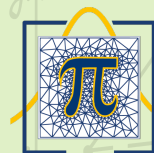




UNAH
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE HONDURAS



**Maestría en
Matemática**

BOLETÍN DIVULGATIVO

ABRIL 2026

Volumen II

TEMÁTICA:

- CÁLCULO NO NEWTONIANO.
- TRANSFORMADAS EN CONTEXTO PROPORCIONAL.
- MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES.
- OPTIMIZACIÓN EN SISTEMAS ELÉCTRICOS.
- BIOMEDICINA E INTELIGENCIA ARTIFICIAL.

Presentación

Este documento ha sido elaborado por la Coordinación de Investigación y Vinculación de la Maestría en Matemática de la UNAH. Presenta una selección de trabajos de investigación desarrollados por estudiantes en el marco del Seminario de Investigación de Ingeniería Matemática, abarcando diversas áreas de la matemática contemporánea, tanto teórica como aplicada. Los trabajos incluidos se articulan en torno a temáticas como: cálculo no newtoniano, transformadas en contexto proporcional, métodos numéricos para ecuaciones diferenciales, optimización en sistemas eléctricos y modelado matemático aplicado a biomedicina e inteligencia artificial. El objetivo de este boletín es promover la divulgación científica y fortalecer el desarrollo del pensamiento investigador en los estudiantes, como base para futuras publicaciones académicas.

Todos los temas aquí presentados se encasillan dentro de las líneas de investigación de la UNAH, entre los temas prioritarios abarcados se encuentran: ciencia, cambio climático y vulnerabilidad, productividad, infraestructura y desarrollo territorial. Esto evidencia que la Coordinación de Investigación y Vinculación de la Maestría en Matemática está sumamente interesada en colaborar con las prioridades investigativas de la universidad y mantiene un compromiso con vincularse con la sociedad.

Abril del año 2026, Ciudad Universitaria
Tegucigalpa, M.D.C., Honduras

© Maestría en Matemáticas - UNAH
Edificio F1, Segundo Piso, Ciudad Universitaria
Tegucigalpa, M.D.C. Honduras.
<https://mm.unah.edu.hn/>
maestria.matematica@unah.edu.hn
Tel. 2216-3000 Ext. 100647

Contenido

1. TRANSFORMADA PROPORCIONAL DE FOURIER- Carlos M. Cruz-Rodas, Marlon M. Lopez-Flores, William Campillay-Llanos
..... (p. 1 - 10)
2. SOLUCIONES NUMÉRICAS DE LAS ECUACIONES DE CALOR Y ONDA EN EL CONTEXTO DE ARITMÉTICAS NO NEWTONIANAS USANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS - J.D. Zuniga-Varela, Marlon M. Lopez-Flores, William Campillay-Llanos
..... (p. 11 - 17)
3. TRANSFORMADA DE LAPLACE NO NEWTONIANA Y SUS PROPIEDADES - G. Maldonado-Batres, Marlon M. Lopez-Flores, William Campillay-Llanos
..... (p. 18 - 24)
4. POLAR MOLECULES BY P. DEBYE, PH.D.- KILVER TEJEDA
..... (p. 25 - 31)
5. CARACTERÍSTICAS MATEMÁTICAS Y PROPIEDADES DEL PROBLEMA OPF - José Lesman Rordriguez Bonilla
..... (p. 32 - 48)
6. EL PROBLEMA INVERSO EN UN MODELO DE ANGIOGÉNESIS TUMORAL: CÁLCULO DE COEFICIENTE DE QUIMIOTAXIS MEDIANTE EL USO DE REDES NEURONALES- Sheila Membreño
..... (p. 49 - 62)

TRANSFORMADA PROPORCIONAL DE FOURIER

CARLOS M. CRUZ-RODAS, MARLON M. LÓPEZ-FLORES, WILLIAM CAMPILLAY-LLANOS

RESUMEN. Este trabajo presenta un marco de transformada de Fourier basado en la aritmética proporcional, en el que se exponen sus propiedades fundamentales y se establecen paralelismos con la teoría clásica de la transformada de Fourier. Dado el uso extendido de la transformada de Fourier en diversos campos, resulta crucial explorar marcos alternativos y desarrollar metodologías análogas que fortalezcan las técnicas de modelado matemático. Como aplicación práctica, demostramos la utilidad de este enfoque para resolver ecuaciones diferenciales proporcionales.

