

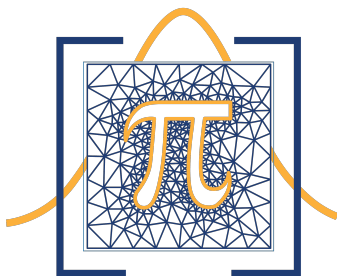
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA



UNAH
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE HONDURAS

Estimación de la Característica de Poincaré-Euler para
Estructuras Porosas generadas mediante el Algoritmo de
Voronoi Laguerre

Tesis presentada para optar al Título de Máster en Matemática con
orientación en Estadística Matemática.



Tesis presentada por: Cristian Fernando Juárez Villalobos

Asesor tesis: Jorge Arturo Destephen.
Co-asesor tesis: Roberto Carlos Duarte
Fecha de defensa: 26 de septiembre de 2025.

TEGUCIGALPA, HONDURAS 2025.

Estimación de la Característica de Poincaré-Euler para Estructuras Porosas generadas mediante el Algoritmo de Voronoi Laguerre

Presentada por: Cristian Fernando Juárez Villalobos

**Tesis presentada para optar al Título de máster en matemática
con orientación en Estadística Matemática**

Asesor: Jorge Arturo Destephen
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Co-Asesor: Roberto Carlos Duarte
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

TERNA EXAMINADORA

Ph.D Fredy Vides
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Ph.D Pedro Madrid
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

M.Sc Iván Henríquez
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

TEGUCIGALPA M.D.C 10 DE OCTUBRE DEL 2025.

Agradecimientos

Tengo el profundo agradecimiento hacia Dios, por darme la fuerza y entereza que se requiere para la finalización de este proyecto personal.

Al apoyo incondicional de mi madre y mis hermanos durante todos estos años y los ánimos que me dieron para seguir adelante.

A mi novia Diana por su dulce amor, calidez, alegría, compañía, comprensión y paciencia durante el proceso de elaboración de esta investigación.

Al Doctor Destephen y al Profesor Duarte por permitirme trabajar con ellos.

Al Profesor Marvin Villafranca y la Licenciada Mirza Valeriano por sus comentarios y consejos.

A mi primo Fernando por contagiarme de optimismo.

A mis amigos de toda la vida, Allan, Jose David, David, e Irene por impulsarme a ser mejor .

Cristian F. Juárez

Índice general

Agradecimientos	II
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VI
Resumen	I
Abstract	I
1. Introducción	1
2. Revisión Bibliográfica	3
2.1. Característica de Poincaré-Euler	3
2.2. Determinación de Eventos Topológicos	5
2.3. Estimación de la Característica de Poincaré-Euler mediante un Disector	7
2.4. Modelación de Materiales Filtrantes	10
3. Estimación de la Característica de Poincaré-Euler	12
3.1. Estructura Porosa	14
3.2. Conectividad de Estructuras Porosas	15
3.2.1. Conexión Poro-Poro	15
3.2.2. Conexión Poro-Capa	20
3.2.3. Conexión Capa-Capa ($P - P$)	23
3.2.4. Sectorización de Capa Porosa	24
3.2.5. Característica de Poincaré-Euler de Bicapas.	29
3.2.6. Característica de Poincaré-Euler de Estructuras Porosas	32
3.2.7. Matriz de Caminos M_{EP}	32
3.3. Filtración de Partículas	33
4. Análisis de Resultados	39
4.1. Conectividad de Bicapas con Umbrales Radiales	40
4.1.1. Gráficos de Dispersión para $\chi(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ en función del ángulo de rotación θ	40
4.1.2. Densidades de Conexión para $\hat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$	42
4.1.3. Conectividad y conexiones	48
4.2. Conectividad de Bicapas	52
4.2.1. Gráficos de dispersión en función del ángulo de rotación.	52
4.2.2. Distribución del número de poros según el valor de $\hat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta)$	53
4.3. Estructuras Porosas	54
4.4. Incidencia de la Conectividad en la Filtración de Partículas	55
4.4.1. Filtración en Bicapas	56
4.4.1.1. Distribución de Partículas $U(1, 5)$	56
4.4.1.2. Distribución de Partículas $U(3, 7)$	59
4.4.1.3. Distribución de Partículas $U(8, 13)$	62
4.4.1.4. Distribución de Partículas $U(13, 18)$	63
4.4.1.5. Distribución de Partículas $U(18, 25)$	64

5. Conclusiones y Trabajos a Futuro	66
5.1. Conclusiones	66
5.2. Trabajos a Futuro	67

Índice de figuras

2.1. Proyección de secciones contiguas generadas por un disector [19].	5
2.2. Deformación de una superficie cerrada mediante retracción. [5]	6
2.3. Información de objetos y bucles identificados mediante un disector. [17] . .	8
2.4. Capas de Radio $R_c = 450mm$	11
2.5. Intersecciones de capas de poros.	11
3.1. Evaluación de la función de conexión $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$	16
3.2. Cálculo de $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ para diferentes valores de θ	16
3.3. Cálculo de la función $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$	19
3.4. $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ evaluada en el intervalo $[0, 2\pi]$	20
3.5. Cálculo de la función $\hat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta)$	22
3.6. Cálculo de la función $\hat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$	22
3.7. Sectores de una capa de radio R_c	24
3.8. Matriz de conexión $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ para diferentes valores de θ . . .	30
3.9. Bicapa de dos poros.	31
3.10. Bicapa de tres poros.	31
3.11. Cálculo de la función $\omega(q_\alpha, P_k)$	37
4.1. Gráficos de dispersión para $R_c = 250\mu m$	40
4.2. Gráficos de dispersión para $R_c = 320\mu m$	41
4.3. Distribución del número de poros para $R_c = 250\mu m$	42
4.4. Distribución del número de poros para $R_c = 250\mu m$ con $I =]0\mu m, 10\mu m]$ e $I =]0\mu m, 12\mu m]$	43
4.5. Distribución del número de poros para $R_c = 320\mu m$ con $I =]0\mu m, 6\mu m]$ e $I =]0\mu m, 8\mu m]$	44
4.6. Distribución del número de poros para $R_c = 320\mu m$ con $I =]0\mu m, 10\mu m]$ e $I =]0\mu m, 12\mu m]$	45
4.7. Distribución del número de poros para capas de radio $R = 400\mu m$ con $I =]0\mu m, 6\mu m]$, $I =]0\mu m, 8\mu m]$	46
4.8. Distribución del número de poros para capas de radio $R = 450\mu m$ con $I =]0\mu m, 10\mu m]$, $I =]0\mu m, 12\mu m]$	47
4.9. Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 250\mu m$	48
4.10. Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 320\mu m$	49
4.11. Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 400\mu m$	50
4.12. Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 450\mu m$	51
4.13. Gráficos de dispersión para diferentes valores de R_c y ángulos de rotación θ . .	52
4.14. Distribución del número de conexiones de un poro para diferentes valores de R_c y ángulos de rotación θ	53
4.15. Densidades para una muestra de 150 Estructuras Porosas de diferente radio R_c	54
4.16. Eficiencia de estructuras porosas para bicapas de diferente R_c	61
4.17. Eficiencia vrs Conectividad para partículas con radio $U(8, 13)$	63
4.18. Eficiencia vrs Conectividad para partículas con radio $U(13, 18)$	64
4.19. Eficiencia vrs Conectividad para partículas con radio $U(18, 25)$	65

Índice de tablas

4.1. Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 250\mu m$	48
4.2. Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 320\mu m$	49
4.3. Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 400\mu m$	50
4.4. Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 450\mu m$	51
4.5. Valores de Conectividad de las Estructuras Porosas con diferente radio R_c .	55
4.6. Parámetros de partículas, velocidad de fluido e incremento de tiempo . . .	56
4.7. Número de partículas para distintos valores de R_c	56
4.8. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 250\mu m$	57
4.9. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 320\mu m$	57
4.10. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 400\mu m$	58
4.11. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 450\mu m$	58
4.12. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 250\mu m$ con $U(3, 7)$	59
4.13. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 320\mu m$ con $U(3, 7)$	59
4.14. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 400\mu m$ con $U(3, 7)$	60
4.15. Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 450\mu m$ con $U(3, 7)$	60
4.16. Intervalos de confianza al 95 % para Eficiencia y Conectividad χ , para $R_c = 250\mu m$ y $U(8, 13)$	62
4.17. Intervalos de confianza al 95 % para Eficiencia y Conectividad χ , para $R_c = 250\mu m$ y $U(13, 18)$	63
4.18. Intervalos de confianza al 95 % para Eficiencia y Conectividad χ , para $R_c = 250\mu m$ y $U(18, 25)$	64

Resumen

Resumen: La caracterización topológica de medios filtrantes es esencial para comprender su comportamiento en procesos de captura de partículas. Este trabajo de investigación presenta una metodología para estimar la Característica de Poincaré-Euler como medida de conectividad en estructuras porosas formadas mediante la superposición de capas que fueron generadas a través del algoritmo de Voronoi-Laguerre. Cada medio filtrante se modela como una superposición de capas circulares compuestas por poros representados por circunferencias, a las cuales se les aplican rotaciones angulares para representar distintas configuraciones de conexión entre las mismas. Se definen funciones geométricas que determinan la conexión entre poros de capas consecutivas, y se implementa una sectorización de las capas porosas para optimizar el conteo de las conexiones, reduciendo significativamente el costo computacional. La conectividad se describe mediante la estimación de la característica de Poincaré-Euler.

Palabras Clave: Estructuras Porosas, Característica de Poincaré-Euler, Conectividad, Topología, Voronoi-Laguerre.

Abstract

Abstract:

The topological characterization of filter media is essential for understanding their behavior in particle capture processes. This research paper presents a methodology for estimating the Poincaré-Euler characteristic as a measure of connectivity in porous structures formed by superimposing layers generated using the Voronoi-Laguerre algorithm. Each filter media is modeled as a superposition of circular layers composed of pores represented by circles, to which angular rotations are applied to represent different connection settings between them. Geometric functions that determine the connection between pores in consecutive layers are defined, and a sectorization of the porous layers is implemented to optimize connection counting, significantly reducing the computational cost. Connectivity is described by estimating the Poincaré-Euler characteristic.

Key words: Porous media, Euler characteristic, Connectivity, Topology, Voronoi-Laguerre.

Capítulo 1

Introducción

El interés por describir los elementos esenciales de un objeto tridimensional, surge en diferentes campos del conocimiento, como ser en la industria minera para la identificación y descripción de propiedades hidráulicas de los suelos, en la industria petrolera para la extracción de crudo, en el sector médico con el fin de identificar y cuantificar la densidad ósea de huesos afectados por enfermedades crónicas y en la industria automotriz para el diseño de filtros de mayor eficiencia, durabilidad y menor costo de producción. Las investigaciones recientes han demostrado que la topología del espacio contenido en estructuras porosas influye en el transporte y flujo de partículas a través de éstas.

En el presente trabajo de investigación se tiene como propósito describir la conectividad del espacio poroso de los filtros generados mediante el algoritmo de Voronoi-Laguerre descrito en Duarte-2022 [7].

Los objetivos perseguidos en este trabajo de investigación se exponen a continuación:

- **Objetivo General:** estimar la Característica de Poincaré-Euler de estructuras porosas simuladas mediante el algoritmo de Voronoi-Laguerre.
- **Objetivos Específicos:**
 - Describir la Característica de Poincaré-Euler.
 - Desarrollar expresiones que permitan calcular la Característica de Poincaré-Euler para estructuras porosas conformadas por capas porosas de diferentes radio R_c y distribución de tamaños de poros.
 - Implementar un método de cálculo que reduzca el costo computacional del cálculo de la Característica de Poincaré-Euler.

- Identificar los factores característicos de los medios filtrantes simulados que afectan el valor de la Característica de Poincaré-Euler, el número de conexiones entre capas y el número de poros habilitados para formar conexiones con otras capas adyacentes.
- Simular el proceso de filtración de partículas, y observar la relación entre los valores estimados para la Característica de Poincaré-Euler y la capacidad de captura de partículas de las estructuras porosas.

Dentro del alcance de este trabajo se enmarca exclusivamente en estructuras porosas compuestas por dos o más capas, cada una generada de manera independiente bajo condiciones homogéneas. No se consideran efectos dinámicos del flujo ni interacción físico-química entre capas. El análisis se limita al estudio de conectividad estructural mediante herramientas topológicas y no incluye validación experimental.

El **Capítulo 2** señala los principios teóricos que permitieron aplicar el concepto de conectividad a las capas porosas simuladas, y a su vez de las estructuras porosas que conforman, se revisan los principales conceptos topológicos, como ser el de retracción por deformación, y la estimación de la Característica de Poincaré-Euler aplicando la técnica del área de análisis de imágenes digitales conocida como disector.

La investigación prosige en el **Capítulo 3** desarrollando la formulación necesaria que permite obtener los valores de χ para las estructuras porosas. Se expone el método de sectorización de capas que permite identificar las conexiones entre poros partiendo del principio de verificar la conexión con los poros más cercanos. El Capítulo cierra con el modelo propuesto para la simulación de procesos de filtrado.

El **Capítulo 4** engloba los resultados obtenidos, del cálculo de χ considerando los factores descritos en el **Capítulo 3**, como ser el número de conexiones, la posibilidad de que un poro esté habilitado para formar una conexión con un poro de otra capa, y el análisis de la capacidad de retener o capturar partículas de una estructura porosa formada por dos capas, a diferentes configuraciones de conexión.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

Los conceptos incorporados en este Capítulo constituyen las bases del análisis de la Característica de Poincaré-Euler χ de estructuras porosas o medios filtrantes. Se desarrollan las ideas principales relacionadas con las propiedades esenciales de un objeto o espacio poroso tridimensional. Se describe la técnica de procesamiento de imágenes conocida como disector, aunque no es de uso reciente, resulta provechoso los lineamientos del mismo para la estimación de χ de los materiales filtrantes simulados en este trabajo. Se detalla la deducción de las expresiones relacionadas con el cálculo de χ a partir de la definición de eventos topológicos. Las cuales parten del concepto de *deformación por retracción*, y que son utilizadas para la construcción de las funciones del Capítulo 3 para el cálculo del número de conexiones entre capas.

2.1. Característica de Poincaré-Euler

La topología de un espacio poroso es una propiedad crucial relacionada con el flujo y transporte de materiales en medios porosos [19]. Las propiedades topológicas básicas son el

número de objetos N , es decir los poros, el número de conexiones redundantes C que hay entre estos últimos; y el número de cavidades aisladas H identificadas en el material poroso. La característica de Poincaré-Euler χ combina estas propiedades topológicas básicas y las cuantifica en la siguiente expresión [19]:

$$\chi = N - C + H \quad (2.1)$$

De lo antes expuesto, se tiene que χ es una medida de la **conectividad** del espacio poroso, el cual da valores positivos cuando el número de conexiones resulta menor al número de poros, es decir $N > C$, y valores negativos para estructuras porosas con mayor número de conexiones en relación al número de poros, equivalente a $N < C$ [19]. Las cantidades N , C y H no se determinan explícitamente, sin embargo, la característica de Poincaré-Euler puede deducirse de la geometría de la estructura tridimensional del espacio poroso [4, 15], lo que permite establecer a la característica de Poincaré-Euler como un número que describe de forma general la topología de dicho espacio [18].

Mediante un **disector** se puede obtener el valor de χ . El disector se define como un conjunto de superficies planas y paralelas, que contienen la proyección de secciones o capas de un determinado grosor $\Delta h > 0$, y que están colocadas una junto a la otra. Dichas superficies planas de proyección son transversales al espacio poroso [4]. El conjunto de estas superficies planas y transversales resulta suficiente para estimar χ [17]. Las superficies planas que componen un disector se ilustra en la **Figura 2.1**.

Cada sección transversal contiene información de la distribución del espacio poroso, al observar la proyección de los poros y conexiones en cada una de ellas, lo cual posibilita la reconstrucción del espacio poroso mediante las secciones que conforman el disector.

Aunque se tienen aplicaciones limitadas del disector [5], en este trabajo de investigación resulta útil para determinar la conectividad de las capas que componen los materiales filtrantes que se pretenden simular y observar su incidencia en la capacidad de captación de partículas de dichos materiales. En la siguiente sección se describe el método para obtener la información referente a las propiedades topológicas de un espacio poroso.

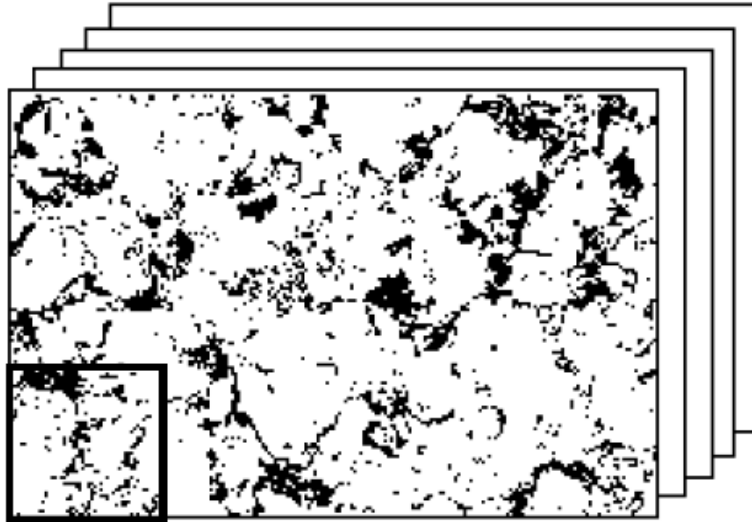


Figura 2.1: Proyección de secciones contiguas generadas por un disector [19].

2.2. Determinación de Eventos Topológicos

El concepto de **conectividad** puede visualizarse directamente mediante una red de puntos y líneas en el espacio [5]. Considerese un conjunto de n puntos o nodos distribuidos en un determinado volumen. Los puntos en cuestión están unidos mediante lazos o ramas para formar una red continua. Supóngase que las uniones entre los poros está realizada de tal forma, que la remoción de alguna de las ramas genera la separación de la red en dos partes desconectadas. Esta red se denomina un *árbol* y se dice que está *simplemente conectado*, por lo cual su conectividad se define en *ceró*. Una de las principales características de esta red, es que solo existe un único camino de un nodo a otro [5].

Si se adhiere una ramificación al árbol, se dice que está *multiplemente conectado*. La rama extra contribuye a una redundancia, lo que implica que haya más de un camino de un nodo a otro. Conforme se adhieren más conexiones extras la conectividad de la red incrementa, así como los caminos independientes entre nodos [5].

El concepto de conectividad se desarrolla utilizando redes y nodos debido a que las estructuras tridimensionales pueden ser representadas mediante estos esquemas de ramas y nodos, lo cual permite establecer los siguientes conceptos:

- *El primer número de Betti β_1* : se define como el número de ramas en exceso b con respecto al número de ramificaciones que se requieren para obtener un *árbol* entre

los nodos del sistema. El primer número de Betti cumple [1]:

$$\beta_1 = b - (n - 1)$$

- Desde una perspectiva general una red puede considerarse como un conjunto de subredes desconectadas. El número de subredes desconectadas se denomina el *número cero de Betti* y se denota por β_0 y se puede expresar de la siguiente forma [1]:

$$\beta_1 - \beta_0 = b - n$$

Para examinar la topología de superficies complejas y múltiplemente conectadas se introduce el concepto de **deformación por retracción**. La deformación por retracción de una superficie cerrada se obtiene contrayendo el espacio encerrado por la superficie hasta que se reduzca en el límite a una red de nodos y ramificaciones, tal como se observa en la **Figura 2.2**.

La deformación por retracción tiene la propiedad de presentar la misma conectividad y el mismo número de partes desconectadas o aisladas de la superficie de la que se deriva [1].

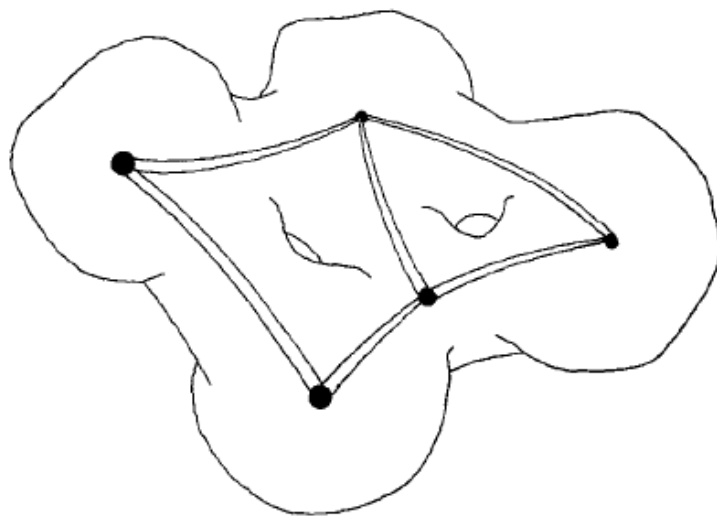


Figura 2.2: Deformación de una superficie cerrada mediante retracción. [5]

2.3. Estimación de la Característica de Poincaré-Euler mediante un Disector

La Característica de Poincaré-Euler permite describir la geometría de un objeto en diferentes dimensiones [16]. La conectividad topológica está determinada como se había mencionado en la sección previa, por las siguientes características:

- El *número de partes desconectadas* por unidad de volumen, N_v , llamado también el *número cero de Betti* β_0 .
- El número de conexiones redundantes por unidad de volumen C_v , llamado también el *Género* o *Primer número de Betti* β_1 .

Además, N_v y C_v no pueden obtenerse de una sola sección, se requiere un análisis estadístico para estimarlos [5]. Considerando una muestra mínima de dos secciones paralelas para determinar χ , se definen los siguientes eventos topológicos [17]:

- I_s : número de las *islas* que aparecen o desaparecen.
- B : número de nuevas ramificaciones.
- H : número de las cavidades que aparecen o desaparecen.

Dichos eventos se definen debido a que N_v y C_v no pueden obtenerse directamente del disector [17]. Conforme a las reglas presentadas en [8], la característica de Poincaré-Euler viene dada por:

$$\chi = \frac{1}{2}(I_s + H - B) \quad (2.2)$$

De igual manera, se tienen los siguientes términos:

- *Objeto*: partes desconectadas del espacio poroso.
- *Bucle*: una cavidad con un objeto en su interior.

La **Figura 2.3** muestra que la sección 1 contiene tres objetos, de los cuales uno de ellos es un bucle, por otra parte, en la sección 2 hay cuatro objetos, siendo uno de ellos un bucle. La intersección de ambas secciones contiene siete objetos en total. Cabe señalar que esta última se obtiene al aplicar el disector.

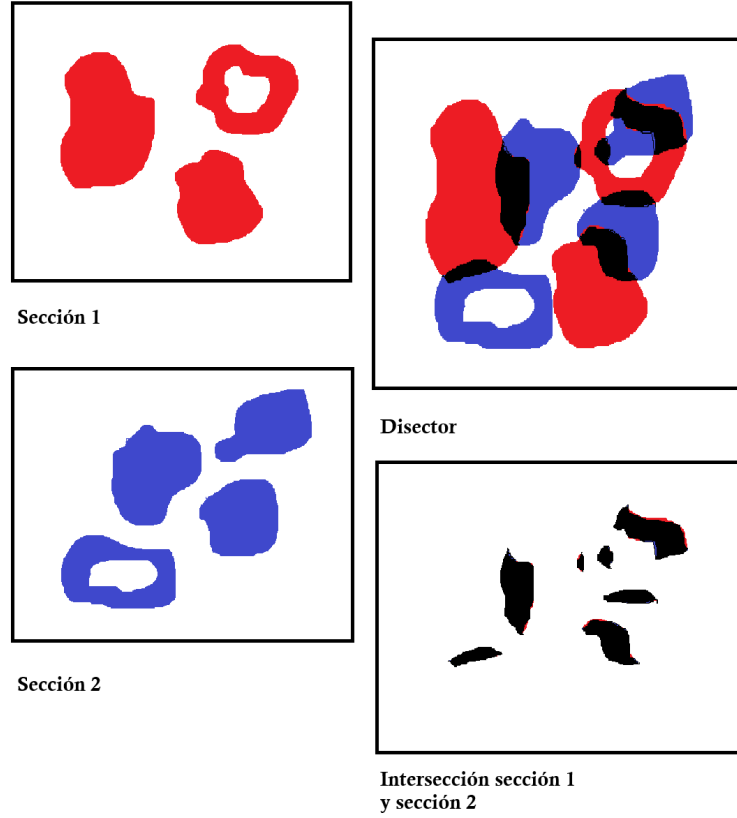


Figura 2.3: Información de objetos y bucles identificados mediante un disector. [17]

Si se definen N_i y L_i , como el número de objetos y de bucles en la sección i respectivamente, con $i \in \{1, 2, 1 \cap 2\}$. Los eventos topológicos I_s, B y H pueden ser definidos en términos de estos parámetros.

Para estimar I_s , se define $\hat{N}_i$ como el número de objetos de la sección i que no tienen intersección con ningún objeto de otra sección. Por lo que I_s se determina como sigue [17]:

$$I_s = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 \quad (2.3)$$

El evento topológico B puede descomponerse en dos tipos diferentes [17]:

- $B_{1 \rightarrow 2}$: un objeto de la sección 1 se ramifica en dos o más objetos en la sección 2.
- $B_{2 \rightarrow 1}$: un objeto de la sección 2 se ramifica en dos o más objetos en la sección 1.

- B_i : ramificación en la sección i .

Los conceptos antes definidos pueden expresarse como sigue [17]:

$$B_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \cap 2} - (N_1 - \hat{N}_1) \quad (2.4)$$

$$B_{2 \rightarrow 1} = N_{1 \cap 2} - (N_2 - \hat{N}_2) \quad (2.5)$$

$$B_1 = \hat{L}_1 \quad (2.6)$$

$$B_2 = \hat{L}_2 \quad (2.7)$$

Tal como se definió $\hat{N}_i$, el parámetro $\hat{L}_i$ representa las bucles de la sección i que no tienen conexión con algún objeto de otra sección del disector.

