinprog**, otro módulo alternativo para resolver el problemas de optimización es *SCIP* basado en el lenguaje ZIMPL.
8. Para la simulación se usó la función: **imagesc**.

Para el ensamblado del vector de variables y de la matriz de restricciones del problema de optimización no se incluye el código ya que es algo extenso, sin embargo, se dan las ideas principales que pueden ser de mucha ayuda para poder realizar la implementación.

3.1. Ensamblado de las matrices

El modelo en esencia consiste en un problema de optimización dinámica, en el que se deben ir tomando decisiones en el tiempo con el propósito de controlar de forma óptima el fenómeno de especies invasivas. Esto significa que las variables de estados y de control toman valores para cada tiempo t , una forma práctica de resolver este problema es plantear el problema de optimización dinámica como un problema de optimización lineal aprovechando la linealidad de las restricciones y de la función objetivo. Por tanto, el modelo económico se puede escribir como:

$$\text{mín } f(\mathcal{X}) = F^T \mathcal{X}$$

Sujeto a: $A\mathcal{X} \leq b$

La construcción de las matrices A y b es la parte más laboriosa en la implementación del modelo ya que combina las restricciones en función de las variables de estado y de control para cada tiempo t hasta un tiempo máximo t_{max} . La forma en la que se construye las matrices A , b y F puede variar, eso depende de cómo se define el vector de variables \mathcal{X} .

A continuación se detalla cómo se define \mathcal{X} y las matrices A , b y F en este trabajo para la implementación del modelo.

Consideremos las variables X_t , Y_t y Z_t las cuales se definen como:

$$X_t = [x_{1,1,t}, x_{1,2,t}, \dots, x_{1,m,t}, x_{2,1,t}, x_{2,2,t}, \dots, x_{2,m,t}, \dots, x_{n,1,t}, x_{n,2,t}, \dots, x_{n,m,t}]$$

$$Y_t = [y_{1,1,t}, y_{1,2,t}, \dots, y_{1,m,t}, y_{2,1,t}, y_{2,2,t}, \dots, y_{2,m,t}, \dots, y_{n,1,t}, y_{n,2,t}, \dots, y_{n,m,t}]$$

$$Z_t = [z_{i,j,k,l,t}], \quad \forall (k, l) \in N_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in C$$

Entonces se define el vector solución del modelo:

- $\mathcal{X} = [X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \dots X_{t_{max}}, Y_{t_{max}}, Z_{t_{max}}]^T$

- $\mathcal{X} \in \{0, 1\}^d$

donde

$$d = (2numCeldas + numAristas)t_{max}$$

$$d = [4nm - n - m]t_{max}$$

para una región rectangular de tamaño $n \times m$

El modelo entonces se puede escribir como:

$$\mathbf{min} f(\mathcal{X}) = F^T \mathcal{X} \tag{3-1}$$

Sujeto a

$$A\mathcal{X} \leq b \tag{3-2}$$

donde las matrices F , A y b se construyen tomando en cuenta el vector de variables \mathcal{X} .

Antes de ver cómo se definieron las matrices F , A y b hablaremos de las dimensiones de éstas.

Observaciones Para un problema cuya región de rectangular está conformada por $n \times m$ celdas y considerando un tiempo máximo t_{max} , los tamaños de las matrices 3-1 y 3-2 que conforman el modelo de optimización son:

- X_t : es de tamaño $1 \times nm$ (número de celdas en la región).
- y_t : es de tamaño $1 \times nm$ (número de celdas en la región).
- Z_t : es de tamaño $1 \times (2nm - n - m)$ (número de aristas entre celdas).

por tanto:

- \mathcal{X} es de tamaño: $(4nm - n - m)t_{max}$
- F es de tamaño: $(4nm - n - m)t_{max}$
- A es de tamaño: $[(5nm - 2n - 2m)t_{max}] \times [(4nm - n - m)t_{max}]$

- b es de tamaño: $(5nm - 2n - 2m)t_{max}$

Definición de las matrices 3-1 y 3-2

- $F = (f_k)_{k=1,2,\dots,(4nm-n-m)t_{max}}$, donde

$$f_k = \begin{cases} d(1+r)^{1-\frac{k-k\text{mod}(4nm-n-m)}{4nm-n-m}} & , \text{ si } k\text{mod}(4nm-n-m) \leq nm \\ e(1+r)^{1-\frac{k-k\text{mod}(4nm-n-m)}{4nm-n-m}} & , \text{ si } nm+1 \leq k\text{mod}(4nm-n-m) \leq 2nm \\ b(1+r)^{1-\frac{k-k\text{mod}(4nm-n-m)}{4nm-n-m}} & , \text{ si } k\text{mod}(4nm-n-m) \geq 2nm+1 \end{cases}$$

- $A = (a_{k,l})_{k=1,2,\dots,(5nm-2n-2m)t_{max}, l=1,2,\dots,(4nm-n-m)t_{max}}$, el ensamblado de esta matriz se hace por bloques donde cada bloque es una matriz de tamaño $(5nm - 2n - 2m) \times (4nm - n - m)$

La construcción de los bloques se hace tomando en cuenta la enumeración de las celdas y las aristas entre celdas como se muestran en las siguientes figuras.

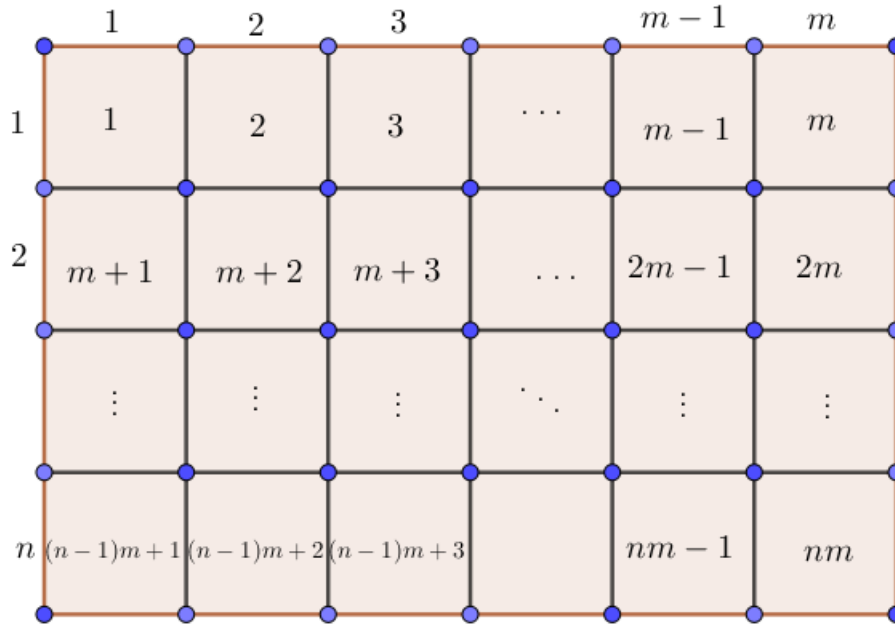


Figura 3-2: Enumeración de celdas para una región de $n \times m$ (Fuente: Elaboración propia).