1. INTRODUCCIÓN

En este boletín se presenta, de manera sintética, un marco para la *Transformada Proporcional de Fourier* sustentado en la aritmética y el cálculo proporcionales. En primer lugar, se fijan las operaciones básicas del álgebra proporcional y se establecen identidades y funciones elementales (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) que sirven como puente con el análisis clásico. Luego, se introducen nociones fundamentales en \mathbb{C}_p y reglas de derivación proporcional, destacando su vinculación directa con las derivadas usuales mediante la función clásica asociada. Finalmente, se enuncia una definición extendida de la transformada de Fourier proporcional sobre $(0, \infty)$ y se ilustran propiedades iniciales como la linealidad y la traslación, con el propósito de ofrecer una base clara para desarrollos y aplicaciones posteriores.

2. ARITMÉTICA PROPORCIONAL

La Aritmética Proporcional ofrece un enfoque alternativo a las operaciones matemáticas sobre los números reales positivos. Las operaciones definidas en este caso se denotan como $x \oplus y$, $x \ominus y$, $x \odot y$ y $x \oslash y$, con las siguientes definiciones:

$$(1) \quad x \oplus y = x \cdot y, \quad x \ominus y = \frac{x}{y} = x/y, \quad x \odot y = x^{\log(y)}, \quad x \oslash y = x^{\frac{1}{\log(y)}}.$$

Donde la base del logaritmo es e . El elemento neutro para \odot se denota como e , donde se cumple que $x \odot e = x$ y $x \oslash e = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. El inverso- \odot de x se define como $x^{\{-1\}} := e^{(\log x)^{-1}}$, dado que:

$$(2) \quad x \odot x^{\{-1\}} = x^{\{-1\}} \odot x = [e^{\log(x)}]^{\frac{1}{\log(x)}} = e.$$

De este modo, la ecuación $x \oslash c = e$ es equivalente a $x = c$, proporcionando una vía alternativa para definir la igualdad entre dos cantidades. Adicionalmente, la notación $x \odot x \odot \cdots \odot x$, repetida n veces, se define como $x^{\{n\}}$.

A continuación, presentamos tres proposiciones que establecen la analogía entre operar con estas nuevas operaciones y manipular cantidades numéricas en la aritmética tradicional.

3. PROPIEDADES ALGEBRAICAS

A continuación, presentamos tres proposiciones que establecen la analogía entre operar con estas nuevas operaciones y manipular cantidades numéricas en la aritmética tradicional.

Proposición 3.1. *El conjunto de los números reales positivos, \mathbb{R}^+ , forma un grupo abeliano con identidad 1 bajo la operación \oplus .*

Proposición 3.2. *El conjunto $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, bajo la operación \odot , forma un grupo abeliano con el número trascendente e como identidad al considerar el logaritmo natural.*

Proposición 3.3. *La operación \odot es distributiva sobre \oplus .*

TABLA 1. Identidades notables: forma clásica (aditiva) y su forma homóloga en el álgebra proporcional.

Álgebra clásica (aditiva)	Álgebra proporcional (homóloga)
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x \oplus y)^{\{2\}} = x^{\{2\}} \oplus e^2 \odot x \odot y \oplus y^{\{2\}}$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x \oplus y)^{\{2\}} = x^{\{2\}} \ominus e^2 \odot x \odot y \oplus y^{\{2\}}$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x \oplus y) \odot (x \ominus y) = x^{\{2\}} \ominus y^{\{2\}}$

Estas proposiciones dilucidan las similitudes y la equivalencia entre las operaciones definidas y sus contrapartes en la aritmética convencional, resaltando así la familiaridad y la naturaleza intuitiva de la Aritmética Proporcional.

Teorema 3.1. *El conjunto de los números reales positivos, $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$, constituye un cuerpo.*

Las operaciones del álgebra proporcional conservan una estructura análoga a la del álgebra clásica, de modo que diversas identidades notables admiten formulaciones homólogas con una forma muy similar. Con el propósito de fijar notación y facilitar referencias posteriores, en la Tabla 1 se enlistan algunas de las identidades (productos notables) que se emplearán de manera recurrente a lo largo de este artículo. En particular, de manera general se cumple la identidad binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

y su forma homóloga

$$(x \oplus y)^{\{n\}} = x^{\{n\}} \oplus e^{\binom{n}{1}} \odot x^{\{n-1\}} \odot y \oplus e^{\binom{n}{2}} \odot x^{\{n-2\}} \odot y^{\{2\}} \oplus \dots \oplus y^{\{n\}}.$$

Definición 3.1. *Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Definimos el valor absoluto proporcional de x , denotado por $|x|_p$, como*

$$|x|_p := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq e, \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x < e, \end{cases}$$

donde e es el neutro multiplicativo proporcional.

Es útil mencionar que, a lo largo de este artículo, la identidad

$$1 \ominus x = \ominus x = \frac{1}{x}$$

resulta de gran utilidad al momento de realizar cálculos importantes.