Para el caso de las cavidades H , se descompone en H_1 , el cual se define como los objetos de la sección 1 que se intersectan o corresponden con un bucle de la sección $1 \cap 2$, y H_2 definido similarmente [17]:

$$H_1 = L_{1 \cap 2} - (L_1 - \hat{L}_1) \quad (2.8)$$

$$H_2 = L_{1 \cap 2} - (L_2 - \hat{L}_2) \quad (2.9)$$

Si se sustituyen las ecuaciones desde 2.3-2.9 en 2.2, χ toma la siguiente expresión:

$$\chi = \frac{1}{2} \left(I_s + (H_1 + H_2) - (B_1 + B_2 + B_{1 \rightarrow 2} + B_{2 \rightarrow 1}) \right)$$

Que al sustituir los eventos topológicos en términos de *objetos* y *bucles* se obtiene:

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + (L_{1 \cap 2} - L_1 + \hat{L}_1 + L_{1 \cap 2} - L_2 + \hat{L}_2) - (N_{1 \cap 2} - N_1 + \hat{N}_1 + N_{1 \cap 2} - N_2 + \hat{N}_2 + \hat{L}_1 + \hat{L}_2) \right)$$

Lo que finalmente resulta en:

$$\chi = \frac{1}{2} \left(N_1 + N_2 - 2N_{1 \cap 2} + 2L_{1 \cap 2} - L_1 - L_2 \right) \quad (2.10)$$

Definiendo el calculo de χ para dos secciones consecutivas, es posible definir la característica de Poincaré-Euler para un espacio poroso utilizando un disector de N secciones paralelas [16]:

$$\chi_v = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N-1} \chi_{k,k+1} \quad (2.11)$$

Donde V es el volumen de la muestra que se utilizó para describir el espacio poroso. Se dice que χ_v es un promedio volumétrico de la característica de Poincaré-Euler de los pares de secciones consecutivas contenidas en el disector [17].

2.4. Modelación de Materiales Filtrantes

Un material filtrante puede ser identificado como un sólido con huecos, o **medio poroso**. Se establece la siguiente definición [2]:

Definición 2.1. Medio poroso: *una porción del espacio ocupada por materia heterogénea o multifase. Al menos una de las fases no es sólida y puede ser gaseosa o líquida. La fase sólida es llamada matriz sólida y el espacio que se encuentra en el dominio del medio poroso que no es parte de la matriz sólida se le denomina espacio vacío, o también espacio poroso.*

La fase sólida está distribuida en el medio poroso y está presente en cada muestra que se tome del mismo. Otra característica que suele estar presente, es que las aberturas o poros que comprenden el medio poroso son relativamente estrechos y poseen la capacidad de estar interconectados entre sí o formar conexiones [2].

La relación entre el espacio poroso y el volumen de la muestra tomada de un medio poroso, se le conoce como **porosidad** y se define como:

Definición 2.2. Porosidad:

$$\epsilon = \frac{\text{Volumen Espacio Poroso}}{\text{Volumen de Muestra del Medio Poroso}}$$

Uno de los principales objetivos de este trabajo, es analizar la conectividad de medios porosos simulados. Tomando como base el trabajo desarrollado en [7], el cual considera características de los materiales filtrantes reales, la porosidad ϵ , el diámetro promedio de fibras D_f y la distribución de tamaño de los poros del material filtrante [7].

Se toma como punto de partida la representación de un medio filtrante mediante capas [6], que a su vez, cada una de ellas están conformadas por un conjunto de cilindros huecos que representan los poros del material, y cuyo radio se obtiene de una distribución

de tamaños de poros que corresponde al material específico real. Los medios filtrantes se simulan aplicando los diagramas de Voronoi-Laguerre y el algoritmo de empaquetamiento de círculos [7]. Las capas generadas mediante estos algoritmos pueden observarse en la **Figura 2.4**, donde se muestran dos capas conformadas por círculos a lo más tangentes entre sí, para los cuales el tamaño del radio está determinado por una distribución específica. De la superposición de capas así generadas se modelan los materiales filtrantes.

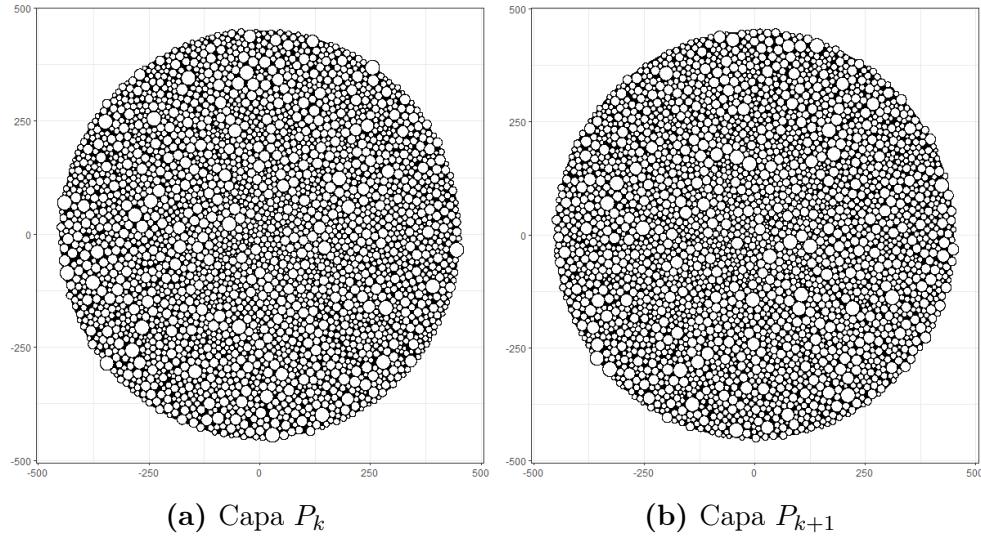


Figura 2.4: Capas de Radio $R_c = 450mm$.

La aplicación del disector a las capas de la **Figura 2.4** genera las intersecciones correspondientes, algunas de las cuales pueden observarse en la figura siguiente:

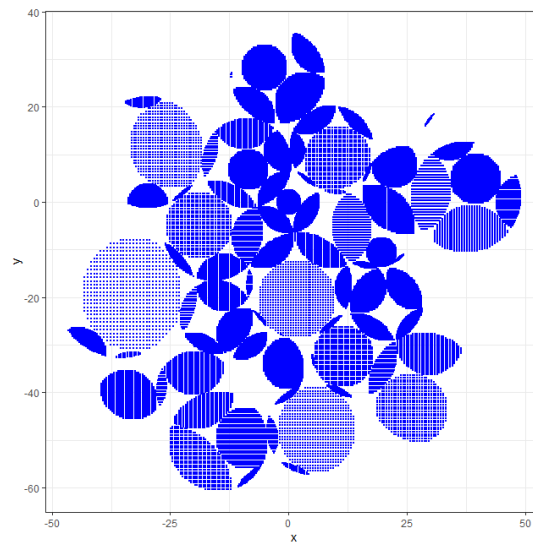


Figura 2.5: Intersecciones de capas de poros.

Capítulo 3

Estimación de la Característica de Poincaré-Euler

En el presente Capítulo se desarrollan las herramientas que se requieren para estimar la Característica de Poincaré-Euler de filtros o estructuras porosas generadas mediante el Algoritmo de Voronoi-Laguerre. Dichas herramientas se desarrollaron tomando como punto de partida los conceptos presentados en el Capítulo 2, principalmente la aplicación de la técnica del *disector* y las expresiones desarrolladas para el cálculo de χ de dos, y en general de N_c secciones consecutivas, en este caso las capas porosas que previamente ya se han mencionado.

Se comienza con el análisis geométrico relacionado a la intersección de dos poros pertenecientes a capas porosas P_k y P_{k+1} , considerando la rotación de una de ellas, bajo un marco de referencia en común, para luego extender dicho análisis al efecto que tienen las obstrucciones de los poros en el cálculo de χ .

Se desarrolló el teorema 3.1 que establece la relación de las funciones construidas a partir de los factores que influyen en la conexión de los poros. Estas funciones se utilizaron para obtener las expresiones correspondientes al cálculo del número de conexiones que se generan entre un poro y una capa, y de las capas entre sí. Debido a la complejidad geométrica de las capas porosas simuladas, se propone un método para reducir el costo computacional del cálculo del número de conexiones entre capas y en consecuencia de la Característica de Poincaré-Euler. De dicho método se obtienen las matrices de conexión

entre capas, que permiten indicar cada una de las conexiones que tiene un poro de una determinada capa con la capa siguiente. El conjunto de las matrices de conexión describen los *camino*s en el seno del medio filtrante o estructura porosa. Las entradas de la *matriz de caminos*, cuantifican el número de caminos posibles de los poros de la primera capa hasta la n -ésima capa de la estructura porosa, y se obtiene como el producto de las matrices de conexión calculadas. En este Capítulo se incluye un modelo de simulación para el desplazamiento de partículas a través del *espacio poroso* del medio filtrante. El modelo condiciona la trayectoria de las partículas mediante las conexiones de los poros entre capas consecutivas y de igual manera, considera si estos están obstruidos. La obstrucción de los poros se representa a través de los *umbrales radiales*.

3.1. Estructura Porosa

En el Capítulo 2 se expuso la posibilidad de construir estructuras porosas o medios filtrantes mediante la superposición de capas porosas, una colocada sobre la otra, y cada una generada mediante el algoritmo de Voronoi-Laguerre. Dicho algoritmo permite descomponer el plano en regiones utilizando círculos, que son a lo más tangentes entre sí [7].

En la modelación de los medios filtrantes cada poro se representa mediante un círculo en el plano cartesiano con centro en el punto (x, y) y de radio r . Esta representación resulta útil al momento de realizar el cálculo de χ , para el cual se requiere conocer la intersección de las regiones vacías o porosas de las capas que componen el medio filtrante.

En línea con la idea anterior, una capa porosa se describe como una región circular de radio R_c centrada en el origen y un conjunto de N poros. Cada poro tiene su centro en el interior de la región circular, además, el tamaño de los poros esta condicionado a una distribución [7]. Dentro de la misma región de la capa porosa considerada, los círculos que representan los poros no exhiben superposición entre sí. El número y la disposición de los poros dentro de la región en cuestión determinan la porosidad de la capa, que puede ser considerado también como una medida del espacio vacío en el seno de la capa porosa, tal como se mencionó en el Capítulo anterior.

Finalmente, una estructura porosa viene dada por una colección de N_c capas porosas del mismo radio R_c . Las capas están colocadas una inmediatamente encima de la otra, como fue señalado en el Capítulo 1.

3.2. Conectividad de Estructuras Porosas

En las siguientes secciones se procede a definir los conceptos relacionados con el cálculo de la característica de Poincaré Euler para el espacio poroso.

3.2.1. Conexión Poro-Poro

La superposición de capas consecutivas P_k y P_{k+1} de radio R_c , genera la intersección entre los elementos o poros que las conforman. Para verificar la intersección de un poro $p_{i,k}$ de la capa P_k y el poro $p_{j,k+1}$ de la capa P_{k+1} , es suficiente verificar si la siguiente desigualdad es cierta:

$$d(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) < r_{i,k} + r_{j,k+1}$$

Donde $d(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ es la distancia en el plano xy entre el centro del poro $p_{i,k}$ y el centro del poro $p_{j,k+1}$. Por consiguiente, se requiere una función $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ que refleje la relación existente entre $d(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ y la suma de los radios $r_{i,k} + r_{j,k+1}$, es decir, que evalúe la **conexión geométrica** de los poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ mediante la desigualdad triangular, lo cual, está condicionado por el ángulo de rotación θ de la capa P_{k+1} con respecto a la capa P_k . En base a lo previamente expuesto, a continuación se establece la definición de la función de conexión de poro a poro ($p - p$):

Definición 3.1. *Función de conexión p-p.*

Sean $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ poros de las capas P_k y P_{k+1} respectivamente. La función de conexión $f : P_k \times P_{k+1} \times [0, 2\pi] \rightarrow \{0, 1\}$ se define como:

$$f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{si } d(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) < r_{i,k} + r_{j,k+1}, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la **Figura 3.1** se ilustra la evaluación de $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ para diferentes configuraciones de conexión de poros.

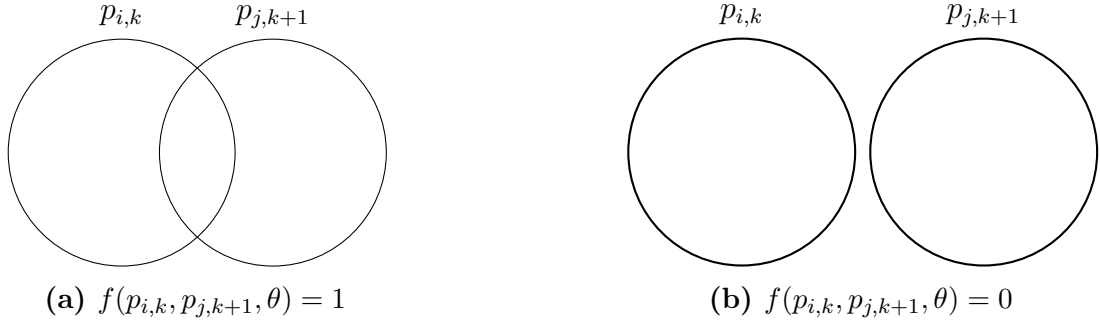


Figura 3.1: Evaluación de la función de conexión $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$.

La distancia en el plano xy de los centros de los poros, $d(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ se obtiene a partir de las siguientes expresiones:

$$d(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) = \sqrt{\Delta_{x,\theta}(p_{i,k}, p_{j,k+1})^2 + \Delta_{y,\theta}(p_{i,k}, p_{j,k+1})^2} \quad (3.1a)$$

$$\Delta_{x,\theta}(p_{i,k}, p_{j,k+1}) = x_{i,k} - x_{j,k+1} \cos(\theta) + y_{j,k+1} \sin(\theta) \quad (3.1b)$$

$$\Delta_{y,\theta}(p_{i,k}, p_{j,k+1}) = y_{i,k} - x_{j,k+1} \sin(\theta) - y_{j,k+1} \cos(\theta) \quad (3.1c)$$

Las ecuaciones 3.1a-3.1c incluyen la rotación del poro $p_{j,k+1}$ en el cálculo de $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$. Mediante inspección, se tiene que para determinados valores de θ , la intersección de los poros no es vacía. Esta observación se ilustra en la **Figura 3.2**, para un ángulo de rotación θ_1 el valor de $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta_1) = 1$, en cambio, para θ_2 la función de conectividad poro-poro toma el valor de $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta_2) = 0$.

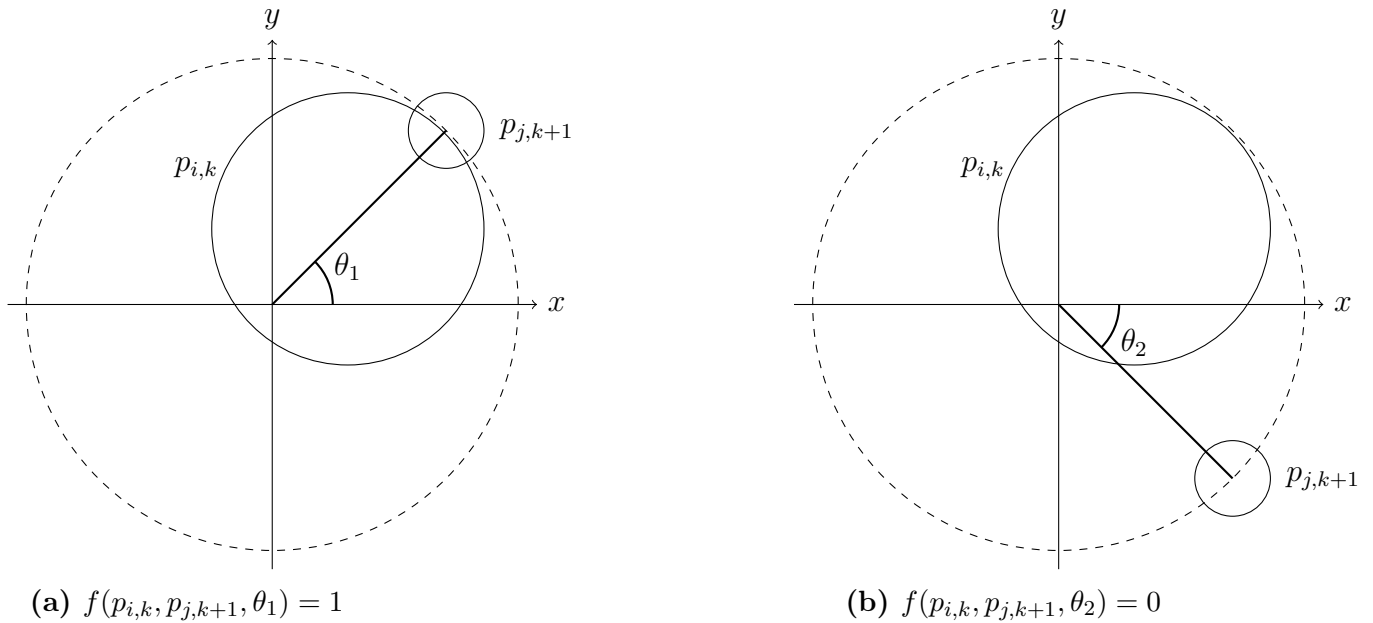


Figura 3.2: Cálculo de $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ para diferentes valores de θ .

Si se establece un umbral $\mu_+ > 0$, para el cual los poros con radio mayor a dicho valor, es decir $r_{i,k} > \mu_+$, se consideren como parte del sólido de la estructura porosa o estén obstruidos, es posible definir funciones que relacionen el tamaño del radio de los poros con dicho umbral μ_+ y que sea incorporado en el cálculo de la conexión de los poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$, tal como se prosigue a continuación:

Definición 3.2. *Función de umbral radial pasa-baja.*

Sea $p_{i,k}$ un poro de la capa P_k , sea $\mu_+ > 0$, la función de umbral radial pasa-baja $\delta_- : P_k \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \{0, 1\}$ viene dado por:

$$\delta_-(p_{i,k}, \mu_+) = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{i,k} \leq \mu_+, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En caso de que se tome de referencia un valor $\mu_- \geq 0$, tal que para todo $r_{i,k} \leq \mu_-$, se determine que el poro correspondiente $p_{i,k}$ esté obstruido, se establece una función que permita la conectividad de los poros que tengan un radio mayor a dicho parámetro, tal como se establece en la siguiente definición:

Definición 3.3. *Función de umbral radial pasa-alta:*

Sea $p_{i,k}$ un poro de la capa P_k , sea $\mu_- \geq 0$, la función de umbral radial pasa-alta $\delta_+ : P_k \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$ se define como:

$$\delta_+(p_{i,k}, \mu_-) = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{i,k} > \mu_-, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Al considerar dos umbrales radiales $0 \leq \mu_- < \mu_+$, para los poros $p_{i,k}$ cuyo radio $r_{i,k}$ cumpla que $\mu_- < r_{i,k} \leq \mu_+$, se consideren que no están obstruidos, se define $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+)$:

Definición 3.4. *Función de umbrales radiales pasa-banda:*

Sea $p_{i,k}$ un poro de la capa P_k , sean μ_- y μ_+ tales que $0 \leq \mu_- < \mu_+$, entonces, la función de umbrales radiales pasa-banda $\delta_I : P_k \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \{0, 1\}$ viene dado por:

$$\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = \delta_-(p_{i,k}, \mu_+) \delta_+(p_{i,k}, \mu_-) \quad (3.2)$$

De la definición 3.4, si $r_{i,k} > \mu_+$, se tiene que $\delta_+(p_{i,k}, \mu_-) = 1$, no obstante, $\delta_-(p_{i,k}, \mu_+) = 0$, por lo que $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = 0$, es decir el poro está obstruido. Asimismo, sucede cuando $r_{i,k} < \mu_-$, pues $\delta_-(p_{i,k}, \mu_+) = 1$, pero $\delta_+(p_{i,k}, \mu_-) = 0$, por lo que $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = 0$. Mientras que si $r_{i,k} \in (\mu_-, \mu_+]$, las funciones de umbrales radiales cumplen que $\delta_-(p_{i,k}, \mu_+) = 1$ y $\delta_+(p_{i,k}, \mu_-) = 1$. Por lo cual se tiene que $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = 1$, es decir el poro puede sostener una conexión.

Si se incorporan condicionantes del tamaño de los poros, la función de conexión $p - p$ toma la siguiente expresión:

Definición 3.5. *Función de conexión con umbrales radiales.*

Sean $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ poros de las capas P_k y P_{k+1} respectivamente, sean μ_- y μ_+ en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^+$, respectivamente, con $0 \leq \mu_- < \mu_+$, la función de conexión con umbrales radiales $f_I : P_k \times P_{k+1} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \{0, 1\}$ se define como:

$$f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) \delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) \quad (3.3)$$

La definición anterior muestra que poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ de capas consecutivas P_k y P_{k+1} respectivamente, pueden tener intersección no vacía, no obstante, su conectividad no puede ser posible si los poros son afectados por los umbrales radiales μ_- y μ_+ .

El efecto de los umbrales μ_- y μ_+ en la conexión de los poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ puede visualizarse en la **Figura 3.3**:

- Es posible observar que en la **Figura 3.3a**, bajo el supuesto de que $r_{j,k+1} < \mu_-$, y con $r_{i,k} \in (\mu_-, \mu_+]$, las funciones de umbral radial pasa banda evaluadas en cada poro toman los valores: $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = 1$ y $\delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) = 0$, aunque los poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ tengan intersección distinta del vacío, es decir $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) = 1$, uno de ellos, $p_{j,k+1}$, está obstruido, por lo que los poros no pueden conectarse, esto implica que $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = 0$.

- En la **Figura 3.3b** se ilustra el caso para $r_{i,k} > \mu_+$ y $r_{j,k+1} \in (\mu_-, \mu_+]$. Al evaluar la función de umbral radial pasa-banda, se tiene que $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = 0$ y $\delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) = 1$, aunque se cumpla que $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) = 1$, la función de conexión con umbral radial se estima como $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = 0$

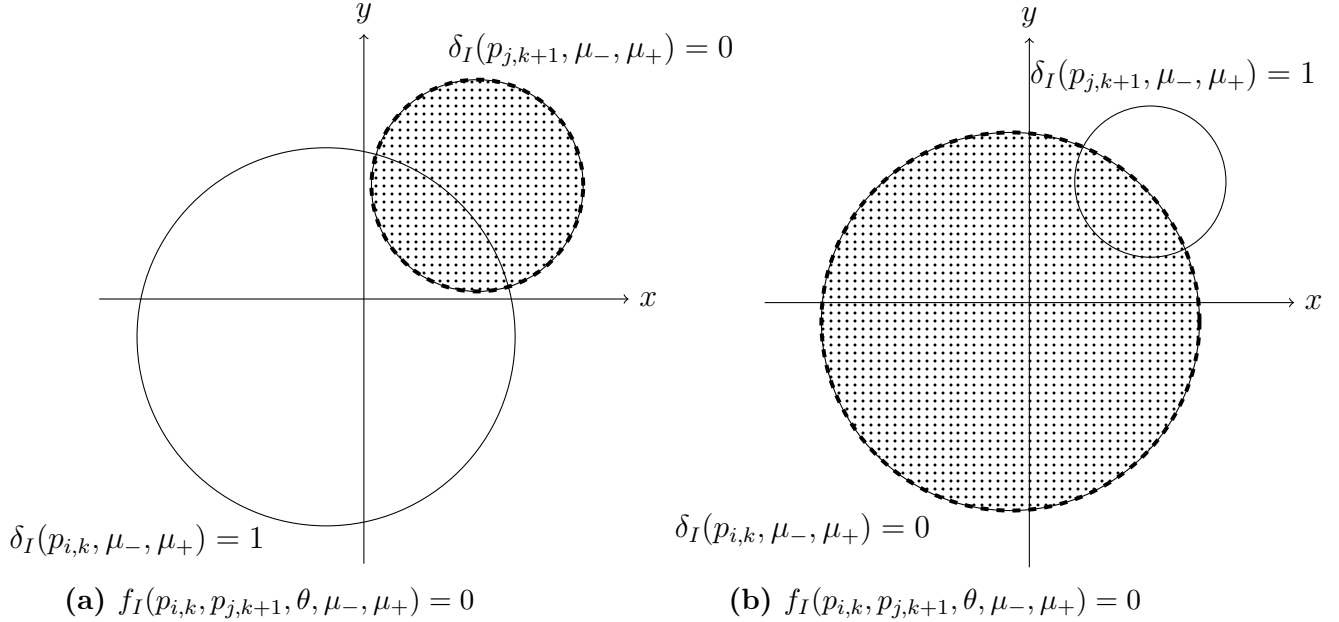


Figura 3.3: Cálculo de la función $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$.

En base a las ideas previamente desarrolladas se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.1. Sean $\mu_- = 0$ y $\mu_+ > 0$ tal que, para todo $r_{i,k}, r_{j,k+1}$, se tiene que $r_{i,k}, r_{j,k+1} < \mu_+$ entonces:

$$f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$$

Demostración. El resultado anterior se sigue inmediatamente de la definición 3.5, para $\mu_- = 0$, se tiene que $\delta_+(p_{i,k}, \mu_-) = 1$ y $\delta_+(p_{j,k+1}, \mu_-) = 1$. Dado que $r_{i,k}, r_{j,k+1} < \mu_+$, se cumple que $\delta_-(p_{i,k}, \mu_+) = 1$ y $\delta_-(p_{j,k+1}, \mu_+) = 1$, esto implica que $\delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) = 1$ y $\delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) = 1$, por lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) &= \delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) \delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) \\ &= 1 \times 1 \times f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) = f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) \end{aligned}$$

□

En el intervalo $[0, 2\pi]$ la función $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ toma la siguiente forma:

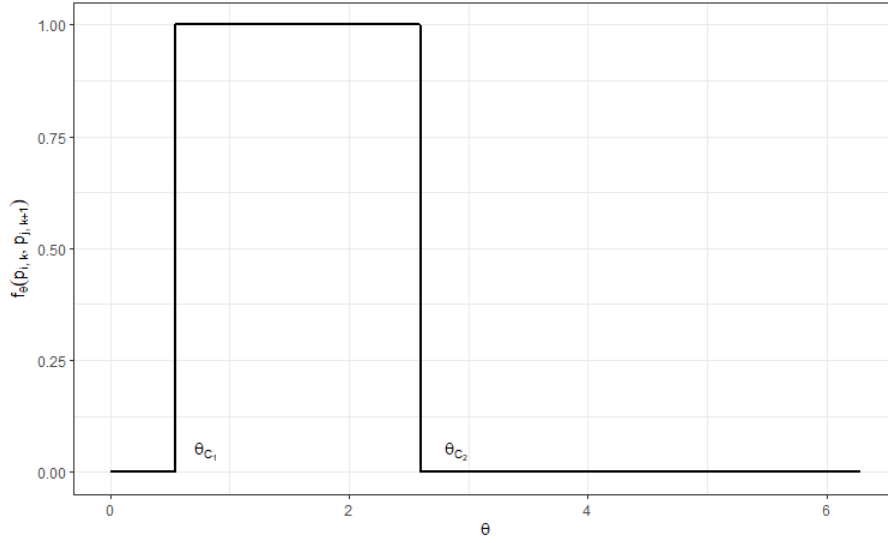


Figura 3.4: $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ evaluada en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Tal como se ilustró en la **Figura 3.3**, existen valores de θ en el intervalo $[0, 2\pi]$ para los cuales la función de conexión es igual a la unidad, es decir $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) = 1$, lo cual puede observarse en la **Figura 3.4**, y representa la intersección no vacía entre los poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$. Asimismo, se identifican θ_{C_1} y θ_{C_2} . En dichos valores la función de conectividad deja de ser continua debido a que esta se anula.