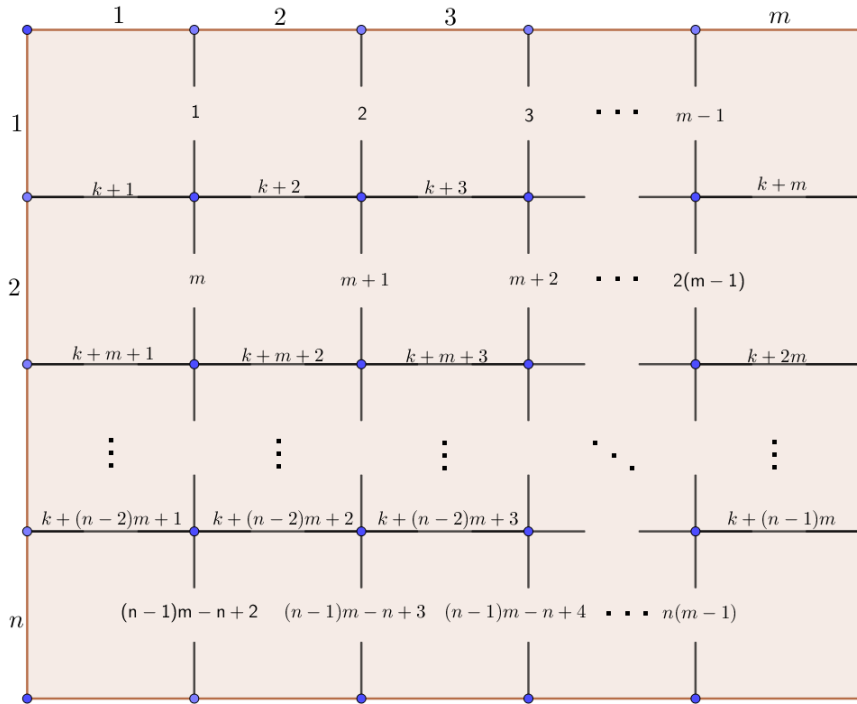


Figura 3-3: Enumeración de aristas entre celdas para una región de $n \times m$. ($k = n(m - 1)$) (Fuente: Elaboración propia).

La regla de correspondencia entre celdas y el enumerado de celdas y aristas están dadas por:

- **Número de celda para (i, j) :** $c(i, j) = m(i - 1) + j$
- **Número de arista entre las celdas (i, j) y la celda vecina (k, l) :**

$$a(i, j, k, l) = \begin{cases} (i - 1)(m - 1) + j & , \text{ si } k = i \wedge l = j + 1 \\ (i - 1)(m - 1) + j - 1 & , \text{ si } k = i \wedge l = j - 1 \\ n(m - 1) + (i - 1)m + j & , \text{ si } k = i + 1 \wedge l = j \\ n(m - 1) + (i - 2)m + j & , \text{ si } k = i - 1 \wedge l = j \end{cases}$$

Estructura de la matriz de restricciones A

Las matrices de restricciones que surgen del modelo son esparcidas, por lo que se recomienda utilizar una estructura de almacenamiento eficiente para el ahorro de memoria. En las siguientes figuras se muestran la estructura que tienen estas matrices.

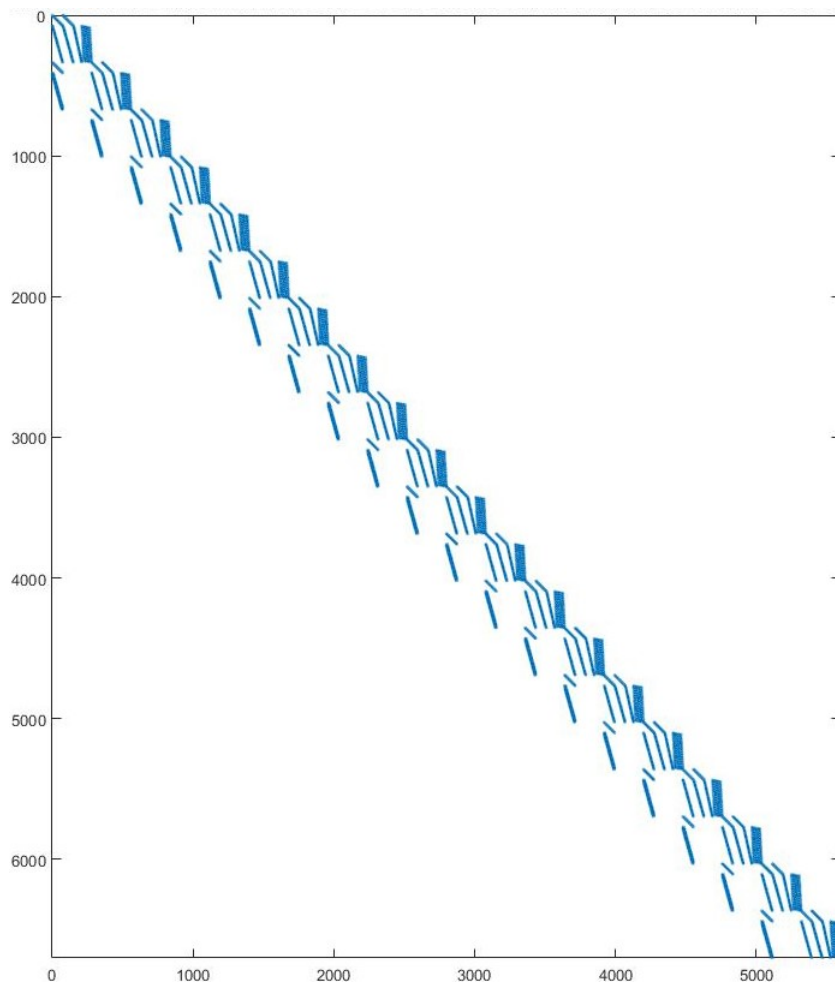


Figura 3-4: Estructura de las entradas no cero de la matriz de restricciones para región de 15×15 y $t_{max} = 20$ con paisaje homogéneo (Fuente: Elaboración propia).