4. FUNCIONES PROPORCIONALES

Definición 4.1. *Sea $f_c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la función $f_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, denominada función proporcional asociada a f_c , por*

$$f_p(t) = \exp(f_c(\log t)), \quad t > 0.$$

Por conveniencia notacional, el subíndice c identificará objetos del cálculo clásico; así, f_c representa una función en el sentido habitual del análisis real, mientras que f_p denota su contraparte en el marco proporcional.

Ejemplo 4.1 (Funciones proporcionales básicas). *Bajo la regla de asociación proporcional*

$$f_p(t) = \exp(f_c(\log t)), \quad t > 0,$$

se obtienen, entre otras, las siguientes funciones proporcionales:

- $\sin_p(t) := e^{\sin(\log(t))}$
- $\cos_p(t) := e^{\cos(\log(t))}$
- $\log_p(t) := e^{\log(\log(t))} = \log(t)$
- $t^{\{n\}} := e^{(\log(t))^n}$

TABLA 2. Propiedades de la exponencial: forma clásica y su forma homóloga en el álgebra proporcional.

Álgebra clásica (aditiva)	Álgebra proporcional (homóloga)
$e^x e^y = e^{x+y}$	$e^x \odot e^y = e^{x \oplus y}$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$e^x \oslash e^y = e^{x \ominus y}$
$(e^x)^n = e^{nx}$	$(e^x)^{\{n\}} = e^{x \odot e^n}$

Es importante poder identificar de forma inmediata la correspondencia entre una función proporcional f_p y su función clásica asociada f_c , ya que esta distinción es clave al trabajar con integrales, derivadas y transformadas (p. ej., de Laplace y de Fourier) dentro del marco proporcional.

- Si $f_p(t) = \sin(e^a \odot t)$, entonces la función clásica asociada es $f_c(t) = \sin(at)$.
- Si $f_p(t) = \cos(e^a \odot t)$, entonces la función clásica asociada es $f_c(t) = \cos(at)$.
- Si $f_p(t) = e^a \odot t^{\{n\}}$, entonces la función clásica asociada es $f_c(t) = at^n$.

Para concluir esta sección, recopilamos las propiedades más importantes de la exponencial dentro del álgebra proporcional. Estas identidades constituyen el “puente” de cálculo que permite simplificar expresiones, transformar productos y divisiones proporcionales en operaciones más manejables y, en general, realizar manipulaciones algebraicas de manera análoga a como se hace en el análisis clásico. Con el fin de facilitar su consulta a lo largo del artículo, resumimos a continuación dichas reglas en la tabla 2.

5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PROPORCIONALES Y SUS PROPIEDADES

Proposición 5.1. Para todo $t > 0$ se cumple

$$\frac{1}{e} \leq \sin_p(t) \leq e,$$

y ambas cotas son óptimas.

Demostración. Dado que para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene $-1 \leq \sin t \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectiva, por lo que al componer se obtiene

$$-1 \leq \sin(\log t) \leq 1, \quad x > 0.$$

Dado que la función exponencial es estrictamente creciente concluimos

$$e^{-1} \leq e^{\sin(\log t)} \leq e \implies \frac{1}{e} \leq \sin_p(t) \leq e.$$

Para ver que las cotas son óptimas, basta notar que $\sin t = 1$ si $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y $\sin t = -1$ si $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $x = e^t$ se obtiene

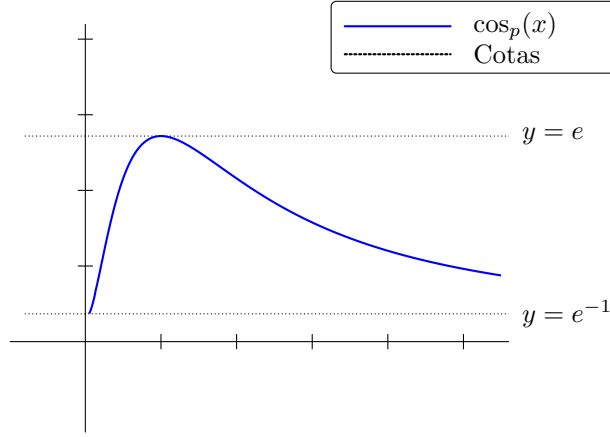
$$\sin_p\left(e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) = e, \quad \sin_p\left(e^{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}\right) = \frac{1}{e},$$

de modo que los extremos se alcanzan. □

Análogamente para $t > 0$, se cumple igualmente

$$\frac{1}{e} \leq \cos_p(x) \leq e,$$

□



Observamos que las funciones trigonométricas también cumplen identidades fundamentales similares a las usuales

Proposición 5.2. Para todo $t > 0$, se cumple $\cos_p^{\{2\}}(t) \oplus \sin_p^{\{2\}}(t) = e$

6. NÚMEROS COMPLEJOS

Proposición 6.1 (Unidad imaginaria proporcional). En el álgebra clásica, la unidad imaginaria i se caracteriza por $i^2 = -1$. En el contexto proporcional, consideramos la ecuación

$$x^{\{2\}} = e^{-1}.$$

Definimos i_p como una solución principal de dicha ecuación.