3.2.2. Conexión Poro-Capa

Previo al cálculo de la conectividad entre capas porosas consecutivas P_k y P_{k+1} , se establece el cálculo del número de posibles conexiones entre el poro $p_{i,k}$ de la capa P_k con distintos poros de la capa P_{k+1} .

Definición 3.6. *Función de conexión Poro-Capa*

Sea $p_{i,k}$ un poro de la capa P_k , y la capa P_{k+1} , la función de conexión del poro $p_{i,k}$ con la capa P_{k+1} , $\hat{f}: P_k \times P_{k+1} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{N}$ se define como:

$$\hat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta) = \sum_{j=1}^{N_{k+1}} f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) \quad (3.4)$$

Con N_{k+1} el número de poros de la capa P_{k+1} . Para el caso de que se consideren umbrales radiales. Se tiene la definición siguiente:

Definición 3.7. *Función de conexión Poro-Capa con umbrales radiales*

Sea $p_{i,k}$ un poro de la capa P_k , y la capa P_{k+1} , sean μ_- y μ_+ con $0 \leq \mu_- < \mu_+$, la función de conexión poro-capa con umbrales radiales $\widehat{f}_I : P_k \times P_{k+1} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ se define como:

$$\widehat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \sum_{j=1}^{N_{k+1}} \delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) \delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) \quad (3.5)$$

Las ecuaciones 3.4 y 3.5 incorporan la incidencia de la rotación de la capa P_{k+1} con respecto a la capa P_k y de los umbrales radiales μ_- y μ_+ en la conectividad del poro $p_{i,k}$ con la capa P_{k+1} . Las funciones $\widehat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta)$ y $\widehat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ generan diferentes valores conforme a estas condiciones, tal como se ejemplifica en las **Figuras 3.5 y 3.6**.

En dichas figuras se identifica que para umbrales radiales μ_- y μ_+ con $0 \leq \mu_- < \mu_+$, el número posible de conexiones del poro $p_{i,k}$ con la capa P_{k+1} disminuye. Dicha observación, resulta en el siguiente corolario:

Corolario 3.1. *Dado un poro $p_{i,k}$ de la capa P_k , el conjunto de poros de la capa P_{k+1} , θ en $[0, 2\pi]$ y $0 \leq \mu_- < \mu_+$, se tiene que:*

$$\max\{\widehat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)\} = \widehat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta)$$

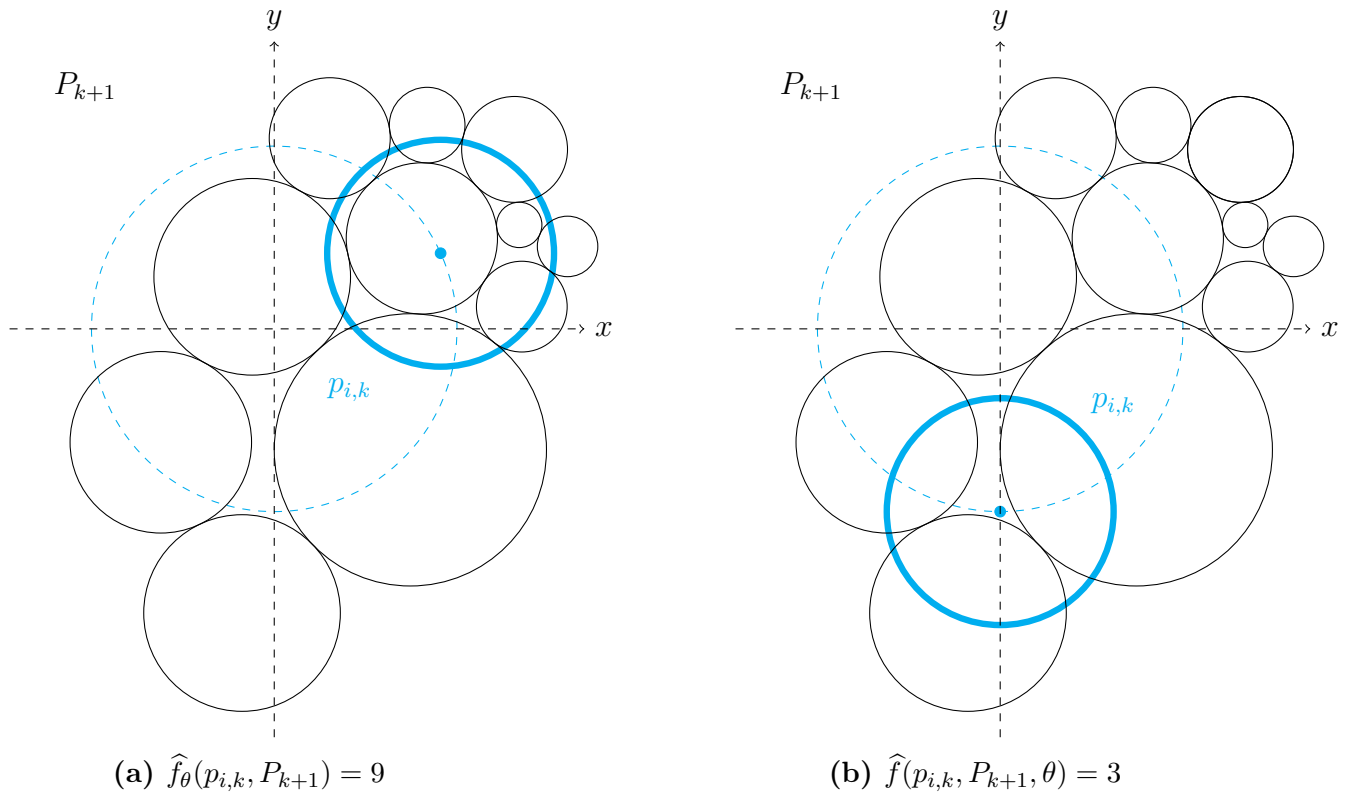


Figura 3.5: Cálculo de la función $\hat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta)$.

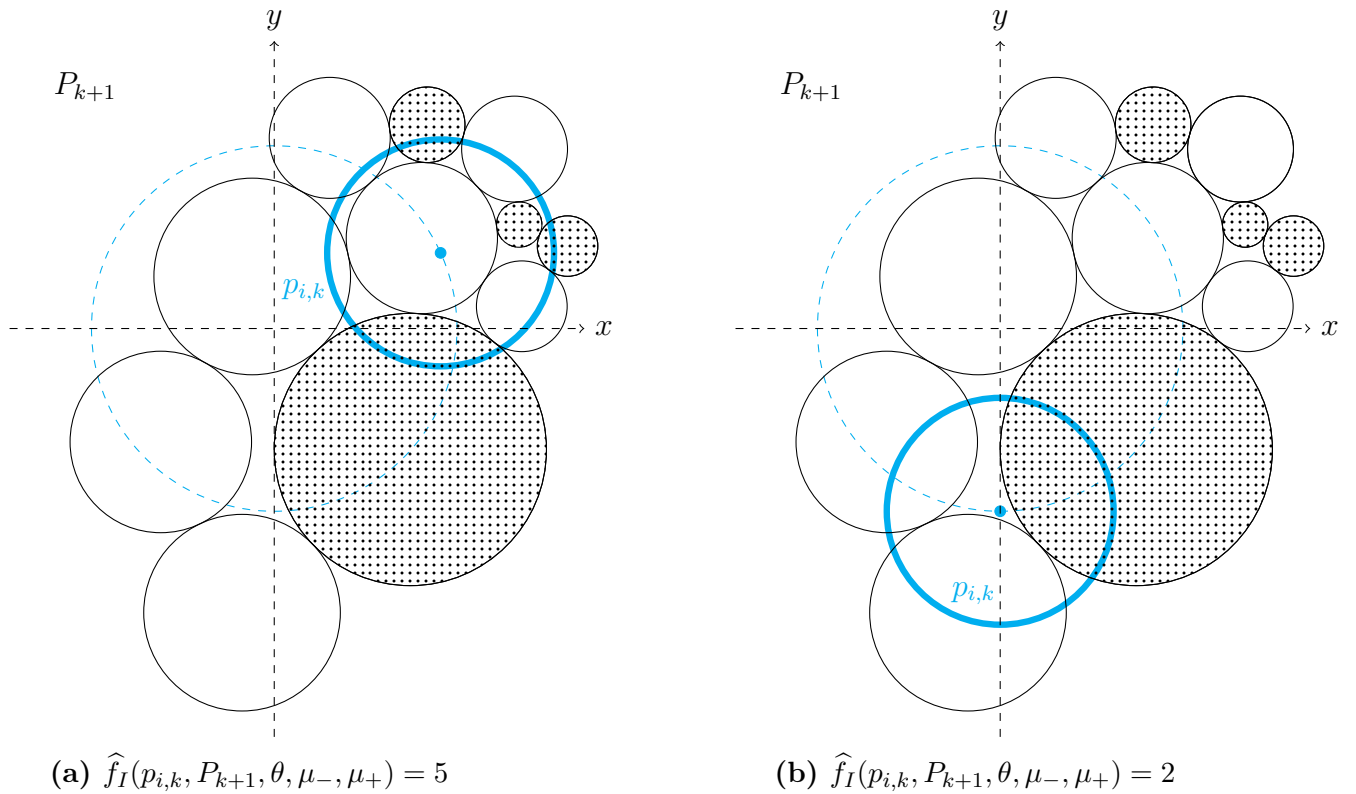


Figura 3.6: Cálculo de la función $\hat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$.

3.2.3. Conexión Capa-Capa ($P - P$)

El número de conexiones de la capa P_k y de la capa P_{k+1} viene dado por la siguiente expresión:

Definición 3.8. *Función de conexión capa-capa*

Sean las capas P_k , y P_{k+1} , la función de conexión de capa a capa $\tilde{f} : P_k \times P_{k+1} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{N}$ se define como:

$$\tilde{f}(P_k, P_{k+1}, \theta) = \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_{k+1}} f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta) \quad (3.6)$$

Con N_k y N_{k+1} el número de poros de P_k y P_{k+1} respectivamente.

Si se consideran umbrales radiales el número de conexiones queda determinado por:

Definición 3.9. *Función de conexión capa-capa con umbrales radiales*

Sean las capas P_k y P_{k+1} , los umbrales radiales μ_- y μ_+ , con $0 \leq \mu_- < \mu_+$, la función de conexión de capa a capa con umbrales radiales $\tilde{f}_I : P_k \times P_{k+1} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ viene dado por:

$$\tilde{f}_I(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_{k+1}} f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) \quad (3.7)$$

Con N_k y N_{k+1} el número de poros de P_k y P_{k+1} respectivamente.

Las capas de la **Figura 2.4a** y **2.4b** tienen alrededor de 3,100 poros cada una. Encontrar el valor de $\tilde{f}(P_k, P_{k+1}, \theta)$ requiere estimar $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ para cada pareja de poros $p_{i,k}$ y $p_{j,k+1}$ posibles. Para este caso, se requiere realizar $3,100^2$ operaciones. No obstante, el número de operaciones puede reducirse al no estimar $f(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta)$ para poros que están lo suficientemente alejados. En la siguiente sección se detalla el método que permite reducir el número de operaciones para estimar $\tilde{f}(P_k, P_{k+1}, \theta)$ al considerar la ubicación de cada poro en los sectores o divisiones de la capa porosa respectiva de radio R_c .

3.2.4. Sectorización de Capa Porosa

Cada capa porosa P_k puede dividirse en un conjunto de sectores determinados por un paso angular $\Delta\beta$ y un paso radial Δr , generando un número de sectores N_s , el cual se puede calcular utilizando la expresión siguiente:

$$N_s = \frac{R_c}{\Delta r} \times \frac{2\pi}{\Delta\beta}$$

Siendo $\Delta r = R_c/n_r$ y $\Delta\beta = 2\pi/n_\beta$, con n_r y n_β enteros mayores que uno. Asimismo, cada poro de P_k se intersecta con algunos de estos sectores, como se observa en la **Figura 3.7**.

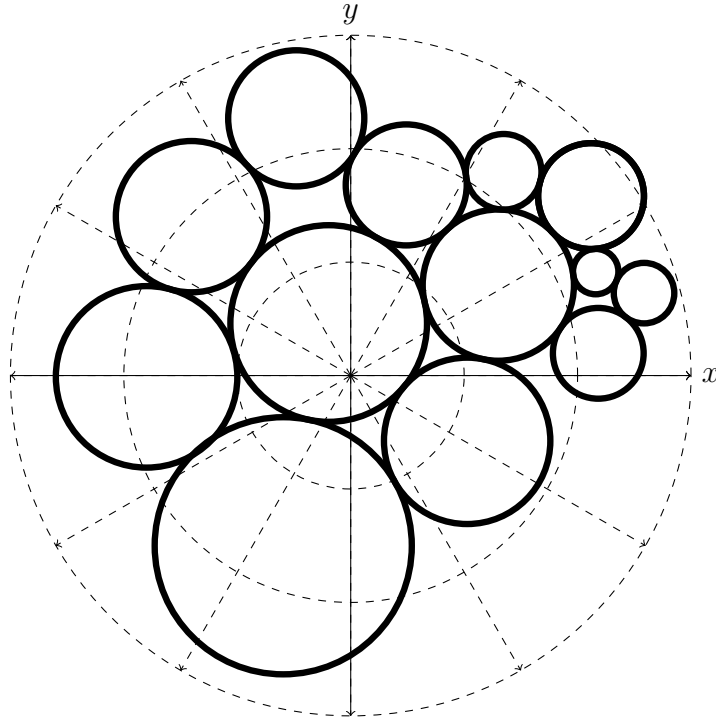


Figura 3.7: Sectores de una capa de radio R_c .

A cada sector le corresponde un número $\ell \in \{1, 2, \dots, N_s\}$, el cual está definido por:

$$\ell(u, v) = un_r + v + 1$$

Con $u \in \{0, 1, 2, \dots, n_\beta - 1\}$ y $v \in \{0, 1, \dots, n_r - 1\}$.

Note que los puntos (x, y) del borde de cada poro con centro $(x_{i,k}, y_{i,k})$ y radio $r_{i,k}$ cumplen que:

$$(x - x_{i,k})^2 + (y - y_{i,k})^2 = r_{i,k}^2$$

Si se define $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arccos\left(\frac{x}{R}\right)$, $R_{i,k} = \sqrt{x_{i,k}^2 + y_{i,k}^2}$ y $\theta_{i,k} = \arccos\left(\frac{x_{i,k}}{R_{i,k}}\right)$, y se sustituye en la ecuación anterior, se tiene que:

$$R^2 + R_{i,k}^2 - 2RR_{i,k}\cos(\theta_{i,k} - \phi) = r_{i,k}^2 \quad (3.8)$$

Luego, si se deriva con respecto a ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left[R^2 + R_{i,k}^2 - 2RR_{i,k}\cos(\theta_{i,k} - \phi) \right] = 0$$

Resulta que $\theta_{i,k} = \phi$. Al realizar dicha sustitución en la ecuación 3.8 se obtienen las longitudes máxima y mínima de R :

$$R_{min} = R_{i,k} - r_{i,k} \quad o \quad R_{max} = R_{i,k} + r_{i,k}$$

Lo cual permite obtener:

$$\left\lfloor \frac{R_{i,k} - r_{i,k}}{\Delta r} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{R}{\Delta r} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{R_{i,k} + r_{i,k}}{\Delta r} \right\rceil$$

y establecer la siguiente definición, para un poro $p_{i,k}$ que no contiene al origen:

Definición 3.10. *Apertura Radial de un poro $p_{i,k}$.*

$$A_r(p_{i,k}) = \{v | v \in \left[\left\lfloor \frac{R_{i,k} - r_{i,k}}{\Delta r} \right\rfloor, \left\lceil \frac{R_{i,k} + r_{i,k}}{\Delta r} \right\rceil \right] \cap \mathbb{N}_0\} \quad (3.9)$$

Si se deriva 3.8 con respecto a R :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 + R_{i,k}^2 - 2RR_{i,k}\cos(\theta_{i,k} - \phi) \right] = 0$$

Se obtiene que:

$$\cos(\theta_{i,k} - \phi) = \frac{R}{R_{i,k}}$$

Lo cual es cierto, cuando $\vec{R} \perp \vec{r}_{i,k}$, es decir, cuando el punto (x, y) es el punto de tangencia desde el origen del sistema de coordenadas al poro $p_{i,k}$. Además, que la diferencia $\theta_{i,k} - \phi$ es máxima, sea ϕ' para el cual esto es cierto, entonces:

$$\left\lfloor \frac{\theta_{i,k} - \phi'}{\Delta\beta} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\phi}{\Delta\beta} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{2\theta_{i,k} - \phi'}{\Delta\beta} \right\rceil$$

Para determinar la apertura angular $A_\phi(p_{i,k})$ se definen los siguientes casos:

- **Caso 1:** El poro $p_{i,k}$ contiene al origen $(0,0)$.

$$A_\phi(p_{i,k}) = \{u | u \in \{0, 1, 2, \dots, n_\beta - 1\}\}$$

Por otra parte, para este caso, la apertura radial $A_r(p_{i,k})$ viene dado por:

$$A_r(p_{i,k}) = \left\{v | v \in \left[0, \left\lceil \frac{R_{i,k} + r_{i,k}}{\Delta r} \right\rceil\right] \cap \mathbb{N}_0\right\}$$

- **Caso 2:** El poro no contiene al origen y no tiene intersección con el eje positivo x .

$$A_\phi(p_{i,k}) = \left\{u | u \in \left[\left\lfloor \frac{\theta_{i,k} - \phi'}{\Delta\beta} \right\rfloor, \left\lceil \frac{2\theta_{i,k} - \phi'}{\Delta\beta} \right\rceil\right] \cap \mathbb{N}_0\right\}$$

- **Caso 3:** El poro no contiene al origen y tiene intersección no vacía con el eje x positivo.

$$A_\phi(p_{i,k}) = \left\{u | u \in \left(\left[\left\lfloor \frac{\theta_{i,k} - \phi'}{\Delta\beta} \right\rfloor, N_s\right] \cup \left[0, \left\lceil \frac{2\theta_{i,k} - \phi'}{\Delta\beta} \right\rceil \pmod{N_s}\right]\right) \cap \mathbb{N}_0\right\}$$

En base a lo antes expuesto se define $G_s(p_{i,k})$:

Definición 3.11. *Soporte de Sector del poro $p_{i,k}$:*

$$G_s(p_{i,k}) = \left\{\ell | \ell(u, v) = un_r + v + 1, u \in A_\phi(p_{i,k}) \wedge v \in A_r(p_{i,k})\right\}$$

Que determina el conjunto de sectores de la capa P_k con los que el poro $p_{i,k}$ tiene una intersección no vacía. A partir de la definición anterior se establece:

Definición 3.12. *Función de Sector del poro $p_{i,k}$:*

$$g_s(p_{i,k}) = \sum_{\ell=1}^{N_s} \mathbf{1}_{G_s(p_{i,k})}(\ell) \hat{e}_\ell \quad (3.10)$$

La cual permite expresar $G_s(p_{i,k})$ como un vector de 0 y 1 en el espacio $\mathbb{R}^{N_s}$. El conjunto de poros que tienen intersección no vacía con el sector ℓ , se determinan mediante la siguiente definición:

Definición 3.13. ℓ -sector de capa porosa P_k :

$$\tilde{G}(\ell, P_k) = \bigcup_{i=1}^{N_k} \{i \cdot \pi_\ell[g_s(p_{i,k})]\} - \{0\} \quad (3.11)$$

Donde $\pi_\ell(\cdot) : \mathbb{R}^{N_s} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función proyección.

Como agregado defínase el siguiente operador de rotación:

Definición 3.14. Operador de rotación del poro $p_{i,k}$.

$$\tau(p_{i,k}, \theta) = (x_{i,k} \cos(\theta) - y_{i,k} \sin(\theta), x_{i,k} \sin(\theta) + y_{i,k} \cos(\theta), r_{i,k})$$

El cual denota que el centro de un poro $p_{i,k}$ de una capa porosa P_k ha sido rotado un ángulo θ . En su defecto $\tau(P_k, \theta)$ denota que los poros que conforman la capa P_k han sido rotados. En ese sentido se establece la definición siguiente:

Definición 3.15. Función de Actualización ψ .

$$\psi(m, i, j, \ell, P_k, P_{k+1}) = \begin{cases} f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) & \text{si } i \in \tilde{G}(\ell + 1, P_k) \wedge j \in \tilde{G}(\ell + 1, \tau(P_{k+1}, \theta)) \\ m & \text{o.c.} \end{cases}$$

Donde:

- θ es el ángulo de rotación.
- P_k y P_{k+1} son capas porosas consecutivas, con N_k y N_{k+1} poros respectivamente.
- $m \in \mathbb{R}$
- $\tilde{G}(\ell + 1, P_k)$ y $\tilde{G}(\ell + 1, \tau(P_{k+1}, \theta))$ son los $\ell + 1$ -sectores de las capas P_k y la capa rotada $\tau(P_{k+1}, \theta)$ respectivamente.

La definición anterior permite establecer el siguiente operador:

Definición 3.16. *Operador de Actualización Ψ*

$$\Psi(\mathcal{M}, \ell) = (\psi(\mathcal{M}_{i,j}, i, j, \ell, P_k, P_{k+1}))_{N_k \times N_{k+1}}$$

Donde:

- $\mathcal{M}$ es una matriz de $N_k \times N_{k+1}$ entradas.
- $\mathcal{M}_{i,j}$ es la ij -entrada de la matriz $\mathcal{M}$.
- $i \in \{1, 2, \dots, N_k\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, N_{k+1}\}$

Note que $\Psi(\mathcal{M}, \ell)$ es una matriz con entradas reales de tamaño $N_k \times N_{k+1}$ y modifica las componentes cuyos índices i, j pertenezcan a los conjuntos $\tilde{G}(\ell + 1, P_k)$ y $\tilde{G}(\ell + 1, \tau(P_{k+1}, \theta))$ respectivamente, dejando las demás entradas de $\mathcal{M}$ sin cambios. Además, dichos componentes toman valores en $\{0, 1\}$, debido a que son determinadas por la función de conexión con umbrales radiales $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$.

Para $\ell \in \{1, 2, \dots, N_s\}$ defínase la siguiente sucesión:

$$M^{(\ell)}(P_k, P_{k+1}) = \Psi(M^{(\ell-1)}(P_k, P_{k+1}), \ell)$$

Con $N_s = n_r \times n_\beta$, y n_r, n_β enteros mayores que uno; y $M^{(0)}(P_k, P_{k+1})$ una matriz de tamaño $N_k \times N_{k+1}$ con todas sus componentes igual a cero. Luego para $\ell = N_s - 1$, ángulo de rotación θ , y umbrales radiales $0 \leq \mu_- < \mu_+$, se tiene:

Definición 3.17. *Matriz de conexión*

$$M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = M^{(N_s)}(P_k, P_{k+1})$$

La cual recoge las conexiones de los poros de la capa P_k y P_{k+1} . Esto permite establecer la siguiente relación:

$$\tilde{f}_I(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_{k+1}} M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)_{ij} \quad (3.12)$$

Note que $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ es una matriz dispersa, debido a la distribución de los poros en las capas. Tal como puede observarse en la **Figura 3.8**, un poro $p_{i,k}$ no se conecta con todos los poros de la capa P_{k+1} . Cabe señalar que $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ depende del ángulo de rotación θ y al efecto de los umbrales radiales μ_- y μ_+ . Las entradas de la matriz $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ se definen a partir de $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$.

El procedimiento para obtener las matrices conectividad se resume en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1 Construcción de una matriz de conexión entre dos capas porosas P_k y P_{k+1}

Entrada: Capas P_k con poros $\{p_{i,k}\}$, P_{k+1} con $\{p_{j,k+1}\}$; pasos $\Delta r, \Delta\beta$; umbrales $I = (\mu_-, \mu_+]$; ángulo de rotación θ

Salida: Matriz de conexión M_c y la función de conexión con umbrales radiales capa-capo $\tilde{f}_I(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$

```

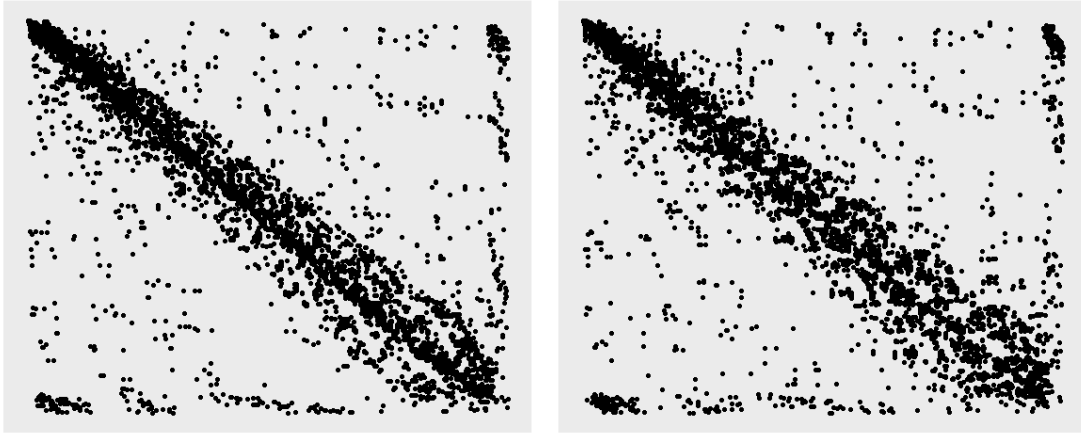
1: Inicializar  $M^{(0)}(P_k, P_{k+1}) \leftarrow \mathbf{0}$  de tamaño  $N_k \times N_{k+1}$ 
2: Rotar  $P'_{k+1} \leftarrow \tau(P_{k+1}, \theta)$ 
3: para  $\ell = 1$  to  $N_s$  hacer
4:   Calcular  $\tilde{G}(\ell, P_k)$  y  $\tilde{G}(\ell, P'_{k+1})$ 
5:   para cada  $i \in \tilde{G}(\ell, P_k)$  hacer
6:     para cada  $j \in \tilde{G}(\ell, P'_{k+1})$  hacer
7:       si  $f_I(p_{i,k}, p_{j,k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = 1$  entonces
8:          $M_{i,j}^{(\ell)}(P_k, P_{k+1}) \leftarrow 1$ 
9:       si no
10:         $M_{i,j}^{(\ell)}(P_k, P_{k+1}) \leftarrow M_{i,j}^{(\ell-1)}(P_k, P_{k+1})$ 
11:      fin si
12:    fin para
13:  fin para
14:  Para los demás  $(i, j)$ :  $M_{i,j}^{(\ell)}(P_k, P_{k+1}) \leftarrow M_{i,j}^{(\ell-1)}(P_k, P_{k+1})$ 
15: fin para
16:  $M_c \leftarrow M^{(N_s)}$ 
17: devolver  $M_c$  y  $\tilde{f}_I(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \sum_{i,j} M_c[i, j]$ 

```

Definiendo el procedimiento por el cual se determinan las conexiones entre capas consecutivas P_k y P_{k+1} , se puede determinar la conectividad correspondiente, la cual se cuantifica mediante el parámetro χ , como se detalla en la siguiente sección.