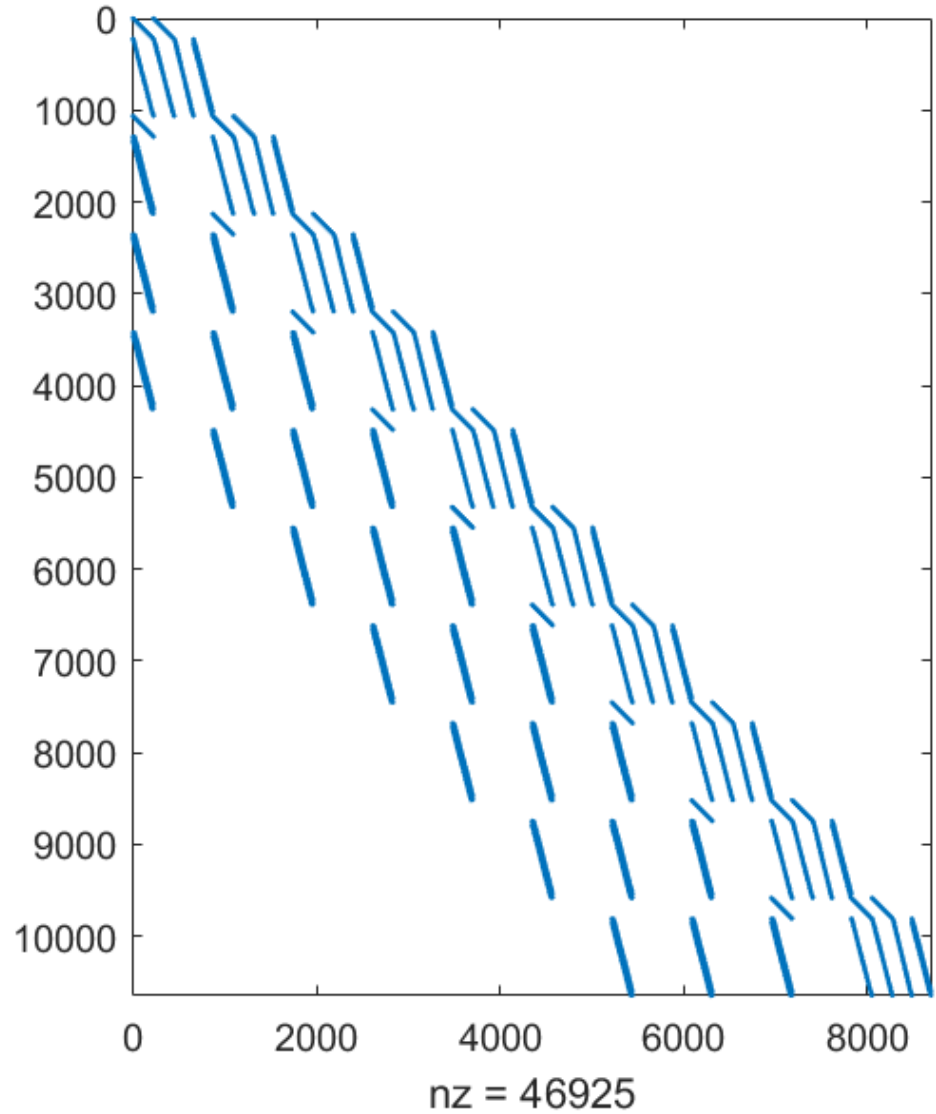


Figura 3-5: Estructura de las entradas no cero de la matriz de restricciones para región de 15×15 y $t_{max} = 10$ con paisaje heterogéneo (Susceptibilidad alta, media, baja y nula) (Fuente: Elaboración propia).

3.2. Experimentos computacionales

Se realizó diferentes experimentos computacionales para diferentes mapas de susceptibilidad y se contrastó con el modelo base que asume un paisaje homogéneo¹.

3.2.1. Experimento 1: Simulación en paisaje homogéneo

Dinámica de la propagación: El modelo asume un paisaje homogéneo (Nivel de susceptibilidad alta en todo el mapa), sin haber un intento de control, el brote se propaga de las celdas invadidas a sus celdas vecinas en cada tiempo.

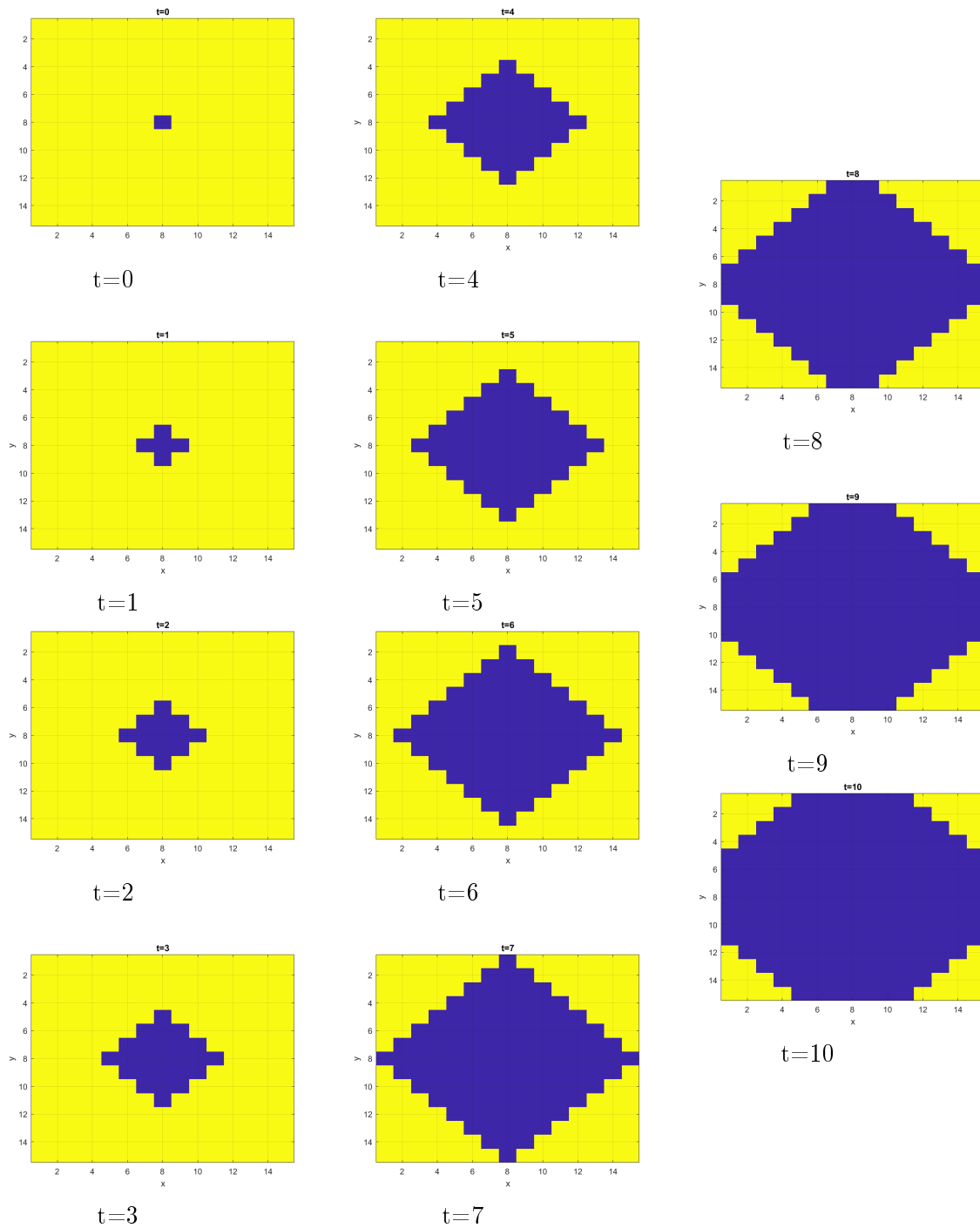
Parámetros

- **Región rectangular:** 15×15
- **Brote inicial:** En celda (8, 8)
- **Parámetros:** $t_{max} = 10$, $d = 1$, $e = 1000$, $b = 20$ $r = 0,05$

Resultados

- **Política de control:** Abandono
- **Daño total del paisaje:** 62.7 %
- **Costos por daños:** 459.754721
- **Costos por control:** 0

¹Todas las figuras mostradas en esta sección son propias

**Figura 3-6:** Simulación en paisaje homogéneo

3.2.2. Experimento 2: Simulación con paisaje heterogéneo

Mapa de susceptibilidad:

El modelo asume un paisaje heterogéneo con 3 niveles de susceptibilidad:

- **Susceptibilidad alta:** En un 11.11 % en la parte central del paisaje.
- **Susceptibilidad media:** En un 42.67 % dispuesto como un anillo concéntrico a la región central de susceptibilidad alta.
- **Susceptibilidad baja:** En un 46.22 % en la parte periférica del paisaje.
- **Susceptibilidad nula:** En un 0 % del paisaje.