3.2.5. Característica de Poincaré-Euler de Bicapas.

Conforme a la ecuación 2.10 la conectividad de dos capas consecutivas viene dada por la siguiente expresión:



(a) $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ con $\theta = 0$ (b) $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ con $\theta = 45$

Figura 3.8: Matriz de conexión $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ para diferentes valores de θ .

$$\chi(P_k, P_{k+1}, \theta) = \frac{1}{2} \left(N_k + N_{k+1} - 2\tilde{f}(P_k, P_{k+1}, \theta) \right) \quad (3.13)$$

Para umbrales radiales μ_- y μ_+ la conectividad se calcula como:

$$\chi(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N_k} \delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) + \sum_{j=1}^{N_{k+1}} \delta_I(p_{j,k+1}, \mu_-, \mu_+) - 2\tilde{f}_I(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+) \right) \quad (3.14)$$

Cabe señalar, que $\chi(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ es una medida del grado de conexión que tiene el espacio delimitado por la superposición de los poros que conforman las capas P_k y P_{k+1} . Aunque los poros son representados como círculos, en las estructuras porosas son cilindros de altura $\Delta h > 0$ y de radio $r_{i,k}$. El espacio encerrado por los poros superpuestos es volumétrico y el valor de $\chi(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ permite dimensionar que tan conectado topológicamente está consigo mismo [19].

El cálculo de χ , puede ilustrarse utilizando la bicapa de la **Figura 3.9**, que se realiza como sigue:

Cada capa esta compuesta por un poro, por lo cual $N_1 = 1$ y $N_2 = 1$, además, se verifica la intersección entre ambos poros, por lo que $N_1 \cap N_2 = 1$. Aplicando la ecuación 3.13 se tiene:

$$\chi = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - 2 \times 1 \right) = 0$$

El resultado previo muestra que la conectividad es nula, debido a que no hay conexiones redundantes para el espacio poroso contenido en el interior de ambos cilindros o poros.

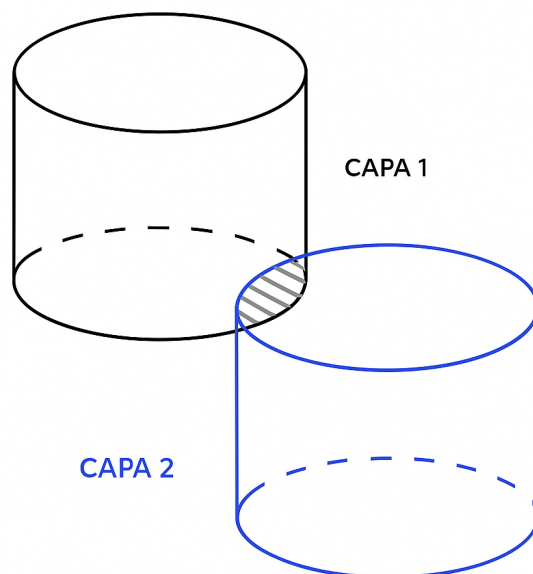


Figura 3.9: Bicapa de dos poros.

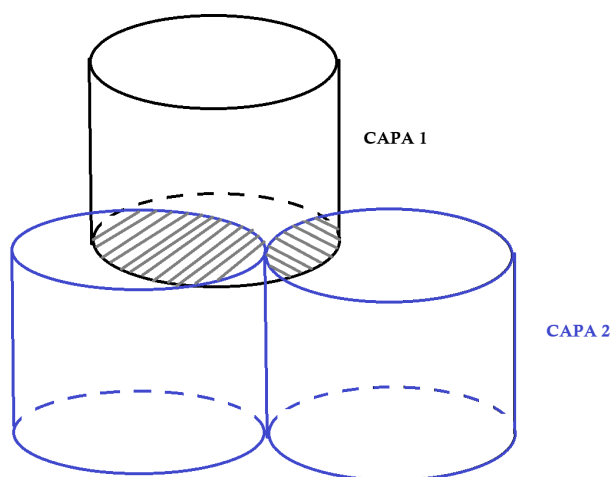


Figura 3.10: Bicapa de tres poros.

En cambio, para la **Figura 3.10**, se tiene que $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ y $N_1 \cap N_2 = 2$ por lo que χ toma el siguiente valor:

$$\chi = \frac{1}{2} \left(1 + 2 - 2 \times 2 \right) = -0.5$$

Lo cual muestra que χ toma un valor negativo, e indica que hay más conexiones redundantes entre una capa y la otra, tal como puede observarse en la figura anterior.

3.2.6. Característica de Poincaré-Euler de Estructuras Porosas

Para una estructura porosa compuesta por N_c capas porosas yuxtapuestas, la conectividad topológica del espacio volumétrico contenido se estima mediante:

$$\chi_{EP} = \frac{1}{\pi R_c^2 \Delta h N_c} \sum_{k=1}^{N_c-1} \chi(P_k, P_{k+1}, \theta_{k,k+1}, \mu_-, \mu_+) \quad (3.15)$$

Que viene a ser un promedio volúmetrico de la conectividad de la estructura porosa [16]. Es posible notar que χ_{EP} es sensible a los ángulos de rotación bicapa $\theta_{k,k+1}$ y a los umbrales radiales μ_- y μ_+ . Encontrar valores extremos para χ_{EP} equivale a sensibilizar la conectividad de cada bicapa de la estructura porosa. Sin pérdida de generalidad tómese $\chi_{k,k+1} = \chi(P_k, P_{k+1}, \theta_{k,k+1}, \mu_-, \mu_+)$. Entonces:

$$\chi_{EP_{min}} = \sum_{k=1}^{N_c-1} \chi_{k,k+1_{min}} \quad \wedge \quad \chi_{EP_{max}} = \sum_{k=1}^{N_c-1} \chi_{k,k+1_{max}}$$

El procedimiento para encontrar el ángulo que maximiza o minimiza la conectividad de bicapas se basa en estimar el valor de χ para diferentes valores de θ .

3.2.7. Matriz de Caminos M_{EP}

Como se había descrito en la sección 2.2.5, las capas porosas delimitan el espacio volumétrico interior a los poros. Dicho espacio puede ser descrito a su vez por los caminos generados por la conexión entre los poros de las capas. El número de caminos de un poro de la primera capa, a la N_c -ésima capa de una estructura porosa viene dada por la ij -ésima componente de la matriz M_{EP} , que viene dada por la siguiente expresión:

Definición 3.18. *Matriz de Caminos de una Estructura Porosa*

$$M_{EP} = \prod_{k=1}^{N_c-1} M_c(P_k, P_{k+1}, \theta_{k,k+1}, \mu_-, \mu_+) \quad (3.16)$$

El número de caminos que hay de un poro $p_{i,1}$ de la capa P_1 a un poro p_{j,N_c} de la capa P_{N_c} viene dado por $M_{EP_{i,j}}$. En general el número de caminos en una estructura porosa se estima mediante:

$$T_{EP} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_c} M_{EP_{i,j}} \quad (3.17)$$

3.3. Filtración de Partículas

El proceso de filtración de partículas sólidas se puede asumir como un flujo volumétrico *aleatorio* a través de las distintas capas que componen la estructura porosa [6]. Asimismo, este proceso puede ser definido como "...la **separación** de partículas sólidas a partir de un fluido mediante el paso del fluido a través de un medio filtrante o **pared separadora** sobre el que se depositan los sólidos..." [10].

La capacidad de un medio filtrante o estructura porosa, se cuantifica mediante la eficiencia, que se define como [7]:

Definición 3.19. *Eficiencia de un medio filtrante: Razón del número de partículas que fueron capturadas y el número de partículas previo a desplazarse a través del medio filtrante o estructura porosa.*

Para describir el efecto de la conectividad en la capacidad que tienen los medios filtrantes de capturar partículas, se toma de referencia el modelo desarrollado en [7], que define la filtración como un sistema en el que interactúan partículas y capas porosas.

Considerando las propiedades físicas de una estructura porosa, obtenidas mediante experimentos de laboratorio, el número de capas N_c suficientes para estimar su eficiencia viene dado por [6]:

$$N_c = \left(\frac{\Delta h}{D_f} \right) (1 - \epsilon) \quad (3.18)$$

Donde:

- Δh es el espesor de cada capa porosa.
- D_f es el diámetro medio de la fibra.
- ϵ es la porosidad del medio filtrante.

Se consideran los siguientes supuestos para la simulación de capturas de partículas en la estructura porosa [20]:

1. Todas las partículas son esferas sólidas cuyo radio depende de la misma distribución de tamaño.

2. El efecto de la interacción entre partículas en su movimiento es ignorado.
3. Una partícula puede ser capturada por un poro, una fibra o un poro bloqueado por otras partículas.

Como se indicó previamente, cada partícula sólida se representa como una esfera con centro en $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^3$ y de radio $\hat{r} > 0$. Si se parametriza en $t \in \mathbb{R}_0^+$, una partícula puede ser identificada como:

$$q(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t), \hat{r})$$

Un conjunto de partículas Q puede expresarse como:

$$Q(t) = \bigcup_{\alpha=1}^{N_Q} q_\alpha(t)$$

Donde N_Q es el número de partículas del conjunto Q . Una partícula q_α atraviesa una capa porosa P_k , si se desplaza a través de un solo poro $p_{i,k}$, de lo contrario sería capturada [20]. Esto es cierto si :

$$d(q_\alpha, p_{i,k}) < r_{i,k} - \hat{r}_\alpha \quad (3.19)$$

Donde, $d(q_\alpha, p_{i,k})$ es la distancia en el plano xy del centro de la partícula q_α al poro $p_{i,k}$, como se detalla a continuación:

$$d(q_\alpha, p_{i,k}) = \sqrt{(\hat{x}_\alpha - x_{i,k})^2 + (\hat{y}_\alpha - y_{i,k})^2}$$

La verificación de que una partícula se ha desplazado a través de un poro puede expresarse en la siguiente función:

Definición 3.20. *Función de filtración de partícula-poro:*

$$\omega(q_\alpha, p_{i,k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(q_\alpha, p_{i,k}) < r_{i,k} - \hat{r}_\alpha \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

La filtración de una partícula q_α a través de una capa porosa P_k se denota como $\omega(q_\alpha, P_k)$ y viene dado por:

Definición 3.21. *Función de filtración partícula-capa:*

$$\omega(q_\alpha, P_k) = \sum_{i=1}^{N_k} \omega(q_\alpha, p_{i,k})$$

Que toma el valor de $\omega(q_\alpha, P_k) = 1$ cuando q_α ha logrado desplazarse a través de un poro $p_{i,k}$, no obstante, si la partícula q_α es capturada por una región sólida de la estructura porosa, se tiene que $\omega(q_\alpha, P_k) = 0$, tal como puede observarse en la **Figura 3.11**.

Si se considera un ángulo de rotación θ para P_k , y umbrales radiales μ_- y μ_+ con $0 \leq \mu_- < \mu_+$, se tiene entonces:

Definición 3.22. *Función de filtración partícula-poro ampliada:*

$$\omega_I(q_\alpha, p_{i,k}, \theta, \mu_-, \mu_+) = \begin{cases} \delta_I(p_{i,k}, \mu_-, \mu_+) & \text{si } d(q_\alpha, p_{i,k}, \theta) < r_{i,k} - \hat{r}_\alpha \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

Con $d(q_\alpha, p_{i,k}, \theta)$ definido como en la ecuación **3.1**. Para la filtración mediante una capa porosa, considerando lo antes expuesto, se tiene:

Definición 3.23. *Función de filtración partícula-capa ampliada:*

$$\omega_I(q_\alpha, P_k, \theta, \mu_-, \mu_+) = \sum_{i=1}^{N_k} \omega_I(q_\alpha, p_{i,k}, \theta, \mu_-, \mu_+)$$

Si se denota $i(\alpha, k)$ el índice del poro por el cual la partícula q_α ha logrado desplazarse a través de la capa P_k , este se obtiene mediante:

$$i(\alpha, k) = \sum_{i=1}^{N_k} i * \omega_I(q_\alpha, p_{i,k}, \theta, \mu_-, \mu_+)$$

Asimismo, el radio del poro por el que se desplazó la partícula viene dado por:

$$r(\alpha, k) = \sum_{i=1}^{N_k} r_{i,k} * \omega_I(q_\alpha, p_{i,k}, \theta, \mu_-, \mu_+)$$

Para un proceso de filtración de varias partículas a través de una estructura porosa conformada de N_c capas yuxtapuestas, se puede considerar un conjunto Q de partículas en un momento inicial t_0 previo a dicho proceso.

$$Q(t_0) = \bigcup_{\alpha=1}^{N_Q} q_\alpha(t_0)$$

Con $z_\alpha(t_0) = N_c * \Delta h$, y $\hat{x}_\alpha(t_0)$, $\hat{y}_\alpha(t_0)$ ubicados en la región circular de radio $R_c - \hat{r}_\alpha$ y centrada en el origen del plano xy .

Para una sucesión de tiempos $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_c}$, el conjunto $Q(t_k)$ representa las partículas de $Q(t_0)$ que han logrado atravesar las primeras k capas porosas. $Q(t_k)$ se obtiene mediante:

$$Q(t_k) = \bigcup_{\alpha \in \{1, \dots, N_Q\}} q_\alpha(t_k)$$

Cabe señalar, que la sucesión $\{q_\alpha(t_0), q_\alpha(t_1), \dots, q_\alpha(t_k)\}$, es la trayectoria de la partícula q_α a través de la estructura porosa. Al respecto, $q_\alpha(t_k)$ es determinado a continuación:

$$q_\alpha(t_k) = \Omega(q_\alpha(t_{k-1})) \quad (3.20)$$

Donde, $\Omega(q_\alpha(t_{k-1}))$ se define como:

Definición 3.24. *Función de propagación de partícula*

$$\Omega(q_\alpha(t_{k-1})) = \begin{cases} q_\alpha^*(t_{k-1}) & \text{si } \omega_I(q_\alpha(t_{k-1}), P_k, \hat{\theta}_k, \mu_-, \mu_+) = 1 \\ \emptyset & \text{en o.c} \end{cases}$$

A su vez, $q_\alpha^*(t_{k-1})$ viene dado por:

$$q_\alpha^*(t_{k-1}) = (\hat{x}_\alpha^*(t_{k-1}), \hat{y}_\alpha^*(t_{k-1}), \hat{z}_\alpha^*(t_{k-1}), \hat{r}_\alpha)$$

Donde:

- $\hat{x}_\alpha^*(t_{k-1}) = x_{i(\alpha,k),k} \cos(\hat{\theta}_k) - y_{i(\alpha,k),k} \sin(\hat{\theta}_k) + \rho_{\alpha,k} \sqrt{\nu_{\alpha,k}} \cos(2\pi \lambda_{\alpha,k})$
- $\hat{y}_\alpha^*(t_{k-1}) = x_{i(\alpha,k),k} \sin(\hat{\theta}_k) + y_{i(\alpha,k),k} \cos(\hat{\theta}_k) + \rho_{\alpha,k} \sqrt{\nu_{\alpha,k}} \sin(2\pi \lambda_{\alpha,k})$
- $\hat{z}_\alpha^*(t_{k-1}) = \hat{z}_\alpha(t_{k-1}) - \Delta h$

Los parámetros $\rho_{\alpha,k}$, $\hat{\theta}_k$, $\lambda_{\alpha,k}$ y $\nu_{\alpha,k}$, estos últimos dos generados mediante una distribución uniforme, se estiman mediante:

- $\rho_{\alpha,k} = r(\alpha, k) - \hat{r}_\alpha$
- $\nu_{\alpha,k} \sim U[0, 1]$
- $\lambda_{\alpha,k} \sim U[0, 1]$
- $\hat{\theta}_k = \sum_{m=1}^{k-1} \theta_{m,m+1}$

El parámetro $\hat{\theta}_k$ considera la rotación total que tiene la capa porosa P_k en relación al sistema de referencia, cabe recordar que el ángulo de rotación entre capas porosas consecutivas es relativo a la posición de una con respecto a la otra, por lo cual, las rotaciones se acumulan desde la primera capa porosa P_1 hasta la capa P_k .

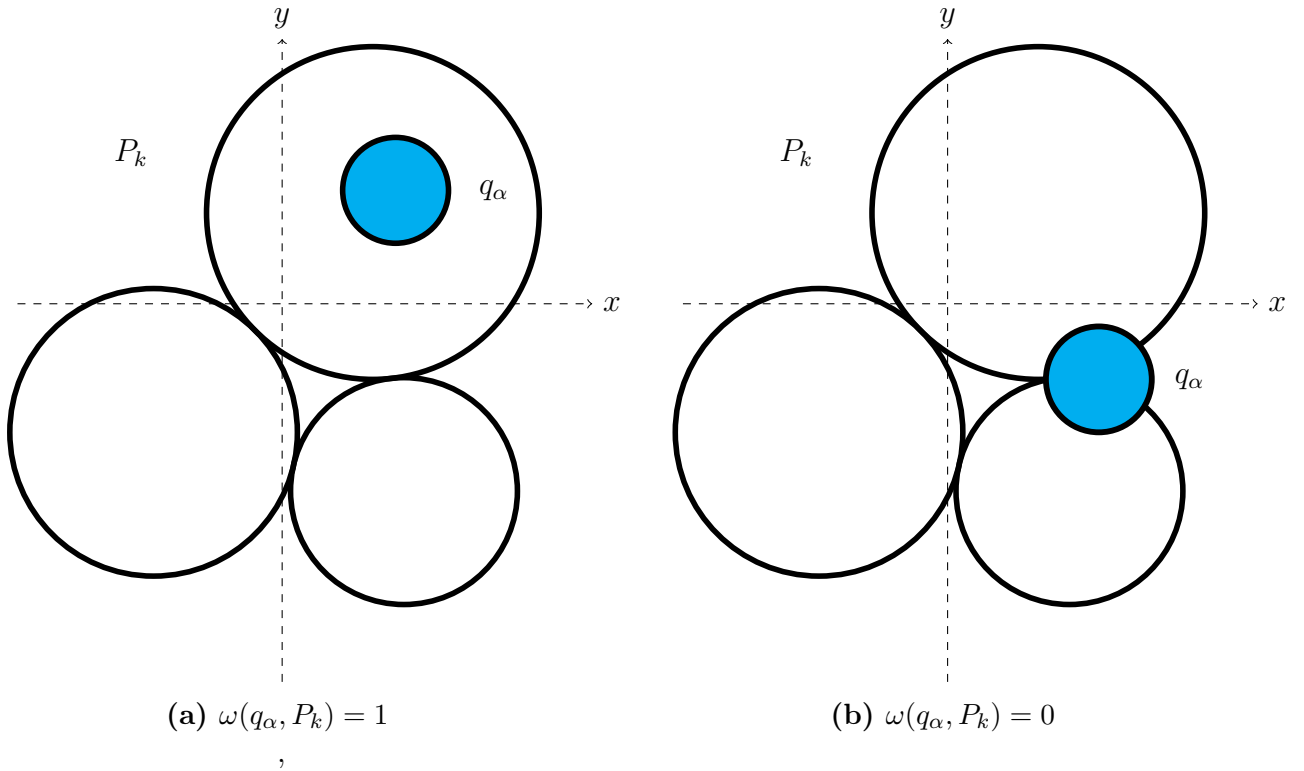


Figura 3.11: Cálculo de la función $\omega(q_\alpha, P_k)$.

En referencia a la actualización de las coordenadas de la partícula q_α para cada tiempo t_k , las expresiones $\hat{x}_\alpha^*(t_{k-1})$ y $\hat{y}_\alpha^*(t_{k-1})$ incorporan la delimitación del poro $p_{i,k}$ sobre la trayectoria de la partícula q_α , pues el parámetro $\rho_{\alpha,k}$ junto con el ángulo $2\pi\lambda_{\alpha,k}$ determinan la ubicación del centro de q_α en la región de $p_{i,k}$ que no implique q_α ha atravesado, ya sea parcial o totalmente las paredes del poro. Además, que las capas estén inmediatamente una después de la otra, determina los poros por los cuales puede circular q_α en la siguiente

capa porosa consecutiva [19], es decir, una vez que esta ha atravesado la capa P_k no puede aleatoriamente aparecer en un punto cualquiera de la siguiente capa, sino, que se mueve por uno de los caminos descritos mediante las entradas de la matrices de conexión $M_c(P_k, P_{k+1}, \theta_{k,k+1}, \mu_-, \mu_+)$. En caso de que se apliquen umbrales radiales μ_- y μ_+ a los poros, el desplazamiento de q_α queda condicionado al valor de ω_I . El factor $\sqrt{\nu_{\alpha,k}}$ garantiza que la densidad de probabilidad de los puntos, donde puede colocarse el centro de la partícula q_α se mantenga constante [14].

Adicionalmente, $\widehat{z}_\alpha^*(t_{k-1})$ representa el movimiento vertical descendente de q_α de la capa P_{k-1} hacia la capa P_k , que es equivalente a decir que la partícula no ha sido capturada y se mueve a través de la estructura porosa.

Conforme a lo expuesto anteriormente, la eficiencia de la estructura porosa o medio filtrante viene dado por:

Definición 3.25. *Eficiencia:*

$$\eta = 1 - \frac{|Q(t_{N_c})|}{|Q(t_0)|}$$

El algoritmo para simular el proceso de filtrado y el cálculo de la eficiencia η se define a continuación:

Algoritmo 2 Filtración de N_Q partículas a través de N_c capas

Entrada: Conjunto de partículas $Q(t_0)$, capas $\{P_k\}_{k=1}^{N_c}$, μ_- , μ_+

```

1: para todo  $q_\alpha \in Q(t_0)$  hacer
2:    $k \leftarrow 1$ 
3:   mientras  $k \leq N_c$  and  $q_\alpha \neq \emptyset$  hacer
4:     si  $\omega_I(q_\alpha, P_k, \widehat{\theta}_k, \mu_-, \mu_+) = 1$  entonces
5:       Actualizar  $q_\alpha \leftarrow q_\alpha^*$  según (3.20)
6:        $k \leftarrow k + 1$ 
7:     si no
8:        $q_\alpha \leftarrow \emptyset$  ▷ Partícula capturada
9:       Verificar poros obstruidos.
10:    fin si
11:  fin mientras
12: fin para
Salida:  $Q(t_{N_c}) = \{q_\alpha \neq \emptyset\}$ 
Eficiencia:  $\eta = 1 - \frac{|Q(t_{N_c})|}{|Q(t_0)|}$ 

```

Capítulo 4

Análisis de Resultados

En el Capítulo anterior se desarrolló el análisis entorno a factores que tienen una incidencia directa sobre la estimación de la Característica de Poincaré-Euler para las estructuras porosas consideradas en este trabajo. Mediante la aplicación del método *sectorización de capas* se obtuvieron los resultados del cálculo de χ , considerando solamente el efecto del ángulo de rotación, para posteriormente incluir en dichos resultados la afectación debida a los *umbrales radiales*. Los cálculos se realizaron para capas porosas de diferente radio R_c , y en cuanto al tamaño de los poros, se utilizó la distribución de radios descrita en el trabajo de Duarte-2022 [7]. De veinte (20) capas simuladas, se seleccionaron aleatoriamente dos capas para generar los gráficos de dispersión, asimismo, para los gráficos de distribución del número de poros respecto al número de conexiones y, de la conectividad cuantificada mediante χ en función del número de conexiones de las capas consideradas. Referente al cálculo de la conectividad para estructuras porosas compuestas de veinte (20) capas, se realizaron gráficos de densidad, de los cuales se identificó la relación entre el valor de R_c y la geometría de la curva de densidad de la variable χ . El Capítulo finaliza con la simulación del flujo de partículas a través de bicapas, y se describe la relación entre la conectividad y la eficiencia de los medios filtrantes simulados.

4.1. Conectividad de Bicapas con Umbrales Radiales

Con el propósito de observar el nivel de incidencia de los umbrales radiales en la estimación de la conectividad, se determinó el valor de la Característica de Poincaré-Euler considerando umbrales radiales, con los siguientes intervalos: $I =]0\mu m, 6\mu m]$, $I =]0\mu m, 8\mu m]$, $I =]0\mu m, 10\mu m]$ y $I =]0\mu m, 12\mu m]$ para bicapas de radio $R_c = 250\mu m$, $R_c = 320\mu m$, $R_c = 400\mu m$ y $R_c = 450\mu m$. Se estimó el valor de la χ , para trescientos valores del ángulo de rotación θ en el intervalo de $[0, 2\pi]$.

4.1.1. Gráficos de Dispersión para $\chi(P_k, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ en función del ángulo de rotación θ .

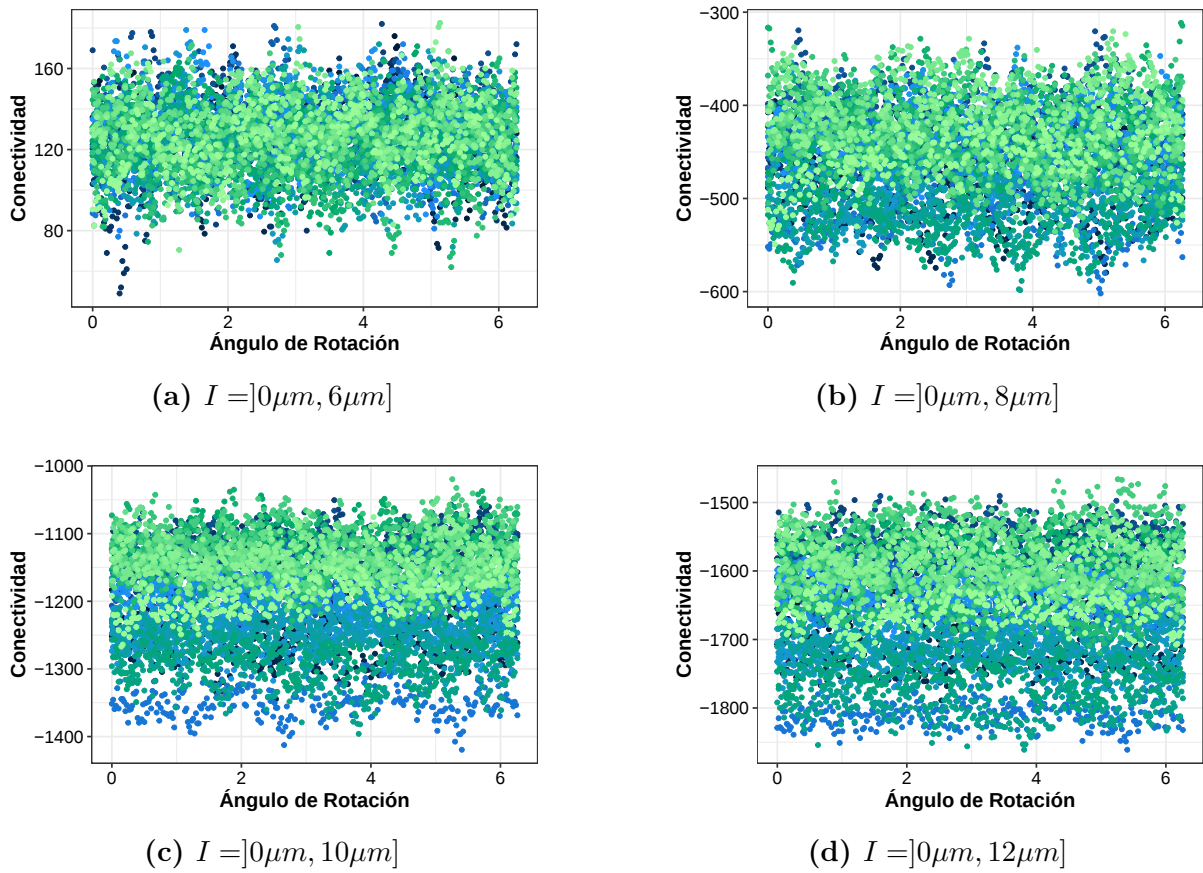


Figura 4.1: Gráficos de dispersión para $R_c = 250\mu m$.

La **Figura 4.1** muestra una banda de valores χ en el intervalo de $[0, 2\pi]$, es decir la distribución de puntos no exhibe cambios significativos para una variación del ángulo de rotación θ . No obstante, la banda de valores para χ se desplaza conforme el valor de

umbral radial μ_+ toma valores cada vez mayores, es decir, el valor de χ está fuertemente condicionado a la disposición de los poros que pueden mantener una conexión con los poros de la siguiente capa.

Un comportamiento similar a lo antes expuesto puede verificarse en la **Figura 4.2**, sin embargo, los límites para los valores de χ son diferentes, lo que sugiere que a mayor radio R_c para las capas porosas, más conexiones se dan entre las mismas, así también, cuando el número de poros disponibles para formar conexiones disminuye el valor de la conectividad χ toma valores cada vez más positivos como se observa en la **Figura 4.2a** en relación a la **Figura 4.2b**.

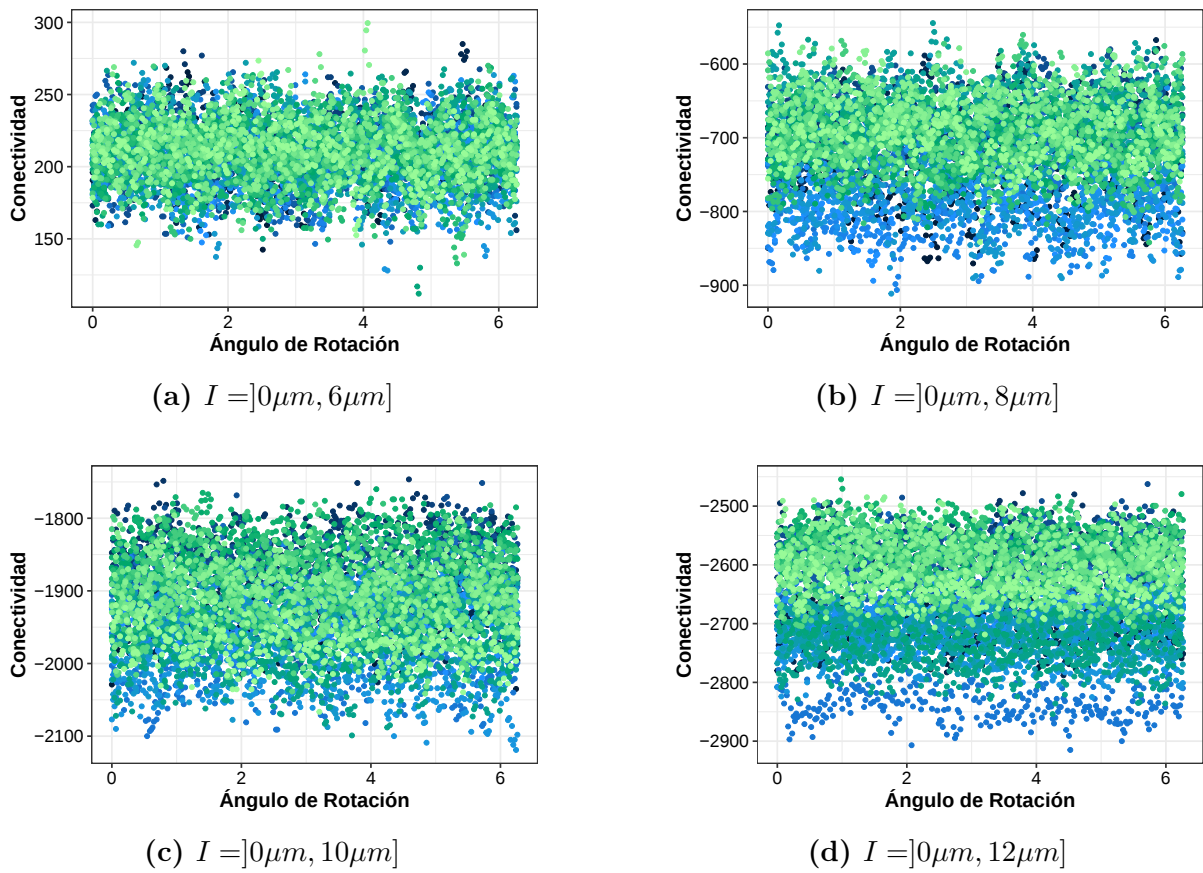
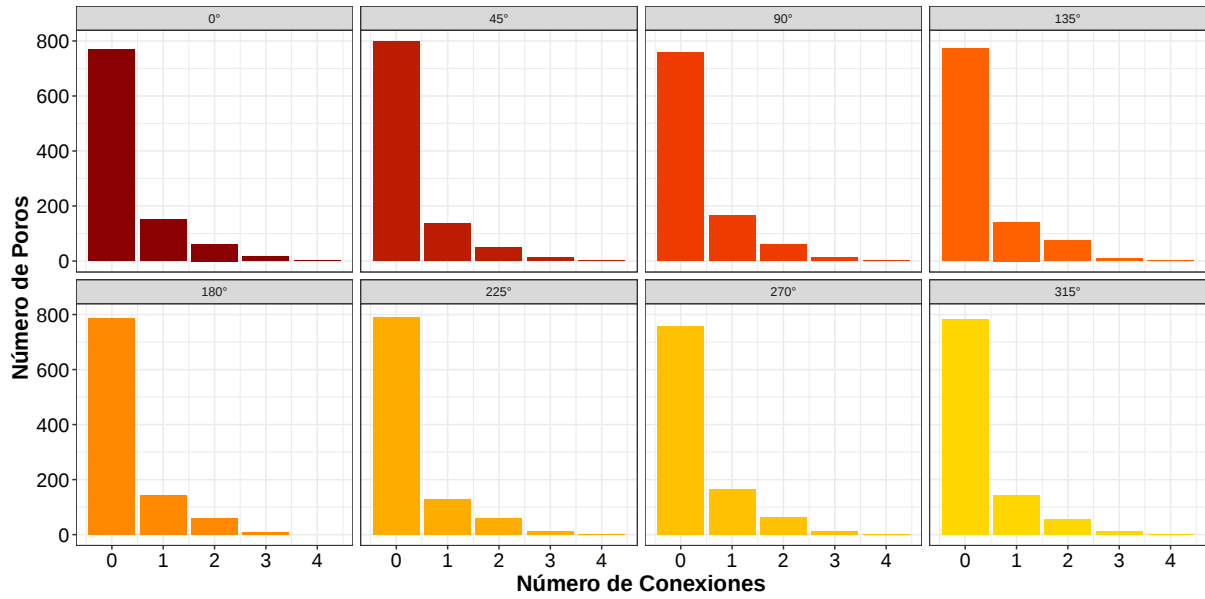


Figura 4.2: Gráficos de dispersión para $R_c = 320\mu m$.

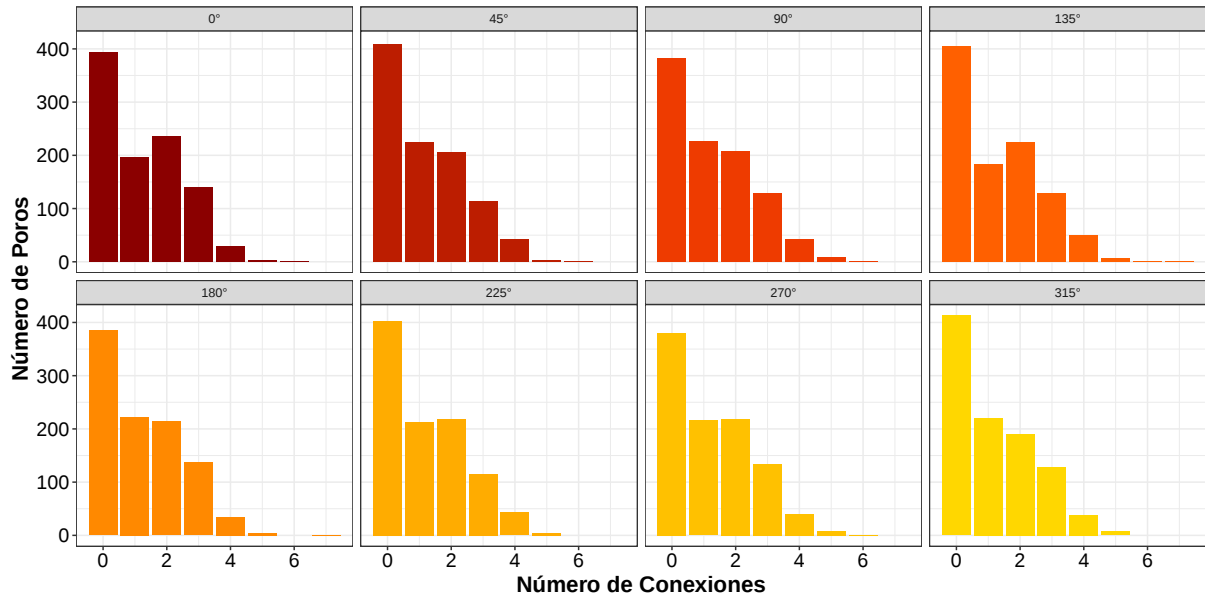
El número de conexiones de un poro $p_{i,k}$ de la capa P_k se ve afectado naturalmente por los umbrales radiales. Cabe señalar que dicho valor viene dado por la *función de conexión Poro-Capa con umbrales radiales*, $\hat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$ y cuyo comportamiento se explora en la sección siguiente.

4.1.2. Densidades de Conexión para $\hat{f}_I(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta, \mu_-, \mu_+)$

Se seleccionaron aleatoriamente dos capas porosas de radio $R_c = 250\mu m$, P_1 y P_2 . Al estimar la matriz de conexión correspondiente a ambas capas, $M_c(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$, para diferentes ángulos de rotación θ , se obtuvo el número de poros de la capa P_1 que mantenían un número específico de conexiones con la capa P_2 , tal como se ilustran en las **Figuras 4.3 a la 4.8**.



(a) $I =]0\mu m, 6\mu m]$

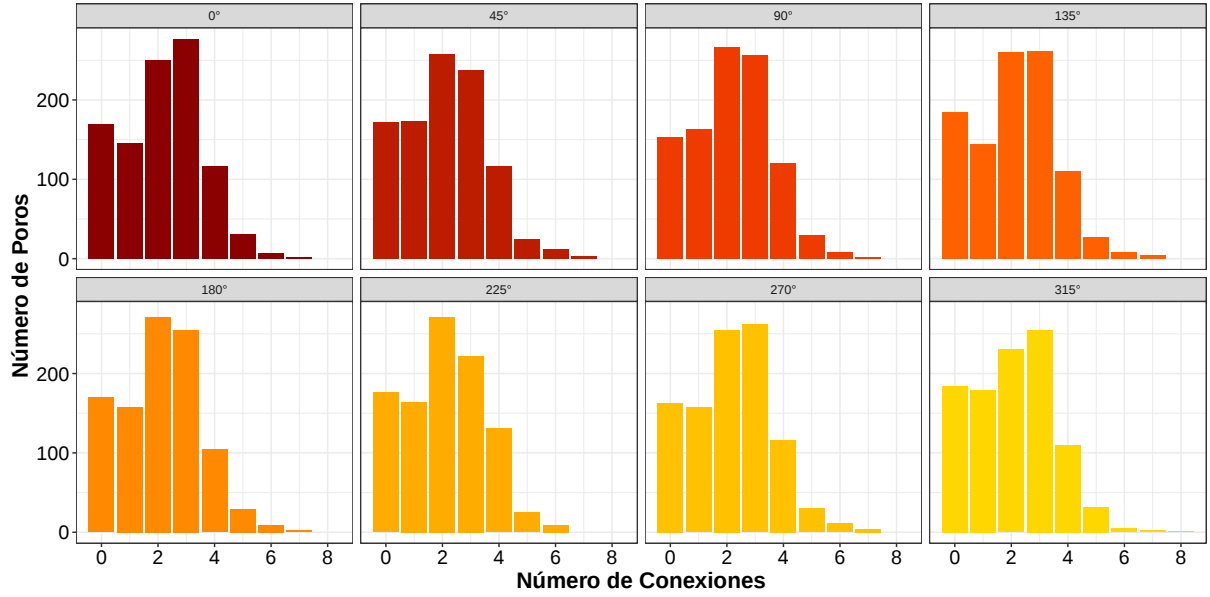


(b) $I =]0\mu m, 8\mu m]$

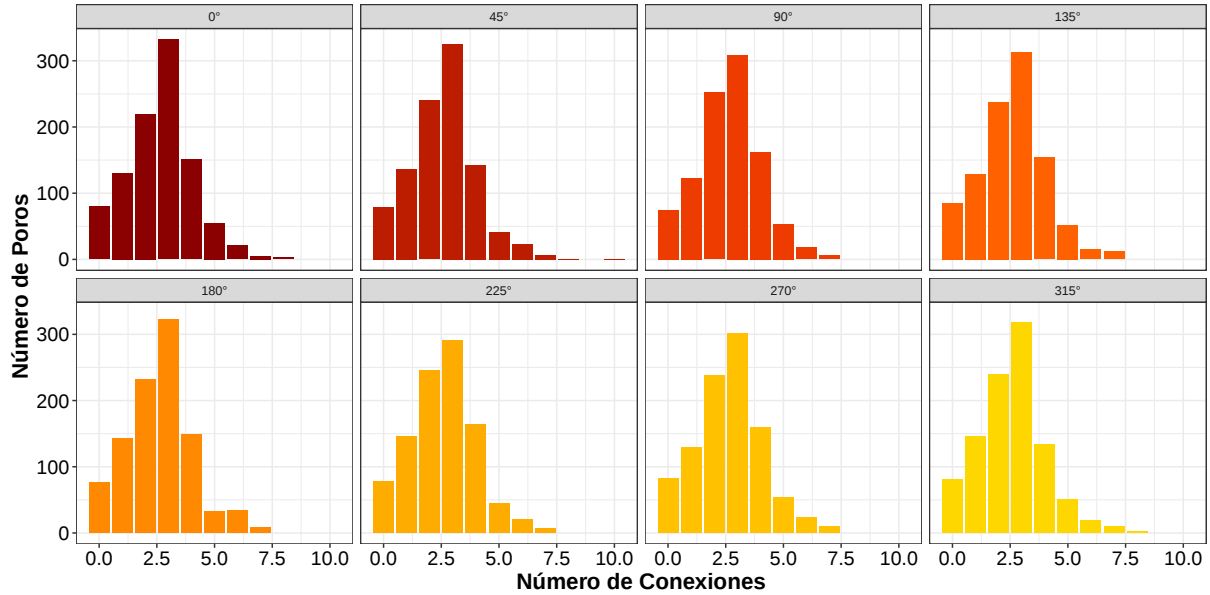
Figura 4.3: Distribución del número de poros para $R_c = 250\mu m$.

Cabe señalar que para los umbrales radiales, se tomó $\mu_- = 0$, así, μ_+ es el parámetro que determina que poros de ambas capas están habilitados para conectarse. Para un poro $p_{i,1}$, el número de conexiones que posee con la capa P_2 se determinará mediante:

$$\hat{f}_I(p_{i,1}, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+) = \sum_{j=1}^{N_2} M_c(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)_{ij} \quad (4.1)$$



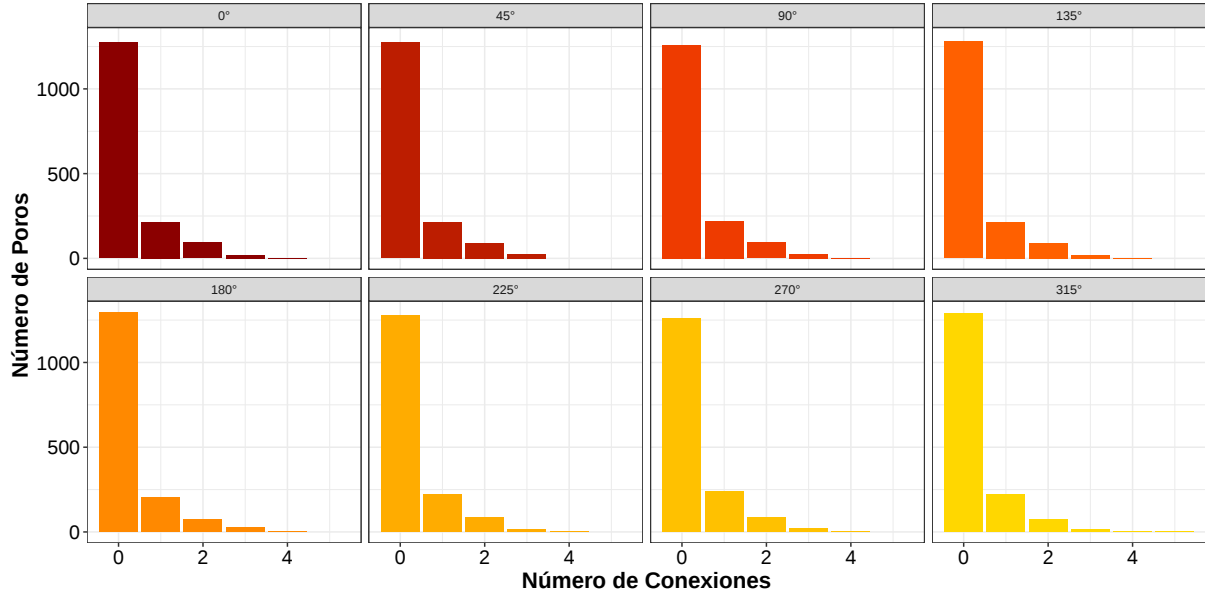
(a) $I =]0\mu m, 10\mu m]$



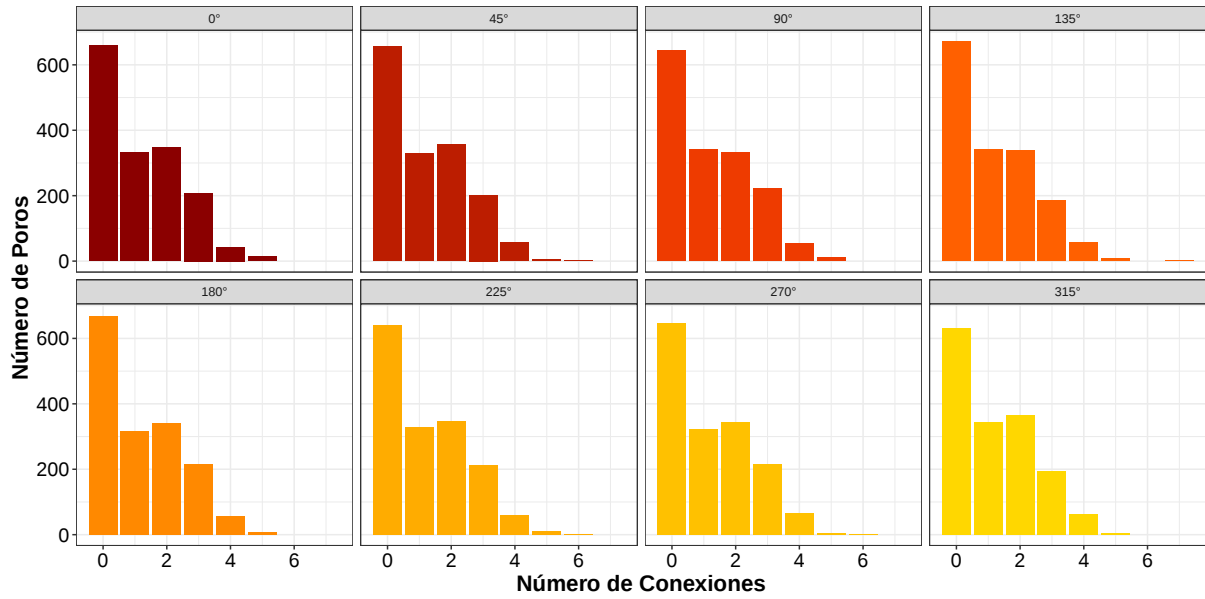
(b) $I =]0\mu m, 12\mu m]$

Figura 4.4: Distribución del número de poros para $R_c = 250\mu m$ con $I =]0\mu m, 10\mu m]$ e $I =]0\mu m, 12\mu m]$.

El ejercicio anterior puede replicarse para capas porosas con $R_c = 320\mu m$. Debido al incremento en el radio R_c , el número de poros que no tienen conexión se incrementa significativamente en comparación a lo observado para la bicapa con $R_c = 250\mu m$, tal como se observa a continuación:



(a) $I =]0\mu m, 6\mu m]$

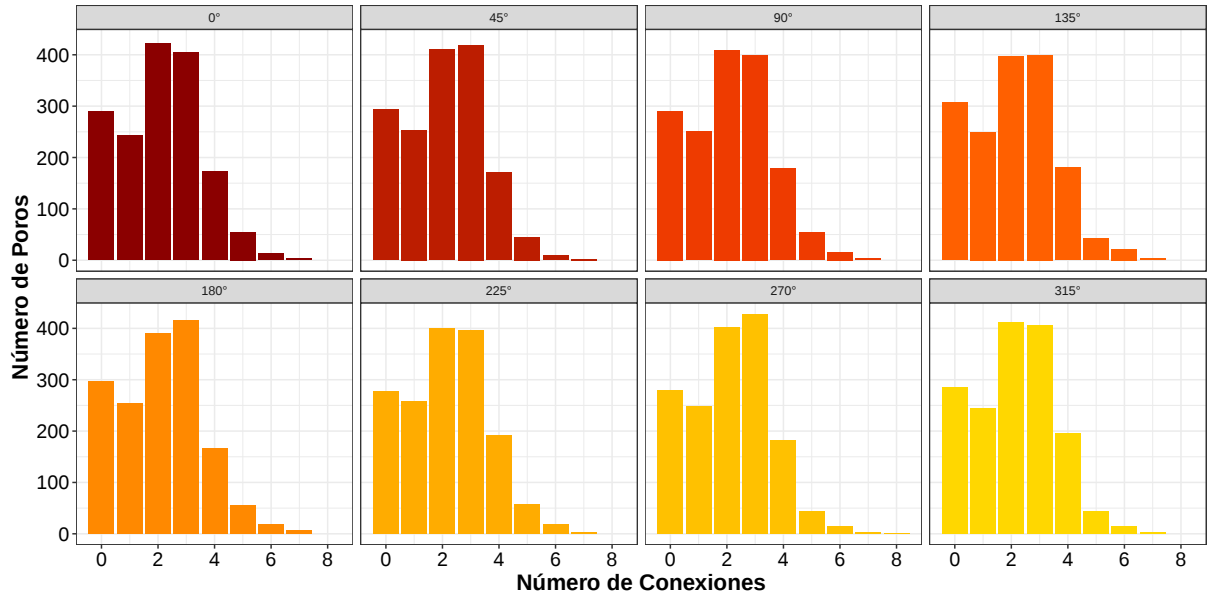


(b) $I =]0\mu m, 8\mu m]$

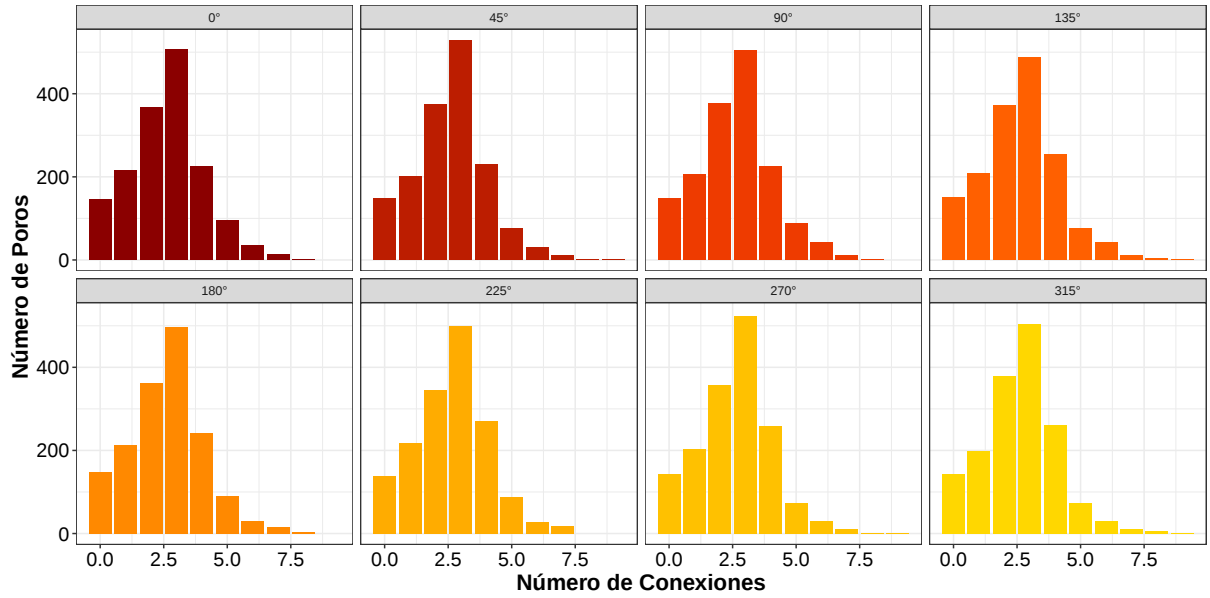
Figura 4.5: Distribución del número de poros para $R_c = 320\mu m$ con $I =]0\mu m, 6\mu m]$ e $I =]0\mu m, 8\mu m]$.