Dinámica de la propagación:

Sin haber un intento de control, el brote se propaga de las celdas invadidas a sus celdas vecinas propagándose rápido desde el centro, luego desacelera en la región de susceptibilidad media y al llegar a la región con susceptibilidad baja se propaga con lentitud.

Parámetros

- **Región rectangular:** 15×15
- **Brote inicial:** En celda (8,8)
- **Parámetros:** $t_{max} = 10$, $d = 1$, $e = 1000$, $b = 20$ $r = 0,05$

Resultados

- **Política de control:** Abandono
- **Daño total del paisaje:** 36 %
- **Costos por daños:** 287.936769
- **Costos por control:** 0

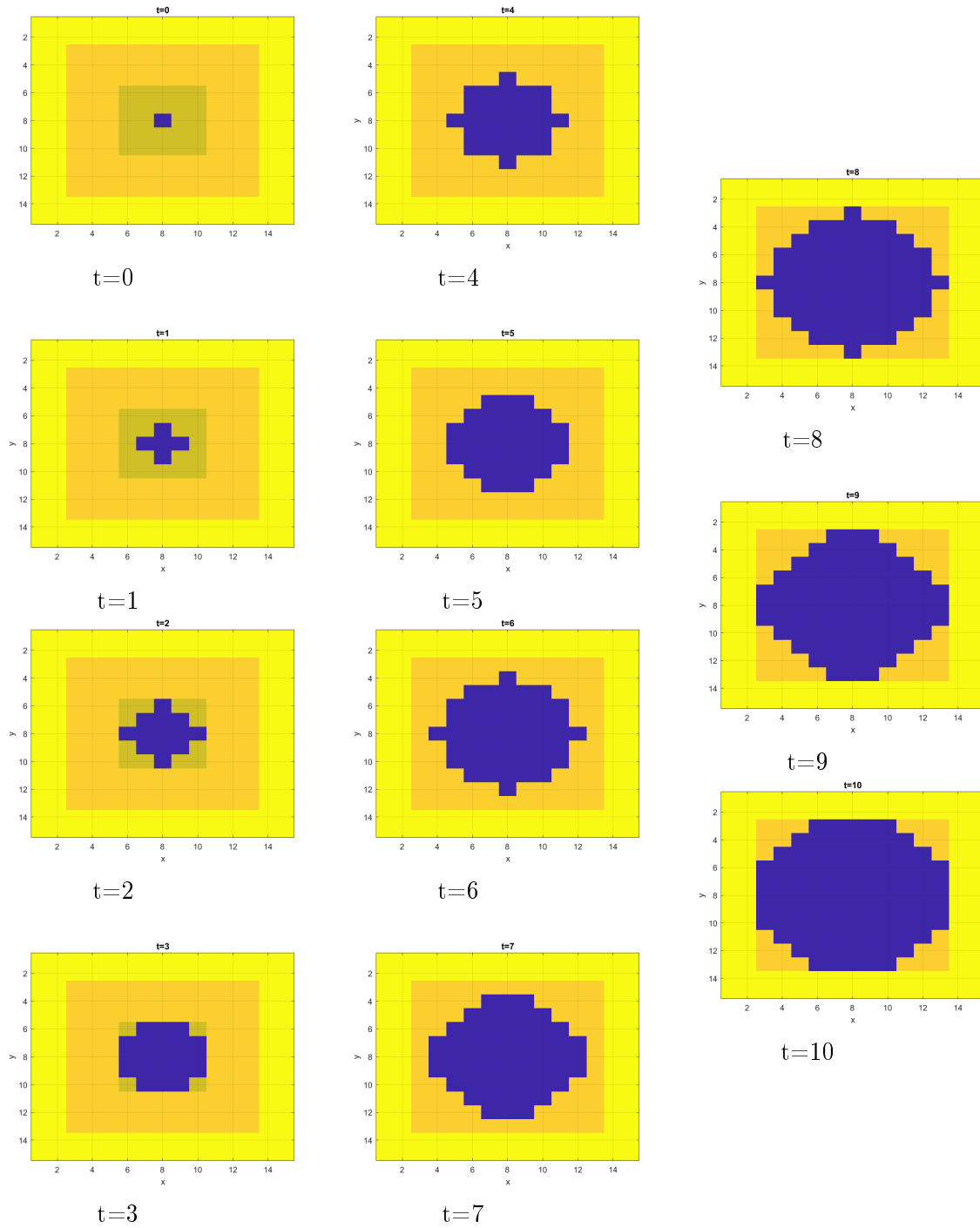


Figura 3-7: Simulación en paisaje heterogéneo

3.2.3. Experimento 3: Simulación con paisaje heterogéneo

Mapa de susceptibilidad:

El modelo asume un paisaje heterogéneo con 3 niveles de susceptibilidad:

- **Susceptibilidad alta:** En un 46.22 % en la parte periférica del paisaje.
- **Susceptibilidad media:** En un 42.67 % dispuesto como un anillo concéntrico a la región central de susceptibilidad baja.
- **Susceptibilidad baja:** En un 11.11 % en la parte central del paisaje.
- **Susceptibilidad nula:** En un 0 % del paisaje.

Dinámica de la propagación:

Sin haber un intento de control, el brote se propaga de las celdas invadidas a sus celdas vecinas propagándose lento desde el centro, luego acelera en la región de susceptibilidad media y al llegar a la región con susceptibilidad alta se propaga con rapidez.