Al igual que con los poros de las capas con $R_c = 250\mu m$, la distribución del número de poros con respecto al número de conexiones tiende a mantenerse para los ángulos de rotación considerados. De esto se puede inferir que los umbrales radiales son los factores

que mayor efecto tienen en la topología del espacio poroso.



(a) $I =]0\mu m, 10\mu m]$



(b) $I =]0\mu m, 12\mu m]$

Figura 4.6: Distribución del número de poros para $R_c = 320\mu m$ con $I =]0\mu m, 10\mu m]$ e $I =]0\mu m, 12\mu m]$.

La aseveración anterior se sigue cumpliendo para las bicapas de radio $R_c = 400\mu m$ y $R_c = 450\mu m$.

La **Figura 4.7** muestra el efecto de los umbrales radiales sobre el número de poros de la capa P_1 que se habilitan para conectarse con los poros de la capa P_2 . De nuevo, debido a que R_c es mayor, la proporción de poros de mantener un número determinado de conexiones aumenta. Cabe mencionar, que las formas de las distribuciones se mantiene

para las capas previamente analizadas.

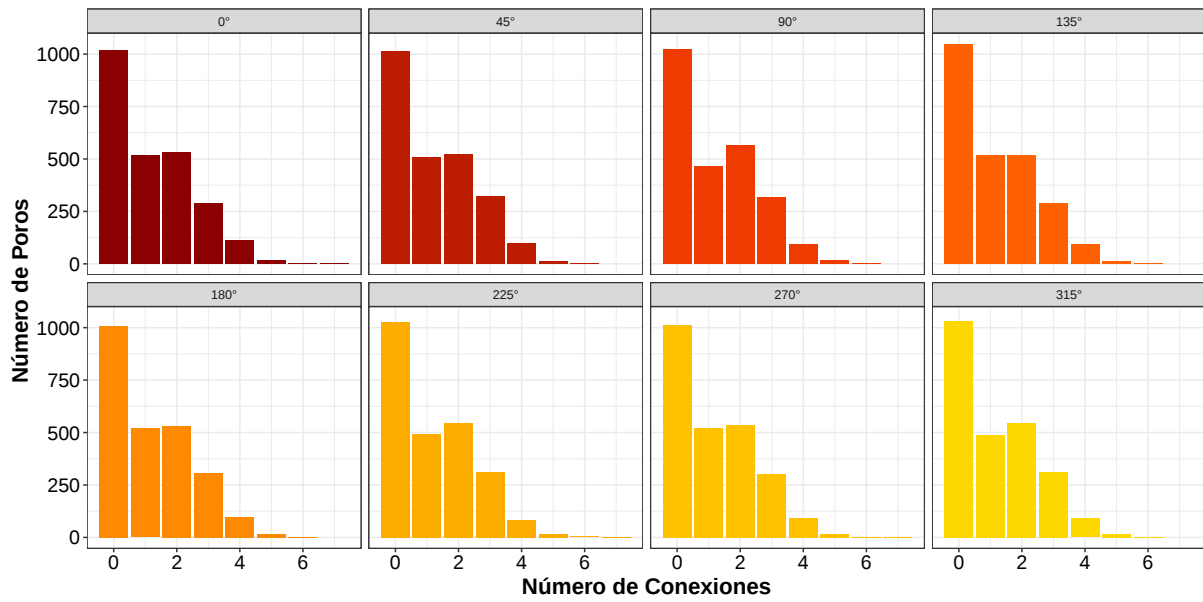
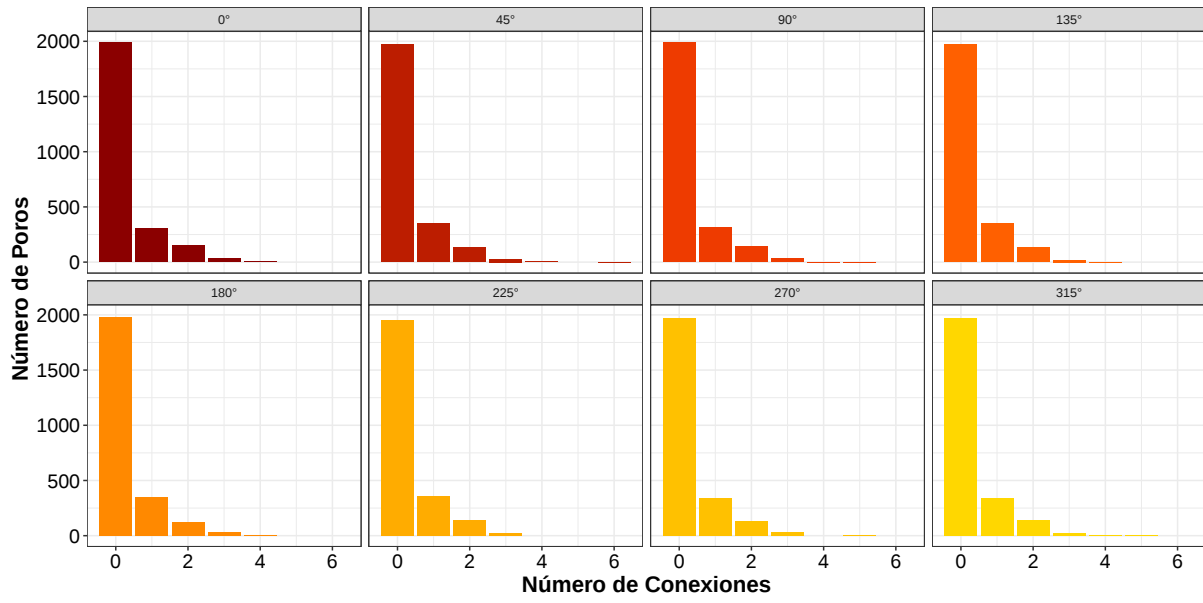
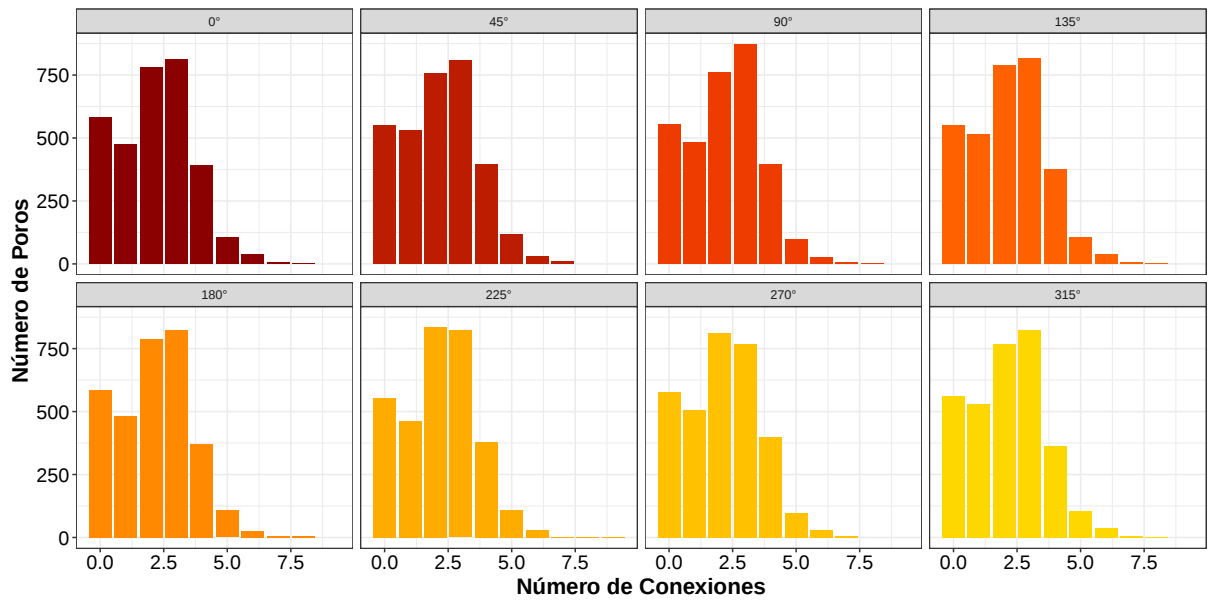
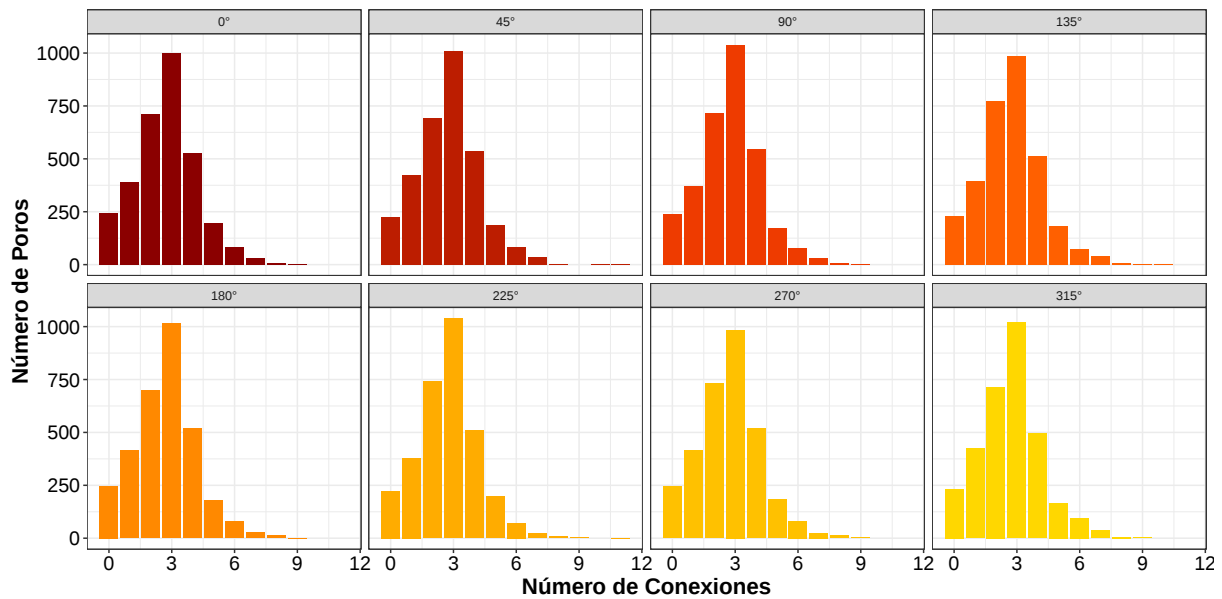


Figura 4.7: Distribución del número de poros para capas de radio $R = 400\mu m$ con $I =]0\mu m, 6\mu m]$, $I =]0\mu m, 8\mu m]$.

El efecto de los umbrales $I =]0\mu m, 10\mu m]$ y $I =]0\mu m, 12\mu m]$ en las conexiones de la capa $R_c = 450\mu m$ se observa a continuación:



(a) $I =]0\mu m, 10\mu m]$



(b) $I =]0\mu m, 12\mu m]$

Figura 4.8: Distribución del número de poros para capas de radio $R = 450\mu m$ con $I =]0\mu m, 10\mu m]$, $I =]0\mu m, 12\mu m]$.

4.1.3. Conectividad y conexiones

Al obtener la matriz de conexión $M_c(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$ de las capas porosas de radio $R_c = 250\mu m$, se comparó el comportamiento de χ en relación al número de conexiones entre las capas, $\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$, para 100 puntos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

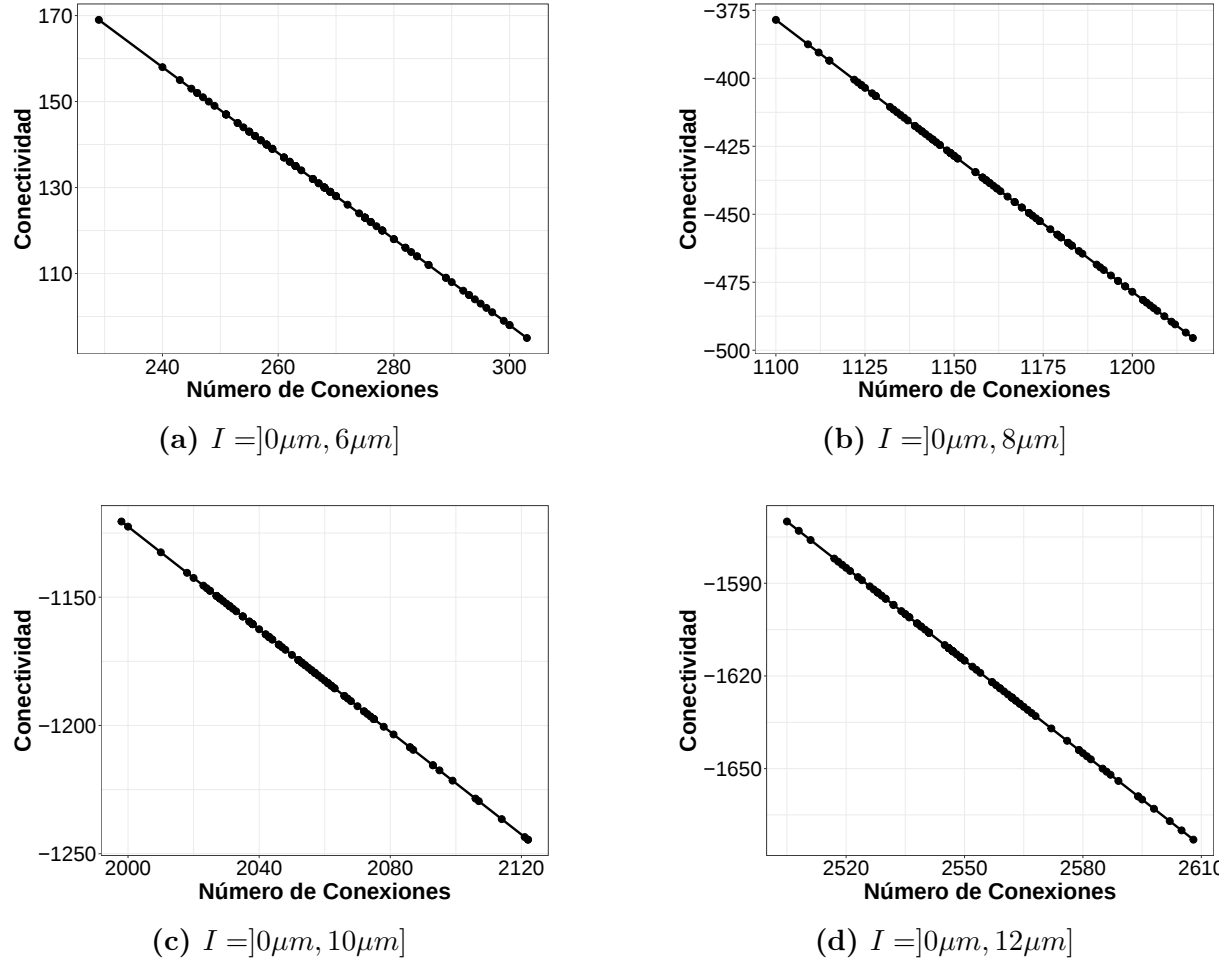


Figura 4.9: Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 250\mu m$.

Tabla 4.1: Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 250\mu m$.

Umbrales (μm)	Mínima Conectividad			Máxima Conectividad		
	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ
$]0, 6]$	169	229	3.0788	95	303	3.5186
$]0, 8]$	-378.5	1100	1.1310	-495.5	1217	4.9009
$]0, 10]$	-1120.5	1998	0.1885	-1244.5	2122	0.5027
$]0, 12]$	-1570	2505	1.8850	-1673	2608	5.4035

Se replicó el ejercicio anterior para capas porosas con radio $R_c = 320\mu m$. En la **Figura 4.10** se observa que conforme el número de conexiones crece, la conectividad de las capas disminuye. Es posible identificar el efecto de los umbrales radiales en el comportamiento de χ para estas capas. Conforme el intervalo $I =]\mu_-, \mu_+]$ abarca un mayor rango de valores, se habilitan un mayor número de poros que pueden mantener conexiones con los poros de la capa siguiente. Esto puede verificarse en la **Tabla 4.2**.

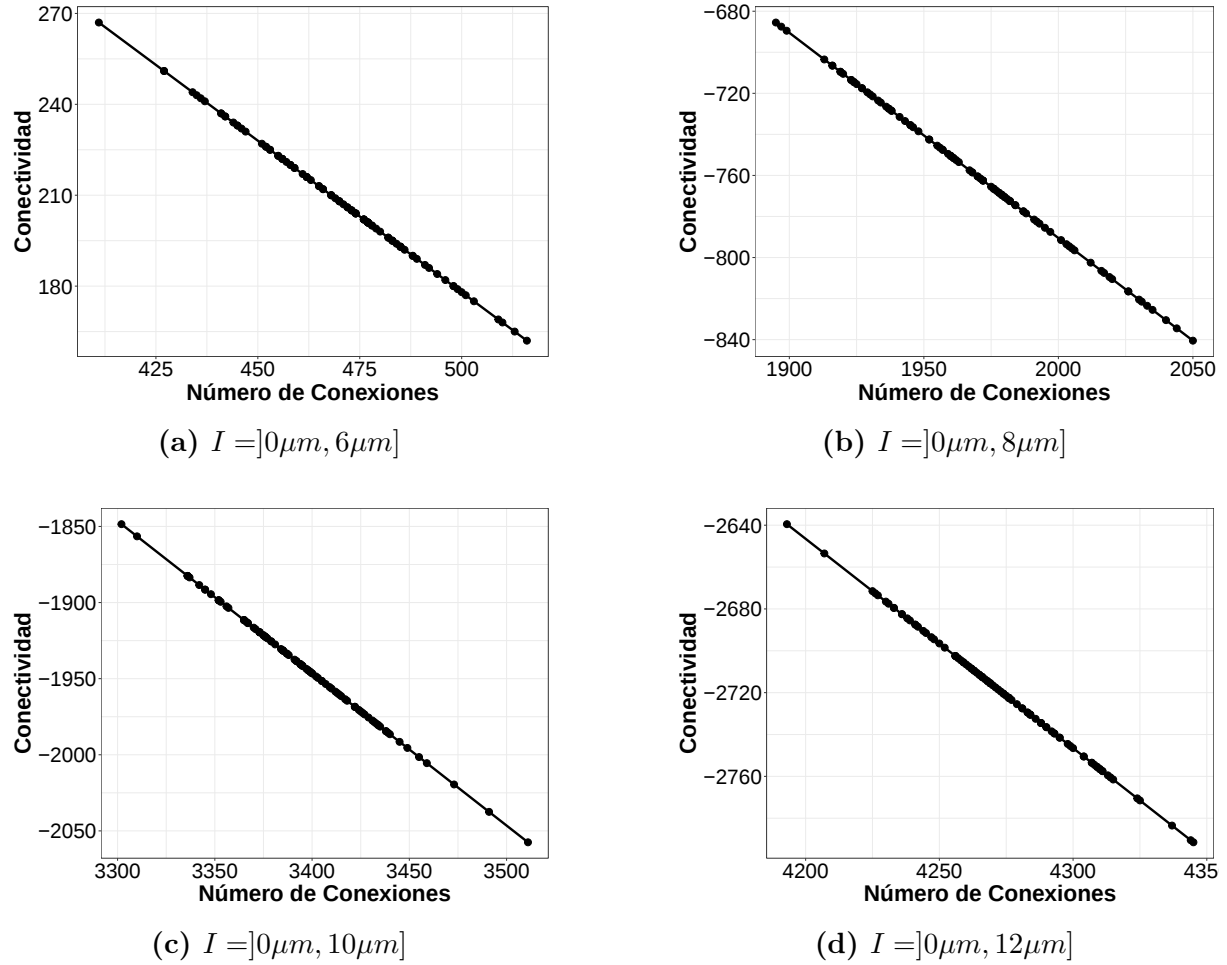


Figura 4.10: Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 320\mu m$.

Tabla 4.2: Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 320\mu m$.

Umbrales (μm)	Mínima Conectividad			Máxima Conectividad		
	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ
$]0, 6]$	267.0	411	0.3142	162.0	516	2.0735
$]0, 8]$	-685.5	1895	5.1522	-840.5	2 050	4.0841
$]0, 10]$	-1 848.5	3 302	1.0053	-2 057.5	3 511	5.6549
$]0, 12]$	-2 639.5	4 193	0	-2 791.5	4 345	4.7752

El comportamiento de la conectividad frente al número de conexiones para una bicapa de radio $R_c = 400\mu m$ se expone en la **Figura 4.11**. Los límites obtenidos para χ en relación a la aplicación de umbrales radiales se observa en la **Tabla 4.3**.

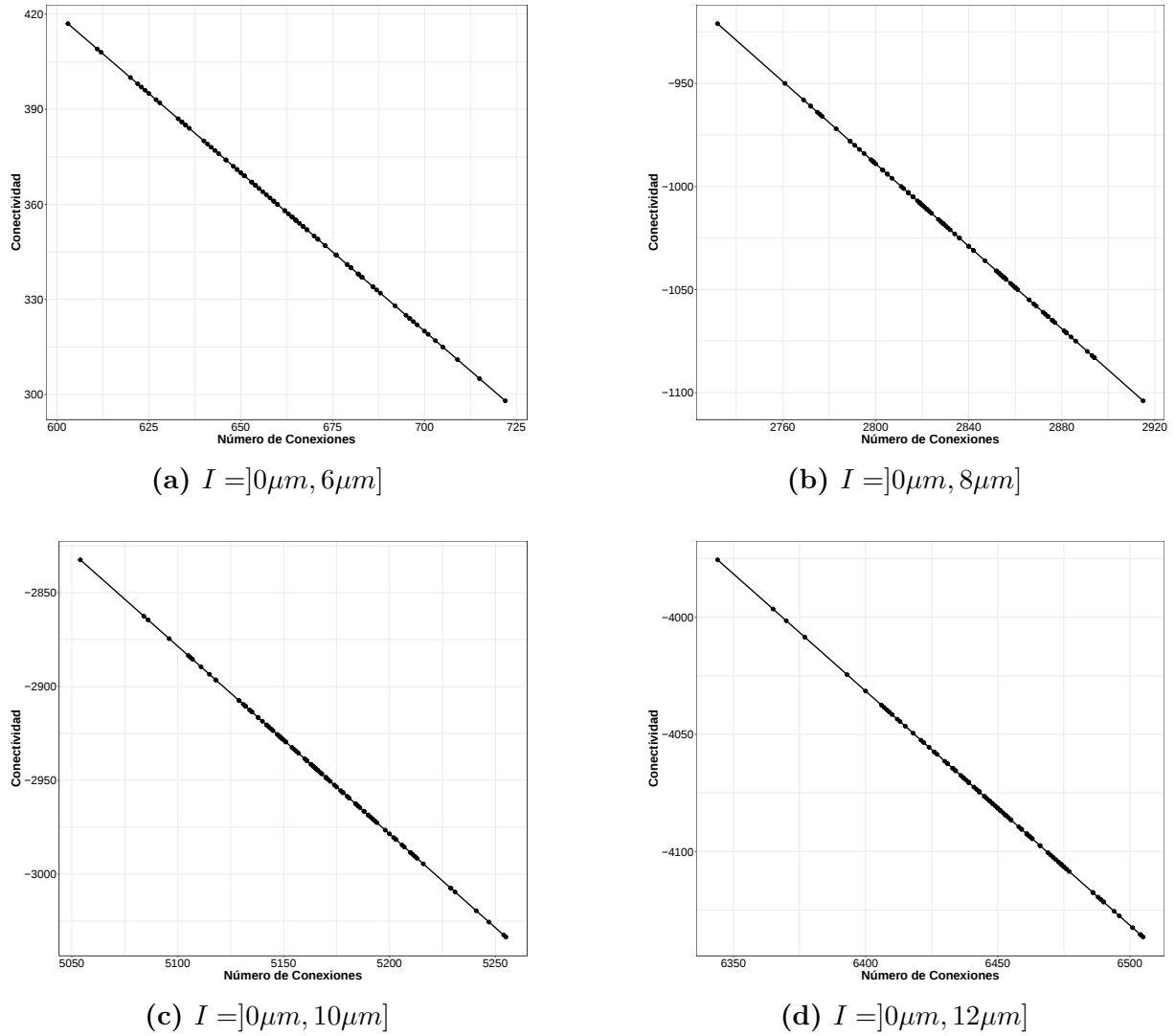


Figura 4.11: Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 400\mu m$.

Tabla 4.3: Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 400\mu m$.

Umbrales (μm)	Mínima Conectividad			Máxima Conectividad		
	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ
$]0,6]$	417.0	603	0.4398	298.0	722	0.19
$]0,8]$	-921.0	2 732	4.08	-1 104.0	2 915	2.70
$]0,10]$	-2 832.5	5 054	1.00	-3 033.5	5 255	0.31
$]0,12]$	-3 975.5	6 344	0.00	-4 136.5	6 505	3.58

Los resultados obtenidos para una bicapa con $R_c = 450\mu m$ se exponen en la **Figura 4.12** y en la **Tabla 4.4**.

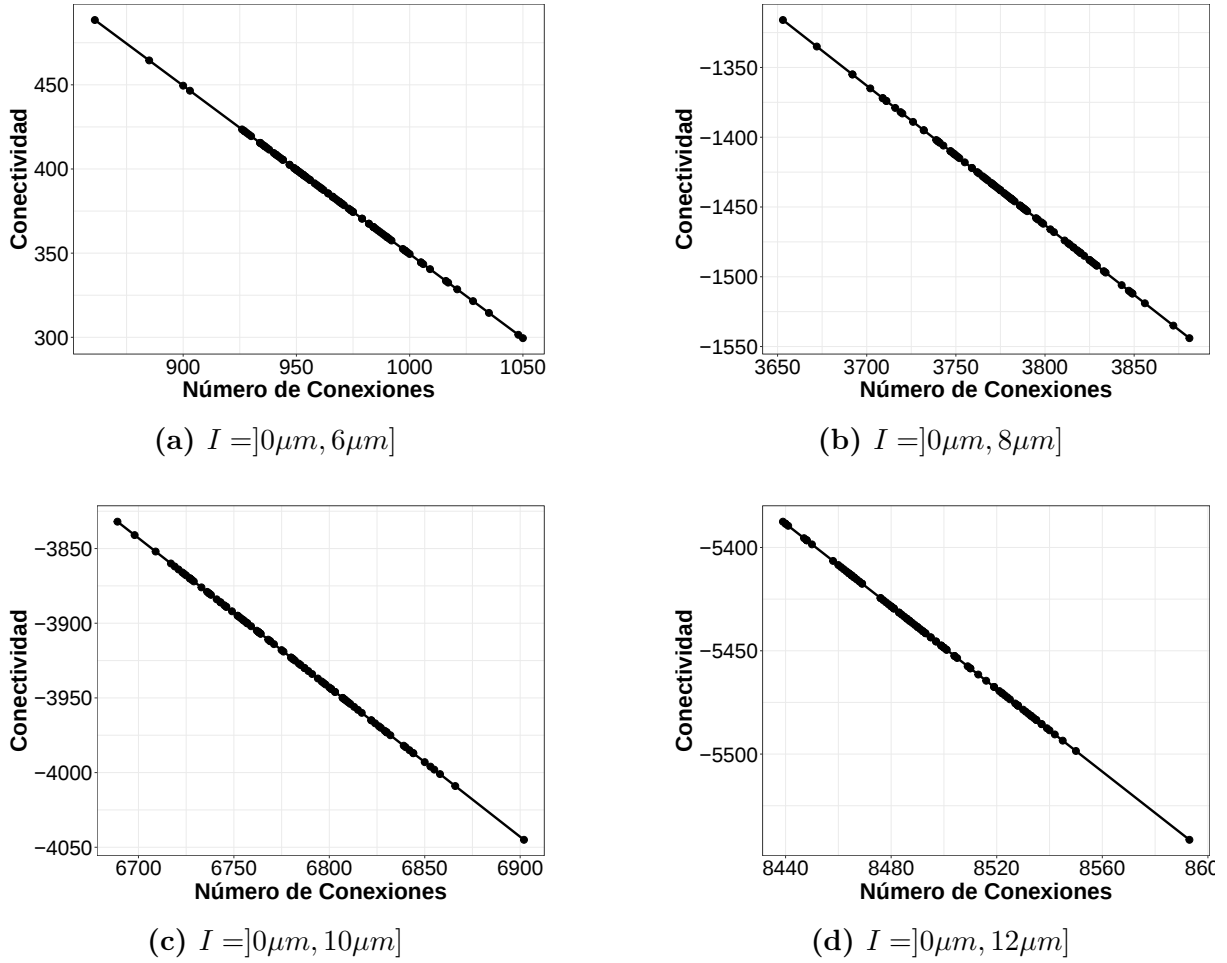


Figura 4.12: Conectividad en función del número de conexiones para $R_c = 450\mu m$.

Tabla 4.4: Resumen de conectividad mínima y máxima para $R_c = 450\mu m$.

Umbrales (μm)	Mínima Conectividad			Máxima Conectividad		
	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ	χ	$\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$	θ
$]0,6]$	488.5	861	2.3876	299.5	1 050	0.1885
$]0,8]$	-1 316.0	3 653	2.0735	-1 544.0	3 881	2.2619
$]0,10]$	-3 832.0	6 689	5.5920	-4 045.0	6 902	3.3929
$]0,12]$	-5 387.5	8 439	5.9062	-5 541.5	8 593	3.3929

La conectividad de cada bicapa está determinada por la cantidad de objetos que pueden formar conexiones entre si, en este caso los poros que las conforman.

En el Capítulo 2 se expresó que la Característica de Poincaré-Euler tomaba valores cada vez más negativos conforme el número de caminos o conexiones redundantes aumentaba

y superaba la cantidad de objetos (poros en este caso) identificados en cada sección consecutiva, lo cual se comprueba con los valores obtenidos de $\tilde{f}_I(P_1, P_2, \theta, \mu_-, \mu_+)$ de las capas consideradas en este análisis, que conforme aumentan el valor de la conectividad tiende a ser más negativo.

4.2. Conectividad de Bicapas

Se seleccionaron parejas de capas aleatoriamente. Se obtuvo el valor de la conectividad de dichas parejas de capas, para diferentes valores del ángulo de rotación θ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Los resultados obtenidos se muestran en las secciones siguientes:

4.2.1. Gráficos de dispersión en función del ángulo de rotación.

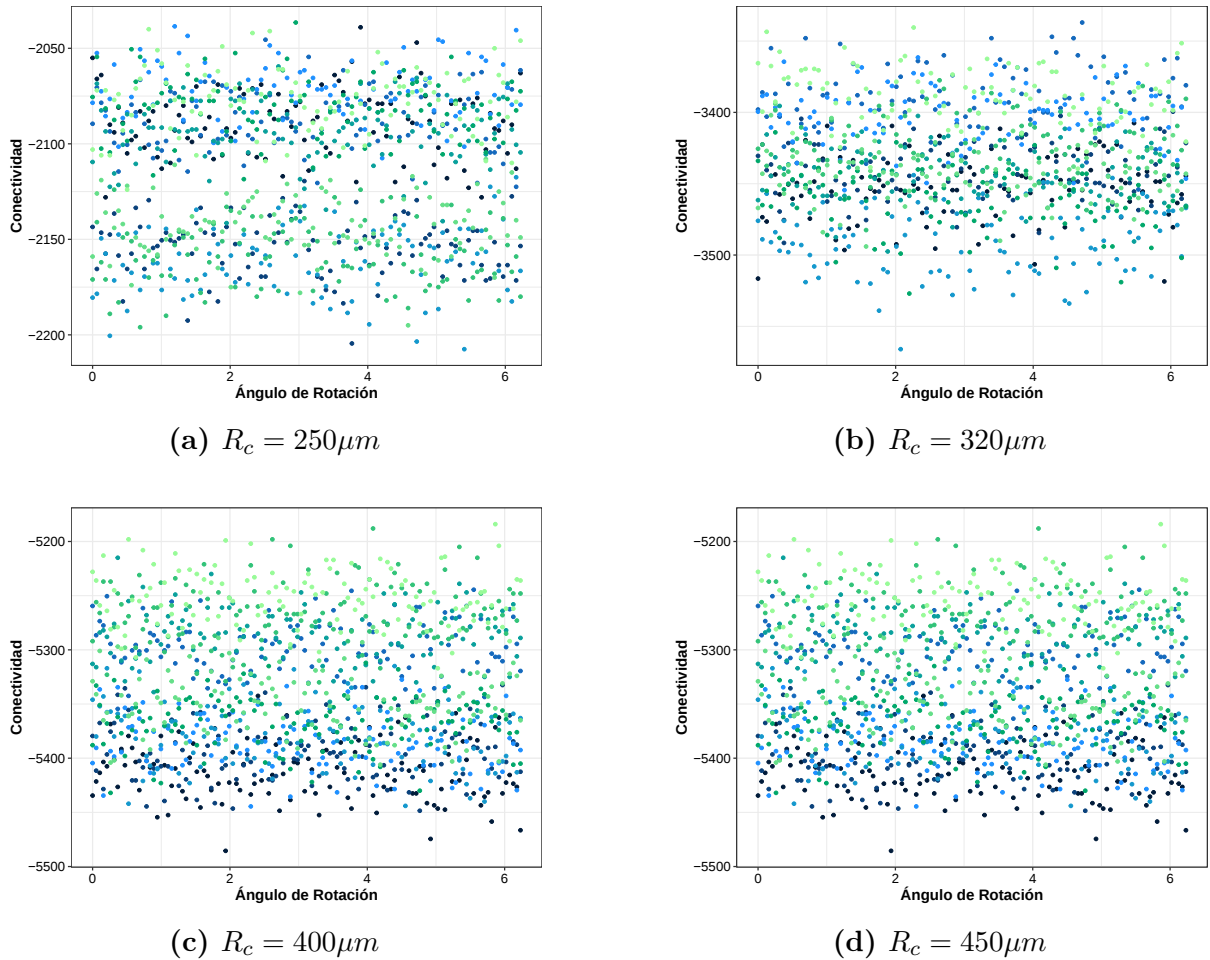


Figura 4.13: Gráficos de dispersión para diferentes valores de R_c y ángulos de rotación θ .

4.2.2. Distribución del número de poros según el valor de $\hat{f}(p_{i,k}, P_{k+1}, \theta)$.

Las estimaciones del número de conexiones de cada poro, para las parejas de capas porosas consideradas, se realizó sin considerar el supuesto de que una porción de ellos estuvieran obstruidos, tal como se realizó en la sección previa. Cada poro está habilitado para formar conexiones con los poros de la capa siguiente.

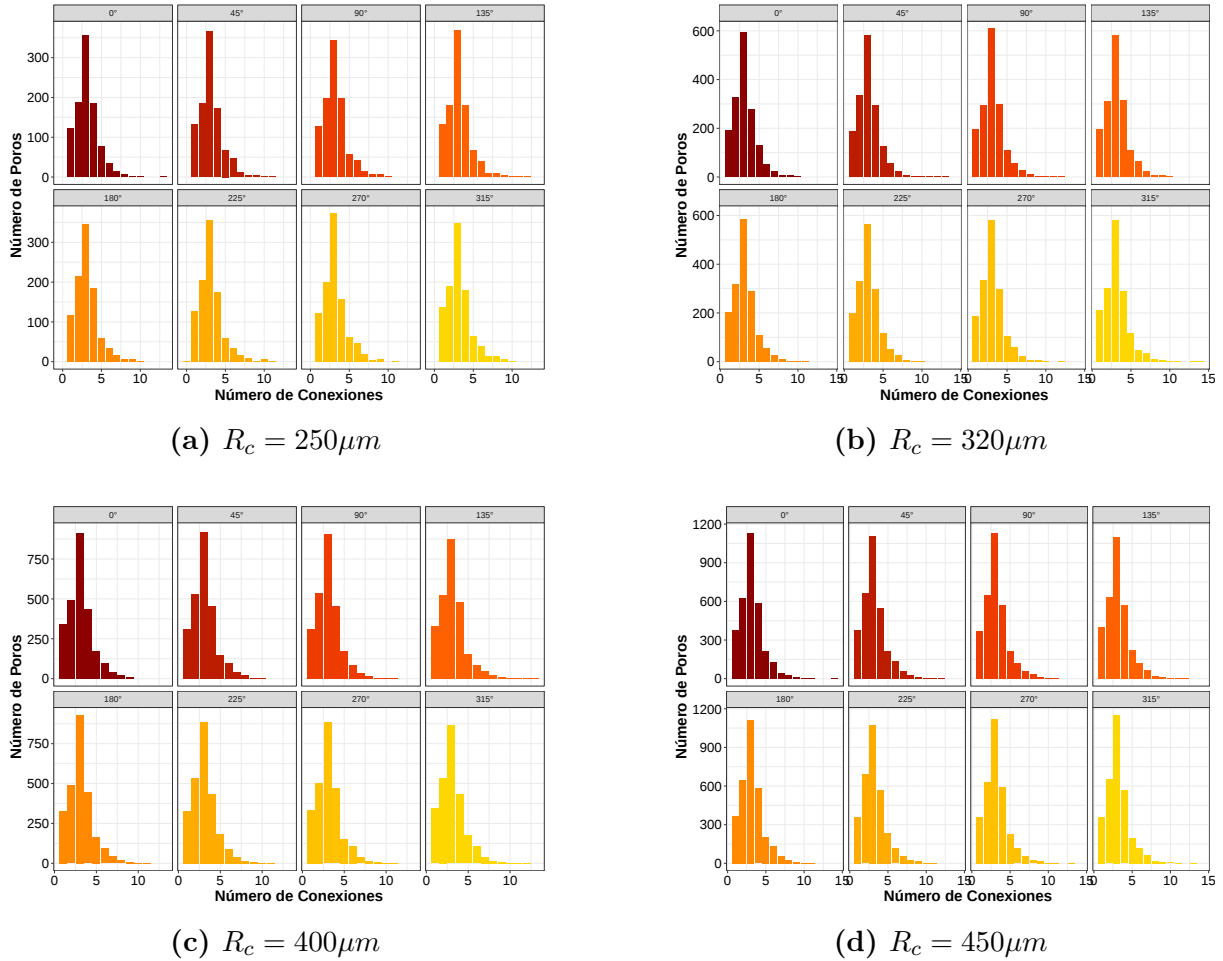


Figura 4.14: Distribución del número de conexiones de un poro para diferentes valores de R_c y ángulos de rotación θ .

Tal como se pudo identificar en las gráficas de distribución del número de poros por número de conexiones de la sección anterior, la forma de dichas distribuciones se mantiene frente a la variación del ángulo de rotación θ . Para las distribuciones de la **Figura 4.14**, el número de conexiones es mayor a las obtenidas aplicando los umbrales radiales, lo cual ilustra empíricamente lo establecido en el **Corolario 3.1**.

4.3. Estructuras Porosas

En [19] se establece que con veinte (20) secciones seriales de una muestra de material, en este caso del medio filtrante, se puede determinar la Característica de Poincaré-Euler del espacio contenido en el seno del medio filtrante.

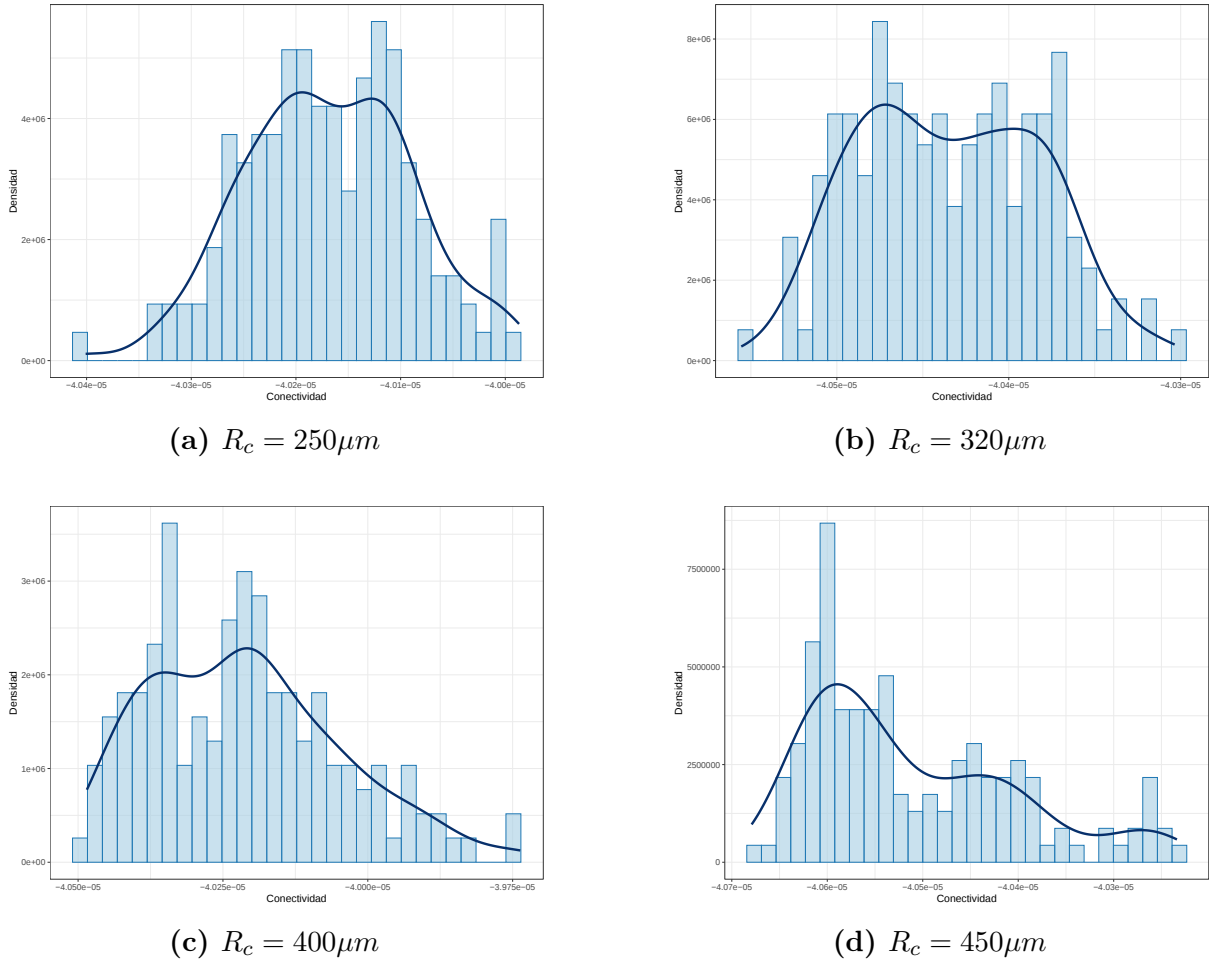


Figura 4.15: Densidades para una muestra de 150 Estructuras Porosas de diferente radio R_c .

En la **Figura 4.15** se enmarcan los resultados del cálculo de χ para ciento cincuenta (150) estructuras porosas, construidas aleatoriamente a partir de la combinación de veinte (20) capas porosas generadas mediante diagramas de Voronoi-Laguerre según lo descrito en [7]. Para la obtención del valor de la Característica de Poincaré-Euler χ se aplicó la ecuación 3.15, que resulta de aplicar la ecuación 2.11 al modelo simulado de filtros. Dicha ecuación delimita un promedio volumétrico de la conectividad, lo cual, permite que los valores obtenidos de la Característica de Poincaré-Euler para cada R_c sean comparables.

De tal resultado, en la **Figura 4.15** se identifica que conforme el R_c aumenta los valores de la conectividad para una estructura porosa tienen a desconcentrarse de un valor central hasta una distribución más uniforme (**Figuras 4.15a-4.15d**). El promedio y la desviación estándar de los resultados anteriores se exponen en la **Tabla 4.5**.

Tabla 4.5: Valores de Conectividad de las Estructuras Porosas con diferente radio R_c

$R_c = 250 \mu m$	$R_c = 320 \mu m$
Promedio: -4.01685×10^{-5}	Promedio: -4.04346×10^{-5}
Desv. Est.: 7.91677×10^{-8}	Desv. Est.: 5.23396×10^{-8}
Mín. Conect.: -3.99869×10^{-5}	Mín. Conect.: -4.03035×10^{-5}
Máx. Conect.: -4.04009×10^{-5}	Máx. Conect.: -4.05556×10^{-5}
$R_c = 400 \mu m$	$R_c = 450 \mu m$
Promedio: -4.02124×10^{-5}	Promedio: -4.05116×10^{-5}
Desv. Est.: 1.65413×10^{-7}	Desv. Est.: 1.09339×10^{-7}
Mín. Conect.: -3.97368×10^{-5}	Mín. Conect.: -4.02337×10^{-5}
Máx. Conect.: -4.04848×10^{-5}	Máx. Conect.: -4.06792×10^{-5}

4.4. Incidencia de la Conectividad en la Filtración de Partículas

Se procedió a generar estructuras de dos (2) capas porosas, para las cuales, se estimó χ , considerando la posibilidad de que los poros estuvieran habilitados o no, según la longitud de su radio, para formar conexiones. Esto se realizó aplicando umbrales radiales. Asimismo, se consideraron capas de radio R_c igual $250\mu m$, $320\mu m$, $400\mu m$ y $450\mu m$. Se realizaron 220 simulaciones de filtración de partículas para cada configuración de capas, y los valores de conectividad estimados. Finalmente se obtuvo la eficiencia de los medios filtrantes simulados, calculando la razón entre el número de partículas que fueron capturadas en el medio filtrante con respecto al número de partículas generadas aleatoriamente, previo a su desplazamiento a través de las estructuras porosas. El número de partículas al principio de la simulación se estimó conforme a lo expuesto en [7] y [6], tal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$NUM = NPART \times CONC \times V \times \Delta t \times A \quad (4.2)$$

Donde:

- $NPART$: Número de partículas por unidad de masa.
- $CONC$: Densidad de la fase que transporta las partículas.
- V : Velocidad de fase.
- Δt : Tiempo.

La cual considera las propiedades del polvo ACFine Dust [7] y cuyos parámetros se exponen en la siguiente tabla:

Tabla 4.6: Parámetros de partículas, velocidad de fluido e incremento de tiempo

$NPAR$	$CONC$	V	Δt
$1.7519 \times 10^6/\text{mg}$	1 mg/l	0.10 m/min	5 min

El número de partículas que deben ser lanzadas, dependiendo del radio de la capa porosa se detalla en la siguiente tabla:

Tabla 4.7: Número de partículas para distintos valores de R_c

No.	R_c	Número de Partículas
1	250 μm	175
2	320 μm	282
3	400 μm	441
4	450 μm	558

4.4.1. Filtración en Bicapas

Los resultados del cálculo de la eficiencia para una estructura porosa de dos capas, para distintos radios de capa porosa R_c , diferentes valores de conectividad, y distintas distribuciones para el tamaño de las partículas se detallan en la secciones siguientes:

4.4.1.1. Distribución de Partículas $U(1, 5)$

Los resultados de las simulaciones del proceso de filtración muestran que conforme el radio R_c aumenta, que implica a su vez, que haya un mayor número de posibles conexiones

entre los poros de las capas consecutivas, mayor es el valor de la eficiencia, estimada a partir de un conjunto de partículas que poseen la misma distribución en tamaño.

De acuerdo a los valores obtenidos de las tablas adjuntas, se identifica que conforme la conectividad de la estructura porosa disminuye, es decir, que χ toma valores cada vez más positivos, incrementa con ello la eficiencia de la estructura porosa.

Tabla 4.8: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 250\mu m$

χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
103.0	0.995818	0.003020	0.995400	0.996237
-52.0	0.982779	0.005817	0.981973	0.983585
-487.5	0.980416	0.007034	0.979441	0.981390
-911.0	0.944026	0.013229	0.942192	0.945859
-1215.5	0.939896	0.012613	0.938148	0.941644
-1342.0	0.941792	0.011972	0.940133	0.943452
-1630.0	0.913481	0.014778	0.911432	0.915529
-1835.0	0.908338	0.015352	0.906210	0.910465
-1937.5	0.850649	0.017190	0.848267	0.853032
-1978.0	0.883740	0.016198	0.881495	0.885985
-1999.0	0.884442	0.017424	0.882027	0.886856
-2077.5	0.851091	0.019261	0.848421	0.853760

Tabla 4.9: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 320\mu m$

χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
160.0	0.995455	0.002473	0.995112	0.995797
-132.0	0.992150	0.004143	0.991576	0.992724
-791.5	0.967134	0.006875	0.966181	0.968087
-1379.0	0.946196	0.009685	0.944854	0.947538
-1880.5	0.940683	0.009632	0.939349	0.942018
-2083.0	0.929884	0.009089	0.928624	0.931144
-2564.0	0.919262	0.012084	0.917587	0.920937
-2943.5	0.866634	0.015231	0.864523	0.868745
-3101.5	0.867489	0.014863	0.865429	0.869549
-3157.0	0.900854	0.013821	0.898939	0.902770
-3182.5	0.885429	0.013438	0.883566	0.887291
-3393.0	0.861364	0.012960	0.859568	0.863160

Por ejemplo de la **Tabla 4.8** se tiene que para $\chi = 103.0$, la eficiencia es de 0.995818, que disminuye a 0.851091, cuando $\chi = -2077.5$. Similarmente sucede con los datos de la **Tabla 4.9**, cuando $\chi = 160.0$, la eficiencia toma el valor de 0.995455, en cambio, es igual a 0.861364 cuando $\chi = -3393.0$.

Los resultados obtenidos del análisis para las bicapas de radio $R_c = 400\mu m$ y $R_c = 450\mu m$ se detallan en las **Tablas 4.10** y **4.11**.

Tabla 4.10: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 400\mu m$

χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
311.5	0.999825	0.000607	0.999741	0.999909
-148.0	0.990043	0.003245	0.989594	0.990493
-1123.5	0.980489	0.004861	0.979815	0.981162
-2018.5	0.970418	0.005773	0.969618	0.971219
-2961.0	0.944888	0.007847	0.943800	0.945975
-3292.0	0.920686	0.008782	0.919469	0.921904
-4063.5	0.915399	0.008933	0.914161	0.916637
-4687.5	0.909101	0.010546	0.907640	0.910563
-4976.5	0.865255	0.011532	0.863656	0.866853
-5123.5	0.847176	0.012247	0.845478	0.848873
-5160.0	0.860173	0.011673	0.858555	0.861791
-5369.0	0.843599	0.012698	0.841839	0.845359

Tabla 4.11: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 450\mu m$

χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
423.0	0.999145	0.000897	0.999020	0.999269
380.5	0.997776	0.001598	0.997555	0.997998
-204.5	0.988791	0.003024	0.988372	0.989210
-1467.0	0.971106	0.004173	0.970528	0.971685
-2818.5	0.952835	0.006001	0.952003	0.953667
-4001.0	0.942367	0.007108	0.941382	0.943352
-4512.5	0.933138	0.007251	0.932133	0.934143
-5490.0	0.896416	0.009428	0.895109	0.897722
-6044.0	0.889866	0.010052	0.888473	0.891260
-6401.5	0.889370	0.009498	0.888053	0.890686
-6531.0	0.869624	0.009842	0.868260	0.870988
-6571.5	0.852933	0.010708	0.851448	0.854417
-6844.0	0.852444	0.010543	0.850983	0.853905

Para $R_c = 400\mu m$, se observa que la eficiencia es de 0.999825 cuando $\chi = 311.5$, el valor positivo de esta variable denota que la estructura porosa tiene baja conectividad, sin embargo, conforme χ toma valores cada vez más negativos, la eficiencia disminuye, por ejemplo para $\chi = -5369$ la eficiencia es de 0.843599.