Parámetros

- **Región rectangular:** 15×15
- **Brote inicial:** En celda $(8, 8)$
- **Parámetros:** $t_{max} = 10$, $d = 1$, $e = 1000$, $b = 20$ $r = 0,05$

Resultados

- **Política de control:** Abandono
- **Daño total del paisaje:** 16.44 %
- **Costos por daños:** 87.659966
- **Costos por control:** 0

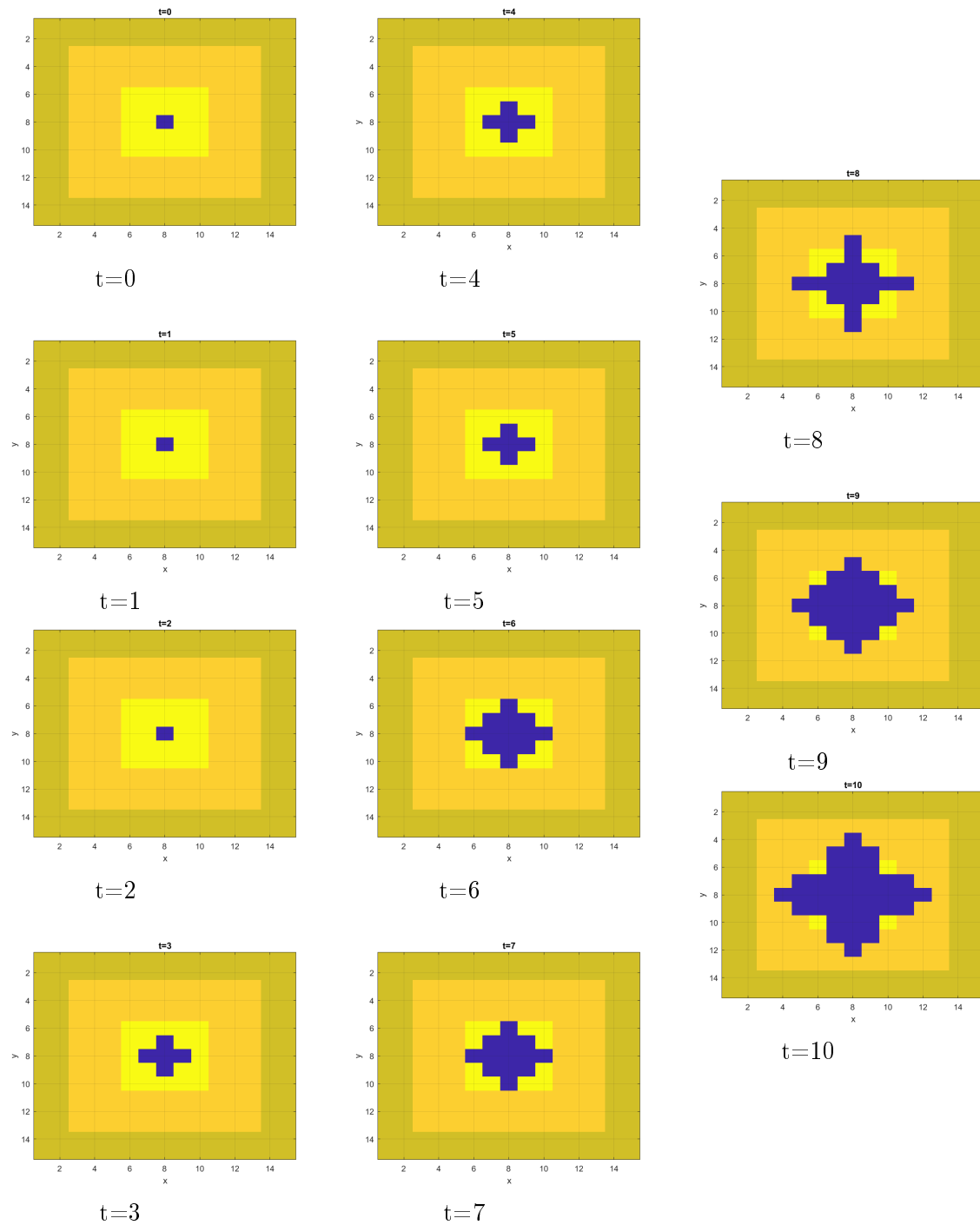


Figura 3-8: Simulación en paisaje heterogéneo

3.2.4. Experimento 4: Simulación con paisaje heterogéneo

Mapa de susceptibilidad:

El modelo asume un paisaje heterogéneo con 4 niveles de susceptibilidad:

- **Susceptibilidad alta:** En un 26.66 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad media:** En un 26.66 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad baja:** En un 26.66 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad nula:** En un 20 % distribuidos aleatoriamente.

Dinámica de la propagación:

Sin haber un intento de control, el brote se esparce a diferentes tasas de propagación.

Parámetros

- **Región rectangular:** 15×15
- **Brote inicial:** En celda (8,8)
- **Parámetros:** $t_{max} = 10$, $d = 1$, $e = 1000$, $b = 20$ $r = 0,05$

Resultados

- **Política de control:** Abandono
- **Daño total del paisaje:** 20 %
- **Costos por daños:** 109.771170
- **Costos por control:** 0

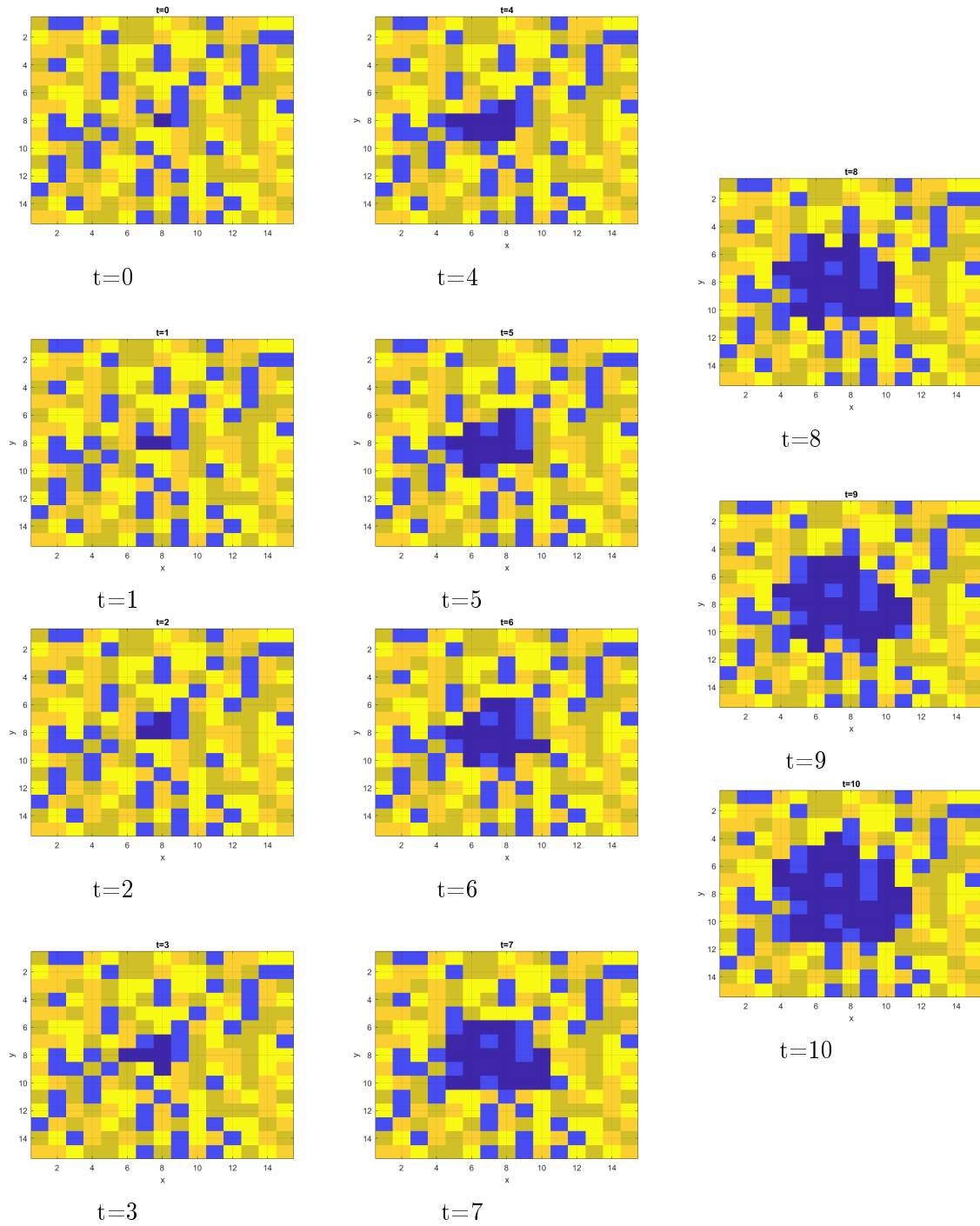


Figura 3-9: Simulación en paisaje heterogéneo

3.2.5. Experimento 5: Simulación con paisaje homogéneo y constricción

Mapa de susceptibilidad:

El modelo asume un paisaje heterogéneo con 2 niveles de susceptibilidad:

- **Susceptibilidad alta:** En un 77.8 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad media:** En un 0 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad baja:** En un 0 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad nula:** En un 22.22 % distribuidos aleatoriamente.

Dinámica de la propagación:

Sin haber un intento de control, el brote se esparce en cada tiempo y al llegar a la región de constricción se frena un poco la propagación.

Parámetros

- **Región rectangular:** 15×15
- **Brote inicial:** En celda (8,3)
- **Parámetros:** $t_{max} = 14$, $d = 1$, $e = 5000$, $b = 500$ $r = 0,05$

Resultados

- **Política de control:** Abandono
- **Daño total del paisaje:** 82.85 %
- **Costos por daños:** 732.114983
- **Costos por control:** 0

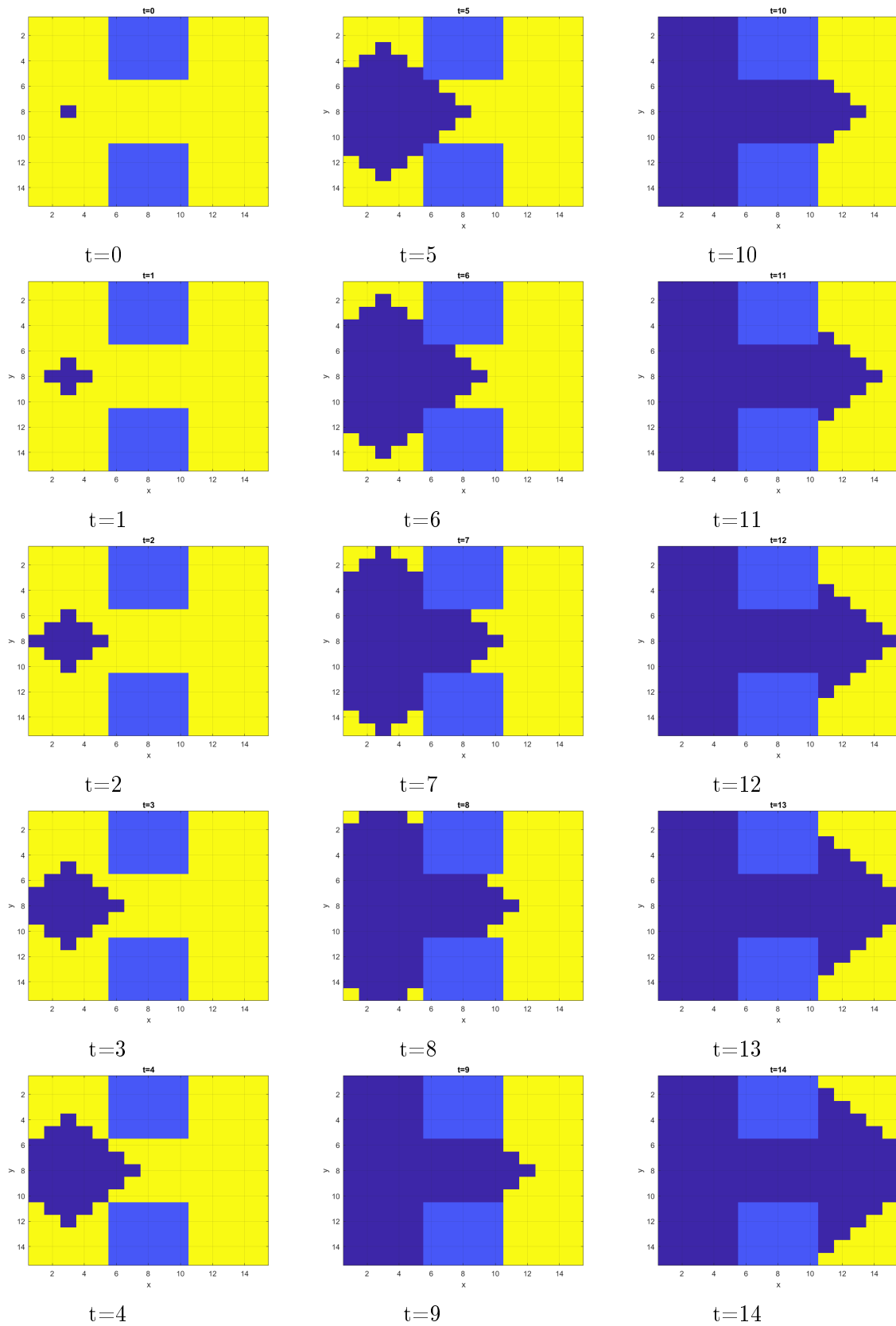


Figura 3-10: Simulación en paisaje homogéneo y constricción

3.2.6. Experimento 6: Simulación con paisaje heterogéneo y constricción

Mapa de susceptibilidad:

El modelo asume un paisaje heterogéneo con 4 niveles de susceptibilidad:

- **Susceptibilidad alta:** En un 25.9 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad media:** En un 25.29 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad baja:** En un 25.29 % distribuidos aleatoriamente.
- **Susceptibilidad nula:** En un 22.22 % situados como dos bloques centrales.

Dinámica de la propagación:

Sin haber un intento de control, el brote se esparce en diferentes tasas de propagación y al llegar a la región de constricción se frena un poco la propagación.