La misma observación aplica para $R_c = 450\mu m$, pues cuando $\chi = 423.0$ la eficiencia es igual a 0.999145, para cuando $\chi = -6844.0$ la eficiencia toma el valor de 0.852444.

4.4.1.2. Distribución de Partículas $U(3, 7)$

Un análisis como el expuesto anteriormente puede realizarse si la distribución de las partículas cambia, en este caso a una uniforme $U(3, 7)$, cabe señalar, que el tamaño de las partículas se escogió considerando la distribución de las partículas ACFine [6].

Tabla 4.12: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 250\mu m$ con $U(3, 7)$

χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
-487.5	0.996343	0.003802	0.995816	0.996870
-911.0	0.998229	0.002649	0.997861	0.998596
-1215.5	0.984486	0.006465	0.983590	0.985382
-1342.0	0.978829	0.007574	0.977779	0.979878
-1630.0	0.980371	0.007719	0.979302	0.981441
-1835.0	0.962714	0.010899	0.961204	0.964225
-1937.5	0.967029	0.010880	0.965521	0.968536
-1978.0	0.977171	0.009543	0.975849	0.978494
-1999.0	0.964143	0.007874	0.963052	0.965234
-2077.5	0.972143	0.008892	0.970910	0.973375

Tabla 4.13: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 320\mu m$ con $U(3, 7)$

χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
-132.0	0.997465	0.001605	0.997242	0.997687
-791.5	0.999113	0.001580	0.998895	0.999332
-1379.0	0.999716	0.000964	0.999583	0.999850
-1880.5	0.988901	0.004571	0.988267	0.989534
-2083.0	0.992465	0.003218	0.992019	0.992911
-2564.0	0.987571	0.004809	0.986904	0.988237
-2943.5	0.981667	0.005404	0.980918	0.982416
-3101.5	0.969326	0.007506	0.968286	0.970366
-3157.0	0.979628	0.007320	0.978613	0.980642
-3182.5	0.972500	0.007436	0.971469	0.973531
-3393.0	0.945284	0.008565	0.944097	0.946471

Al comparar los valores de eficiencia de las **Tablas 4.8 y 4.9**, con los de las **Tablas 4.12 y 4.13**, para los mismos valores de conectividad, se tiene que conforme el tamaño de las partículas aumenta, en este caso, cuando la longitud de sus radios pasa de una distribución uniforme $U(1, 5)$ a $U(3, 7)$, la eficiencia tiende a reducirse, por ejemplo, para $R_c = 250\mu m$ y $\chi = -2077.5$, la eficiencia es de 0.851091 para $U(1, 5)$, en cambio, la eficiencia es de 0.972143 cuando la distribución es $U(3, 7)$.

Tabla 4.14: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 400\mu m$ con $U(3, 7)$

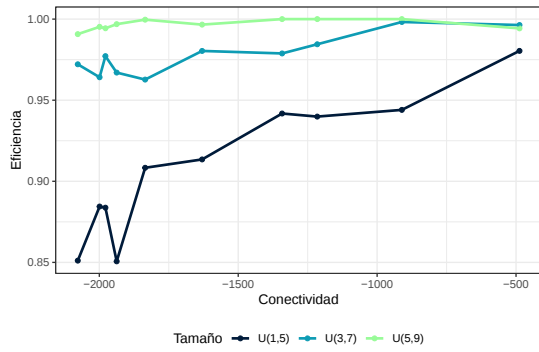
χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
-1123.5	0.997245	0.002155	0.996946	0.997544
-2018.5	0.994762	0.002834	0.994369	0.995155
-2961.0	0.994399	0.002829	0.994007	0.994791
-3292.0	0.993005	0.003339	0.992542	0.993467
-4063.5	0.987834	0.003771	0.987312	0.988357
-4687.5	0.980374	0.004755	0.979715	0.981033
-4976.5	0.970102	0.005268	0.969372	0.970832
-5123.5	0.972426	0.005846	0.971616	0.973237
-5160.0	0.980930	0.006071	0.980088	0.981771
-5369.0	0.965397	0.005964	0.964570	0.966223

Tabla 4.15: Intervalos de confianza de la Eficiencia al 95 % para $R_c = 450\mu m$ con $U(3, 7)$

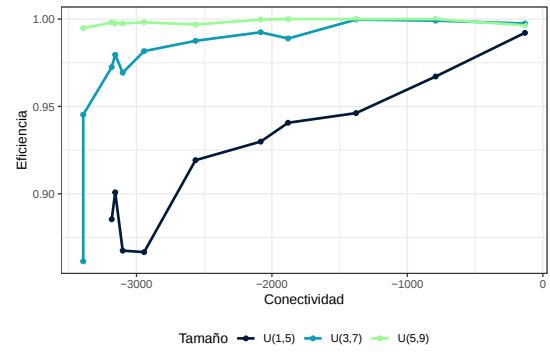
χ	Eficiencia	Desviación Estándar	LI	LS
380.5	0.999866	0.000473	0.999800	0.999928
-204.5	0.999203	0.000893	0.999079	0.999320
-1467.0	0.999203	0.001012	0.999062	0.999336
-2818.5	0.993011	0.002683	0.992639	0.993365
-4001.0	0.989633	0.003208	0.989188	0.990057
-4512.5	0.986819	0.003497	0.986334	0.987281
-5490.0	0.985797	0.003597	0.985299	0.986273
-6044.0	0.981738	0.004568	0.981105	0.982342
-6401.5	0.981398	0.004701	0.980746	0.982019
-6531.0	0.977070	0.004634	0.976428	0.977682
-6571.5	0.978306	0.004987	0.977615	0.978965
-6844.0	0.974364	0.005300	0.973629	0.975064

La **Figura. 4.16** muestra que la eficiencia tiende a ser generalmente mayor, cuando el tamaño de las partículas, para este caso, su radio, es cada vez mayor. Asimismo, los gráficos muestran que la eficiencia tiende a incrementarse conforme el valor de χ aumenta, que es equivalente a decir que la eficiencia es mayor cuanto menos conectividad tenga el espacio del medio filtrante. Cabe recordar, que la conectividad está fuertemente condicionada a la disposición de los poros para formar conexiones con las capas vecinas. Esto, se modeló considerando la aplicación de umbrales radiales mediante los parámetros μ_- y μ_+ definidos de acuerdo a las condiciones expuestas a lo largo del desarrollo de este trabajo de investigación.

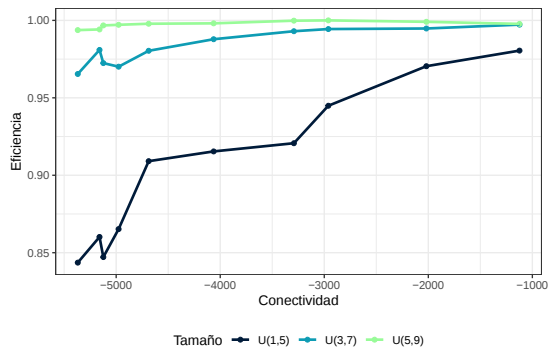
El comparativo de la eficiencia de las estructuras porosas analizadas, formadas por dos capas, para diferentes distribuciones de tamaño de partículas, se ilustra en los siguientes gráficos:



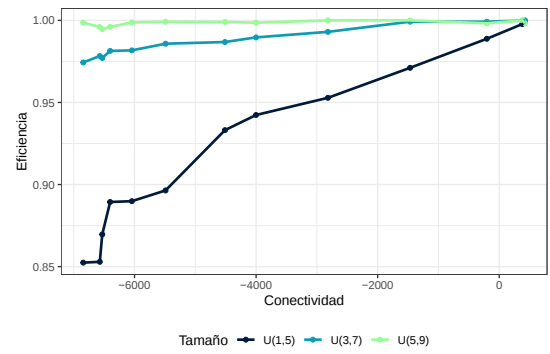
(a) $R_c = 250 \mu m$



(b) $R_c = 320 \mu m$



(c) $R_c = 400 \mu m$



(d) $R_c = 450 \mu m$

Figura 4.16: Eficiencia de estructuras porosas para bicapas de diferente R_c

4.4.1.3. Distribución de Partículas $U(8, 13)$

Se procedió a simular el flujo de 700 partículas a través de una bicapa de radio $R_c = 250\mu m$. Se simuló el desplazamiento de cada partícula a través del material poroso modelado, se verificó si la partícula atravesaba la bicapa o era capturada, y en este último caso se corroboró si los poros con los que tuvo contacto, quedaban completamente obstruidos. A partir de dicha información se calculó el valor de χ considerando los poros habilitados.

Los datos de la siguiente tabla muestran que conforme disminuye la conectividad, es decir χ toma valores cada vez más a la derecha en la recta real, la eficiencia aumenta. Pues para $\chi = -2, 107.00$ se tiene que la eficiencia toma un valor de 0.001429, en cambio, para $\chi = -1, 748.57$ la eficiencia es de 0.999796.

Tabla 4.16: Intervalos de confianza al 95 % para Eficiencia y Conectividad χ , para $R_c = 250\mu m$ y $U(8, 13)$.

Tiempo (min)	Eficiencia				χ			
	Promedio	Desv. Estándar	LI	LS	Promedio	Desv. Estándar	LI	LS
1	0.001429	0.00	0.001429	0.001429	-2107.00	—	-2107.00	-2107.00
2	0.072857	1.39E-17	0.072857	0.072857	-2076.07	4.55	-2079.45	-2072.70
3	0.144286	0.00	0.144286	0.144286	-2047.50	7.52	-2053.07	-2041.93
5	0.215714	0.00	0.215714	0.215714	-2018.29	11.46	-2026.78	-2009.80
6	0.287143	0.00E	0.287143	0.287143	-1985.86	11.74	-1994.56	-1977.16
7	0.358571	0.00E	0.358571	0.358571	-1958.14	15.07	-1969.30	-1946.98
9	0.430000	5.55E-17	0.430000	0.430000	-1932.14	16.87	-1944.64	-1919.64
10	0.501429	0.00	0.501429	0.501429	-1907.07	15.90	-1918.85	-1895.29
11	0.571429	1.11E-16	0.571429	0.571429	-1884.86	19.49	-1899.30	-1870.42
13	0.642857	1.11E-16	0.642857	0.642857	-1863.14	16.90	-1875.66	-1850.63
14	0.714286	1.11E-16	0.714286	0.714286	-1836.93	18.42	-1850.57	-1823.29
15	0.785510	5.00E-04	0.785140	0.785881	-1813.79	16.40	-1825.93	-1801.64
17	0.856939	5.00E-04	0.856568	0.857309	-1791.07	18.21	-1804.56	-1777.58
18	0.928367	5.00E-04	0.927997	0.928738	-1771.57	17.41	-1784.47	-1758.67
20	0.999796	5.00E-04	0.999426	1.000166	-1748.57	17.60	-1761.61	-1735.53

El incremento en la eficiencia se explica por la reducción de caminos disponibles dentro del medio filtrante, por los cuales las partículas puedan desplazarse, haciendo que sea más fácil que estas sean capturadas. El comportamiento de la eficiencia en función de χ se muestra en la siguiente figura.

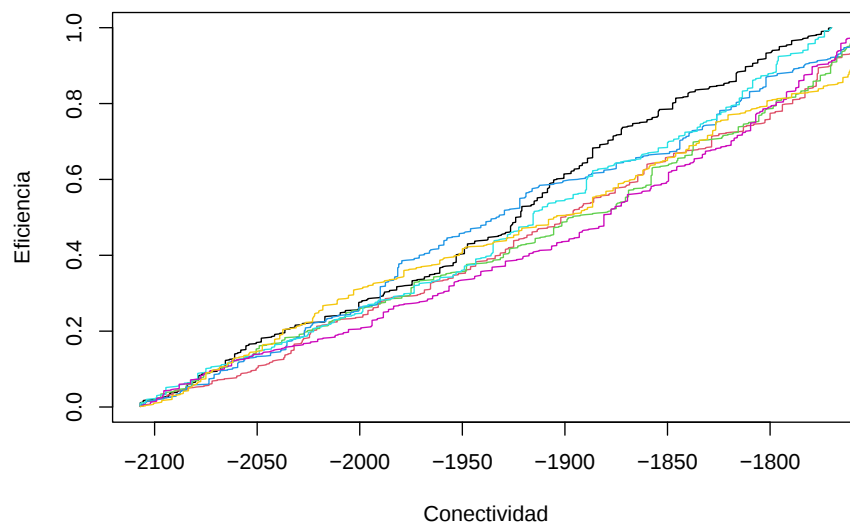


Figura 4.17: Eficiencia vrs Conectividad para partículas con radio $U(8, 13)$.

4.4.1.4. Distribución de Partículas $U(13, 18)$

Se replicó el ejercicio anterior con partículas de mayor tamaño, mostrando que los valores de conectividad se acercan más a cero, en comparación a los valores de χ para el desplazamiento de partículas con distribución $U(8, 13)$. Esto se debe a que las partículas pueden entrar en contacto con un mayor número de poros, y por tanto, existe la posibilidad de que se incremente el número de poros obstruidos, de lo cual se tiene que el número de conexiones entre las capas disminuye, lo que incide en el valor de χ .

Tabla 4.17: Intervalos de confianza al 95 % para Eficiencia y Conectividad χ , para $R_c = 250\mu\text{m}$ y $U(13, 18)$.

Tiempo (min)	Eficiencia				χ			
	Promedio	Desv. Estándar	LI	LS	Promedio	Desv. Estándar	LI	LS
1	0.001429	0.00	0.001429	0.001429	-2104.50	3.20	-2106.87	-2102.13
2	0.072857	1.39E-17	0.072857	0.072857	-1975.71	14.45	-1986.42	-1965.01
3	0.144286	0.00	0.144286	0.144286	-1852.79	20.22	-1867.77	-1837.80
5	0.215714	0.00	0.215714	0.215714	-1742.29	19.30	-1756.59	-1727.99
6	0.287143	0.00	0.287143	0.287143	-1636.86	20.66	-1652.16	-1621.55
7	0.358571	0.00	0.358571	0.358571	-1525.07	25.30	-1543.81	-1506.33
9	0.430000	5.55E-17	0.430000	0.430000	-1431.36	22.15	-1447.77	-1414.95
10	0.501429	0.00	0.501429	0.501429	-1345.57	29.55	-1367.46	-1323.68
11	0.571429	1.11E-16	0.571429	0.571429	-1271.43	30.08	-1293.71	-1249.15
13	0.642857	1.11E-16	0.642857	0.642857	-1183.14	23.05	-1200.22	-1166.07
14	0.714286	1.11E-16	0.714286	0.714286	-1115.07	28.50	-1136.19	-1093.96
15	0.785714	1.11E-16	0.785714	0.785714	-1051.86	29.33	-1073.58	-1030.13
17	0.857143	1.11E-16	0.857143	0.857143	-987.93	31.98	-1011.62	-964.24
18	0.928571	1.11E-16	0.928571	0.928571	-934.71	33.37	-959.44	-909.99
20	1.000000	0.00	1.000000	1.000000	-878.71	37.42	-906.43	-851.00

De la **Tabla 4.17** se tiene que χ alcanza su valor máximo en $\chi = -878.71$, que es mayor, en comparación al valor que alcanzó en el experimento anterior, que fue de $\chi = -1,748.54$. El comportamiento de la eficiencia en relación a la conectividad, con una distribución uniforme $U(13, 18)$ para el radio de las partículas, se observa en la **Figura 4.18**.

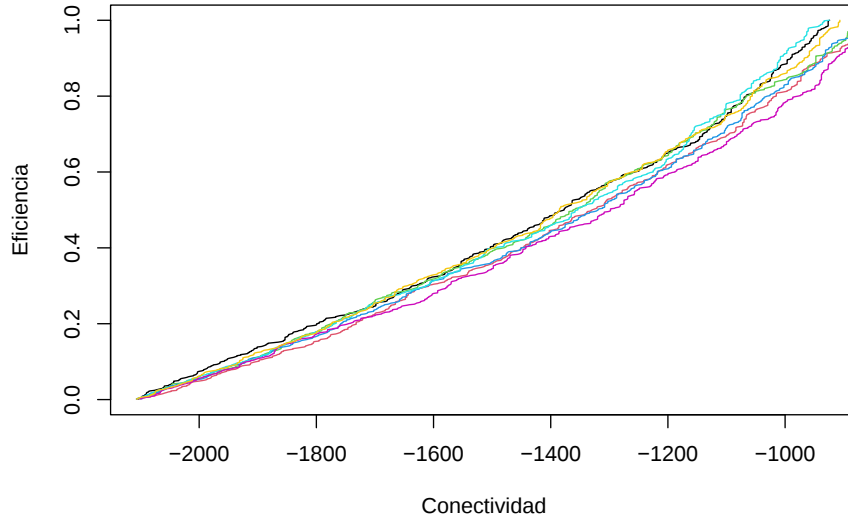


Figura 4.18: Eficiencia vrs Conectividad para partículas con radio $U(13, 18)$.

4.4.1.5. Distribución de Partículas $U(18, 25)$

Tabla 4.18: Intervalos de confianza al 95 % para Eficiencia y Conectividad χ , para $R_c = 250\mu m$ y $U(18, 25)$.

Tiempo (min)	Eficiencia				χ			
	Promedio	Desv. Estándar	LI	LS	Promedio	Desv. Estándar	LI	LS
1	0.001429	0.00	0.001429	0.001429	-2100.07	1.88	-2101.46	-2098.68
2	0.072857	1.39E-17	0.072857	0.072857	-1722.00	21.40	-1737.86	-1706.14
3	0.144286	0.00	0.144286	0.144286	-1411.21	28.55	-1432.36	-1390.07
5	0.215714	0.00	0.215714	0.215714	-1170.21	34.64	-1195.88	-1144.55
6	0.287143	0.00	0.287143	0.287143	-955.14	37.35	-982.81	-927.47
7	0.358571	0.00	0.358571	0.358571	-795.36	35.78	-821.86	-768.85
9	0.430000	5.55E-17	0.430000	0.430000	-637.00	28.64	-658.21	-615.79
10	0.501429	0.00	0.501429	0.501429	-508.93	35.10	-534.93	-482.93
11	0.571429	1.11E-16	0.571429	0.571429	-412.79	32.87	-437.14	-388.44
13	0.642857	1.11E-16	0.642857	0.642857	-323.50	36.30	-350.39	-296.61
14	0.714286	1.11E-16	0.714286	0.714286	-247.50	26.26	-266.96	-228.04
15	0.785714	1.11E-16	0.785714	0.785714	-188.50	20.10	-203.39	-173.61
17	0.857143	1.11E-16	0.857143	0.857143	-140.71	12.00	-149.61	-131.82
18	0.928571	1.11E-16	0.928571	0.928571	-97.29	11.66	-105.93	-88.64
20	1.000000	0.00	1.000000	1.000000	-48.71	18.03	-62.07	-35.36

El comportamiento de la eficiencia conforme χ toma valores cada vez más cercanos a cero, se ve en la siguiente figura:

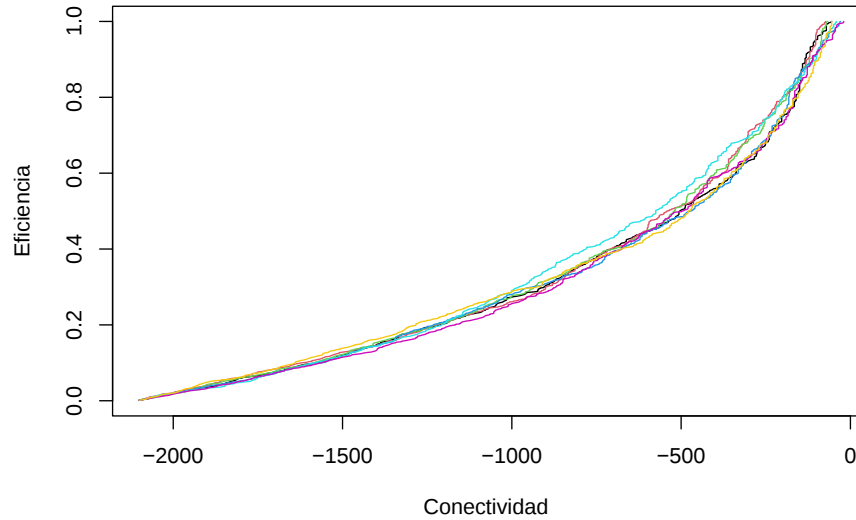


Figura 4.19: Eficiencia vrs Conectividad para partículas con radio $U(18, 25)$.

Así como en los experimentos anteriores, el valor de χ aumenta conforme un mayor número de partículas son capturadas, debido a que se modifican los poros que puedan formar conexiones, explicado a su vez, por el tamaño de las partículas, que al ser mayor, entran en contacto con más poros, y cabe la posibilidad de que sean completamente obstruidos. En este experimento el máximo valor de χ es de $\chi = -48.71$, mayor a los registrados, para el desplazamiento de partículas de tamaño $U(8, 13)$ y $U(18, 25)$. Esto muestra que la conectividad entre las capas que constituyen el material filtrante modelado, disminuye, debido a que hay un menor número de poros disponibles para formar caminos redundantes en su interior.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos a Futuro

5.1. Conclusiones

- Se aprovechó la geometría circular de los poros para implementar el método de *sectorización de capa* el cual resultó útil para la estimación de la característica de Poincaré-Euler, cuando el radio de las capas porosas utilizadas era cada vez mayor, reduciendo con ello el costo computacional que implicaba dicho cálculo.
- En las estimaciones del valor de χ , para las diferentes estructuras porosas generadas, se determinó que los principales factores que inciden o generan variaciones significativas de la característica de Poincaré-Euler, fueron los umbrales radiales, debido a que dicho parámetro, aunque es sensible al ángulo de rotación, este último no genera cambios diferenciados como los producidos por los umbrales radiales.
- Mediante la aplicación de la técnica del *disector* se logró cuantificar la Característica de Poincaré-Euler para las estructuras porosas generadas mediante los diagramas de Voronoi Laguerre.
- Conforme las partículas obstruyen los poros, se modifica la conectividad de una capa a la otra, lo que a su vez incrementa la eficiencia del medio filtrante, debido a que hay menos caminos disponibles por donde puedan circular las partículas.
- El modelo propuesto para el flujo de partículas en el medio poroso, permite obtener una aproximación mas realista del flujo de partículas, al considerar que estas no pueden aparecer en cualquier punto de la capa siguiente, sino, que su desplazamiento a través del medio filtrante está condicionado a las conexiones de los poros de una capa con los poros de la capa siguiente.
- La topología del espacio poroso está determinado por la distribución del tamaño de los poros, más que por la posición rotacional de una capa con la siguiente.

5.2. Trabajos a Futuro

- Implementar el Algoritmo de Lattice-Boltzman y Automátas celulares, para simular con mayor realismo el desplazamiento de las partículas a través del medio filtrante.
- Explorar modelos de aprendizaje no supervisado para la construcción de cluster o grupos de poros, como alternativa al modelo de sectorización de capas y comparar su desempeño en el cálculo de la característica de Poincaré-Euler.
- Revisar métodos de computación en paralelo para analizar la posibilidad de aplicarlos a la estimación de la característica de Poincaré-Euler e incrementar la eficiencia de su cálculo.

Bibliografía

- [1] L. K. Barrett and C. S. Yust. Some fundamental ideas in topology and their application to problems in metallurgy. *Metallography*, 3(1):1–33, 1970.
- [2] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Environmental Science Series. American Elsevier Publishing Company, New York, 2 edition, 1972.
- [3] L. Burtseva, F. Werner, B. Valdez Salas, A. Pestryakov, R. Romero, and V. Petranovskii. Modeling of the material structure using voronoi diagrams and tessellation methods. Preprint 01/15, Faculty of Mathematics, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Germany, Jan. 2015.
- [4] R. DeHoff. Use of the disector to estimate the euler characteristic of three-dimensional microstructures. *Acta Stereologica*, 6(SupplementII):133–140, 1987.
- [5] R. T. DeHoff, E. H. Aigeltinger, and K. R. Craig. Experimental determination of the topological properties of three-dimensional microstructures. *Journal of Microscopy*, 95(Pt 1):69–91, 1972.
- [6] J. A. Destephen and K. Choi. Modelling of filtration processes of fibrous filter media. *Separations Technology*, 6(1):55–67, 1996.
- [7] R. C. Duarte Rivera. Simulación estocástica de procesos de filtración utilizando un modelo de medio filtrante basado en diagramas de voronoi-laguerre. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, 2022.
- [8] H. J. G. Gundersen, R. W. Boyce, J. R. Nyengaard, and A. Odgaard. The connector: Unbiased estimation of connectivity using physical disectors under projection. *Bone*, 14(3):217–222, 1993.
- [9] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [10] W. L. McCabe, J. C. Smith, and P. Harriott. *Operaciones unitarias en ingeniería química*. McGraw–Hill Interamericana, México, 7 edition, 2004.

- [11] J. L. Moreno Durán and S. Ordóñez Pérez. Diagramas de voronoi de alcance limitado. Trabajo final de carrera, Universitat Politècnica de Catalunya, 2009. Tutor: Vera Sacristán Adinolfi.
- [12] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall / Pearson College Div., Upper Saddle River, New Jersey, 2 edition, 2000.
- [13] J. A. Quiblier. A new three-dimensional modeling technique for studying porous media. *Journal of Colloid and Interface Science*, 98(1):84–102, 1984.
- [14] C. P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, NY, 2 edition, 2004.
- [15] D. C. Sterio. The unbiased estimation of number and sizes of arbitrary particles using the disector. *Journal of Microscopy*, 134(Pt 2):127–136, 1984.
- [16] H. Vogel. Morphological determination of pore connectivity as a function of pore size using serial sections. *European Journal of Soil Science*, 48(3):365–377, 1997.
- [17] H. Vogel and A. Kretzschmar. Topological characterization of pore space in soil—sample preparation and digital image-processing. *Geoderma*, 73(1-2):23–38, 1996.
- [18] H. Vogel and K. Roth. Quantitative morphology and network representation of soil pore structure. *Advances in Water Resources*, 24(3–4):233–242, 2001.
- [19] H.-J. Vogel. Topological characterization of porous media. In *Morphology of Condensed Matter*, volume 600 of *Lecture Notes in Physics*, pages 75–92. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. First online January 1, 2002.
- [20] S. Wu, Y. Chen, C. Qi, C. Liu, G. Li, and H. Zhu. A 3d monte carlo simulation of convective diffusional deposition of ultrafine particles on fiber surfaces. *Atmosphere*, 13(8):1319, 2022.