Parámetros

- **Región rectangular:** 15×15
- **Brote inicial:** En celda $(8, 3)$
- **Parámetros:** $t_{max} = 14$, $d = 1$, $e = 5000$, $b = 500$ $r = 0,05$

Resultados

- **Política de control:** Abandono
- **Daño total del paisaje:** 56.57 %
- **Costos por daños:** 397.282928
- **Costos por control:** 0

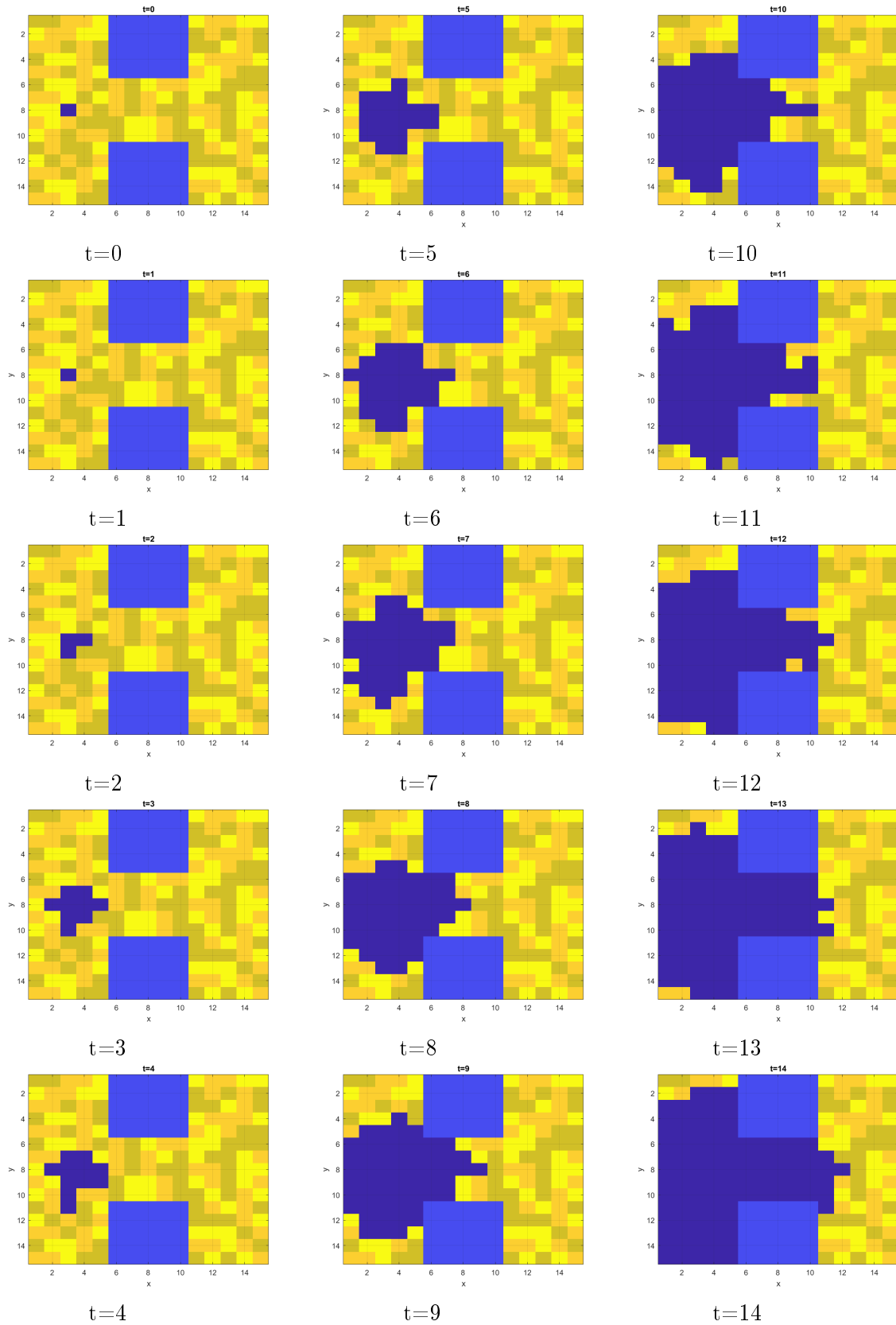


Figura 3-11: Simulación en paisaje heterogéneo y constricción

3.2.7. Resumen de resultados

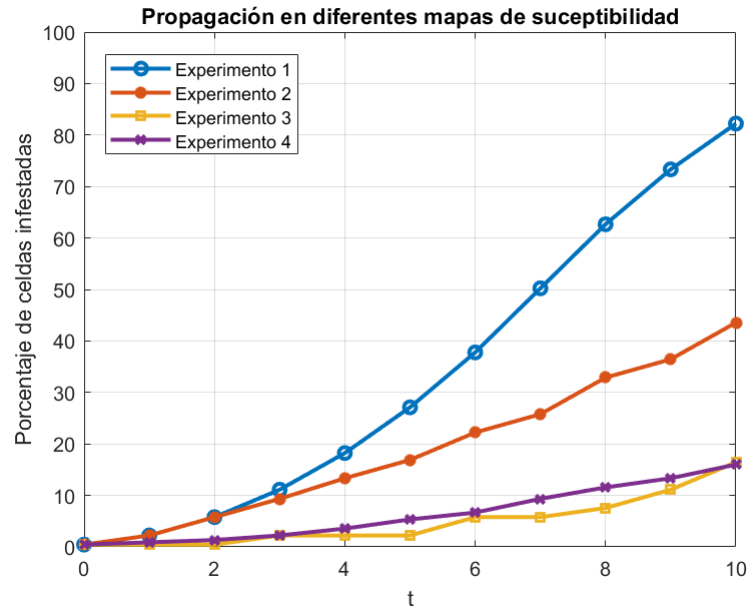


Figura 3-12: Propagación en diferentes mapas de susceptibilidad

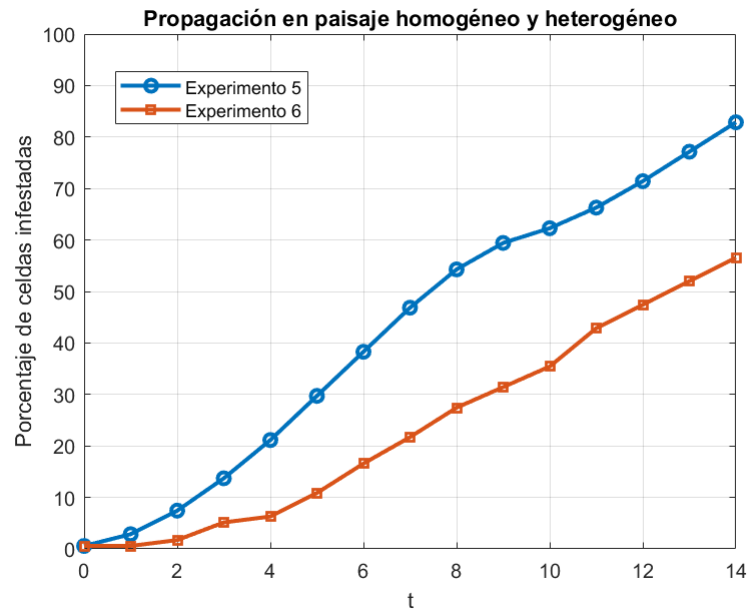


Figura 3-13: Propagación en paisaje homogéneo y heterogéneo

4 Conclusiones

1. La incorporación de la función de susceptibilidad con diferentes niveles en el modelo de Epanchin-Niell y Wilen (2011) representa una mejora cualitativa y cuantitativa con respecto a los resultados reales de los fenómenos en estudio, que se traducen en una mejor predicción de la posible dinámica de la población de las especies invasivas y por lo tanto, también una mejor planificación de recursos a utilizar para el control óptimo de estos fenómenos.
2. Una buena elección promedio de la tasa de propagación asumiendo paisaje homogéneo en el modelo podría hacer una buena predicción en cuanto al porcentaje de área infestada por la especie invasiva, sin embargo, en general puede ser deficiente en predecir la geometría de dicha área infestada. Tomar en cuenta la heterogeneidad del paisaje en el modelo permite tener resultados más cercanos a la realidad del fenómeno en cuanto a la geometría del área infestada.
3. La función de susceptibilidad permite la modelación de fenómenos de especies invasivas con paisajes con geometría irregular, no necesariamente rectangular, definiendo la función de susceptibilidad/ idoneidad, de tal manera que discrimine las celdas que no forman parte de la región de estudio. Para la implementación de un fenómeno concreto se considera una o varias regiones rectangulares que enmarquen la región de estudio, esto implica un mayor uso de memoria y mayor costo computacional en la implementación del modelo, sin embargo, haciéndolo de esta manera la implementación es más

manejable y la solución del problema no se ve alterada.

4. El mapa de susceptibilidad es clave en este modelo ya que él determina dónde habrá propagación y con qué velocidad se realizará. Es importante dedicar esfuerzos a la construcción de mapas de susceptibilidad para el fenómeno en concreto que se quiera estudiar si se pretende aplicar este modelo.

5 Trabajos a futuro

1. Mejorar el modelo incluyendo la captación de características espaciales definidas de forma estocástica.
2. Incorporar al modelo las características de propagación estratificada, es decir, que el modelo pueda tomar en cuenta los escenarios donde además del brote principal surjan pequeños brotes en distancias lejanas.
3. Aplicar el modelo al fenómeno del gorgojo descortezador de pino en Honduras.
4. Aplicar el modelo para realizar diferentes simulaciones para mostrar los posibles escenarios sobre la dinámica y control de potenciales incendios forestales en Honduras. Aunque el modelo se idealizó a fenómenos de especies invasivas, se podría adaptar a incendios forestales

Bibliografía

- [1] CERDÁ TENA, Emilio: Optimización dinámica. En: *Prentecie may* (2001)
- [2] CHALAK, Morteza ; PANNELL, David J. ; POLYAKOV, Maksym: Economics of controlling invasive species: a stochastic optimisation model for a spatial-dynamic process. 2011. – Informe de Investigación
- [3] COLE, Vivienne ; ALBRECHT, Jochen: Exploring geographic parameter space with a GIS implementation of cellular automata. En: *The 11th Annual Colloquium of the Spatial Information Research Centre'. University of Otago, Dunedin, New Zealand* Citeseer, 1999
- [4] EPANCHIN-NIELL, Rebecca S. ; HAIGHT, Robert G. ; BEREC, Ludek ; KEAN, John M. ; LIEBHOLD, Andrew M.: Optimal surveillance and eradication of invasive species in heterogeneous landscapes. En: *Ecology letters* 15 (2012), Nr. 8, p. 803–812
- [5] EPANCHIN-NIELL, Rebecca S. ; WILEN, James: Optimal control of spatial-dynamic processes: the case of biological invasions. En: *Resources for the Future DP* (2011), p. 11–07
- [6] EPANCHIN-NIELL, Rebecca S. ; WILEN, James E.: Optimal spatial control of biological invasions. En: *Journal of Environmental Economics and Management* 63 (2012), Nr. 2, p. 260–270
- [7] GÓMEZ, D. *Descripción y aplicaciones de los autómatas celulares*. 2011

-
- [8] GUSTAFSON, Eric J. ; GARDNER, Robert H.: The effect of landscape heterogeneity on the probability of patch colonization. En: *Ecology* 77 (1996), Nr. 1, p. 94–107
- [9] HOEKSTRA, Alfons G. ; KROC, Jiri ; SLOOT, Peter M.: *Simulating complex systems by cellular automata*. Springer, 2010
- [10] HOMANS, Frances ; HORIE, Tetsuya: Optimal detection strategies for an established invasive pest. En: *Ecological economics* 70 (2011), Nr. 6, p. 1129–1138
- [11] LUSTIG, Audrey ; WORNER, Susan P. ; PITT, Joel P. ; DOSCHER, Crile ; STOUFFER, Daniel B. ; SENAY, Senait D.: A modeling framework for the establishment and spread of invasive species in heterogeneous environments. En: *Ecology and Evolution* 7 (2017), Nr. 20, p. 8338–8348
- [12] MARTINEZ, Genaro J. ; MÉXICO, DF: Introducción a la simulación de procesos con autómatas celulares. (2006)
- [13] MOOIJ, Wolf M. ; DEANGELIS, Donald L.: Error propagation in spatially explicit population models: a reassessment. En: *Conservation Biology* 13 (1999), Nr. 4, p. 930–933
- [14] OLSON, Lars J. ; ROY, Santanu: The economics of controlling a stochastic biological invasion. En: *American journal of agricultural economics* 84 (2002), Nr. 5, p. 1311–1316
- [15] PITT, Joel P.: *Modelling the spread of invasive species across heterogeneous landscapes*, Lincoln University, Tesis de Grado, 2008
- [16] RASMUSSEN, Rune ; HAMILTON, Grant: An approximate Bayesian computation approach for estimating parameters of complex environmental processes in a cellular automata. En: *Environmental Modelling & Software* 29 (2012), Nr. 1, p. 1–10
- [17] ROMERO, Neptalí: Comentarios sobre la definición de autómatas celulares. En: *Boletín de la asociación matemática venezolana* 10 (2003), Nr. 1, p. 59–97

-
- [18] SAPHORES, Jean-Daniel M.: The economic threshold with a stochastic pest population: a real options approach. En: *American Journal of Agricultural Economics* 82 (2000), Nr. 3, p. 541–555
- [19] VALDEZ, Miguel C. ; CHANG, Kang-Tsung ; CHEN, Chi-Farn ; CHIANG, Shou-Hao ; SANTOS, Jorge L.: Modelling the spatial variability of wildfire susceptibility in Honduras using remote sensing and geographical information systems. En: *Geomatics, Natural Hazards and Risk* 8 (2017), Nr. 2, p. 876–892
- [20] VASQUEZ, Miguel Conrado V. ; CHEN, Chi-Farn ; LIN, Yi-Jeng ; KUO, Yao-Cheng ; CHEN, Yan-You ; MEDINA, Daryl ; DIAZ, Karla: Characterizing spatial patterns of pine bark beetle outbreaks during the dry and rainy season's in Honduras with the aid of geographic information systems and remote sensing data. En: *Forest Ecology and Management* 467 (2020), p. 118162
- [21] YOKOMIZO, Hiroyuki ; POSSINGHAM, Hugh P. ; THOMAS, Matthew B. ; BUCKLEY, Yvonne M.: Managing the impact of invasive species: the value of knowing the density–impact curve. En: *Ecological Applications* 19 (2009), Nr. 2, p. 376–386
- [22] YOSHIMOTO, Atsushi ; ASANTE, Patrick ; KONOSHIMA, Masashi ; SUROVÝ, PETER: Integer programming approach to control invasive species spread based on cellular automaton model. En: *Natural Resource Modeling* 30 (2017), Nr. 2