Demostración. Bajo el isomorfismo

$$x^{\{n\}} = \exp((\log x)^n),$$

la ecuación $x^{\{2\}} = e^{-1}$ equivale a

$$\exp((\log x)^2) = e^{-1}.$$

Por tanto,

$$(\log x)^2 = -1,$$

y en \mathbb{C} se obtiene $\log x = \pm i$. En consecuencia,

$$x = e^{\pm i}.$$

Tomando la rama principal, definimos $i_p := e^i$, y entonces se cumple

$$i_p^{\{2\}} = e^{-1}.$$

□

En consecuencia, definimos la *unidad imaginaria proporcional* (rama principal) mediante

$$i_p := e^i.$$

Esta elección se justifica porque i_p verifica la identidad

$$i_p^{\{2\}} = i_p \odot i_p = \frac{1}{e} = \ominus e,$$

la cual adoptamos como propiedad caracterizante de la unidad imaginaria proporcional.

Definición 6.1 (Número complejo proporcional). Un número complejo proporcional es cualquier expresión de la forma

$$(3) \quad z = a \oplus i_p \odot b,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^+$. Llamamos

$$\operatorname{Re}(z) := a \quad e \quad \operatorname{Im}(z) := b$$

a la parte real proporcional y parte imaginaria proporcional, *respectivamente*.

Definición 6.2 (Igualdad). Sean $z_1 = a_1 \oplus (i_p \odot b_1)$ y $z_2 = a_2 \oplus (i_p \odot b_2)$ números complejos proporcionales. Decimos que $z_1 = z_2$ si y solo si

$$a_1 = a_2 \quad y \quad b_1 = b_2,$$

con igualdad entendida en \mathbb{R}^+ .

6.1. Operaciones aritméticas. Sean $z_1 = a_1 \oplus i_p \odot b_1$ y $z_2 = a_2 \oplus i_p \odot b_2$.

Definición 6.3 (Suma y resta proporcionales). *Definimos*

$$(4) \quad z_1 \oplus z_2 := (a_1 \oplus a_2) \oplus i_p \odot (b_1 \oplus b_2),$$

$$(5) \quad z_1 \ominus z_2 := (a_1 \ominus a_2) \oplus i_p \odot (b_1 \ominus b_2).$$

Definición 6.4 (Producto proporcional). *Definimos el producto por*

$$(6) \quad z_1 \odot z_2 := (a_1 \oplus i_p \odot b_1) \odot (a_2 \oplus i_p \odot b_2) = \left[(a_1 \odot a_2) \ominus (b_1 \odot b_2) \right] \oplus i_p \odot \left[(a_1 \odot b_2) \oplus (a_2 \odot b_1) \right].$$

6.2. Conjugado y módulo.

Definición 6.5 (Conjugado proporcional). Si $z = a \oplus (i_p \odot b)$, definimos su conjugado por

$$(7) \quad \bar{z} := a \ominus i_p \odot b.$$

Definición 6.6 (Módulo proporcional). Para $z = a \oplus (i_p \odot b)$ definimos el módulo proporcional al cuadrado como

$$(8) \quad |z|_p^{\{2\}} := z \odot \bar{z} = a^{\{2\}} \oplus b^{\{2\}}.$$

Definición 6.7 (División proporcional). Si $z_2 \neq 1$, definimos

$$(9) \quad z_1 \oslash z_2 := (z_1 \odot \bar{z}_2) \oslash |z_2|_p^{\{2\}}.$$

Teorema 6.1 (Propiedades del conjugado). Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}_p$ se cumple:

1. **Involución:** $\bar{\bar{z}} = z$.
2. **Compatibilidad con la suma:** $\overline{z \oplus w} = \bar{z} \oplus \bar{w}$.
3. **Compatibilidad con el producto:** $\overline{z \odot w} = \bar{z} \odot \bar{w}$.
4. **Compatibilidad con la división:** $\overline{z \oslash w} = \bar{z} \oslash \bar{w}$.
5. **Producto con el conjugado (módulo al cuadrado):** si $z = a \oplus i_p \odot b$, entonces

$$z \odot \bar{z} = a^{\{2\}} \oplus b^{\{2\}} = |z|_p^{\{2\}}.$$

6.3. Leyes algebraicas.

Teorema 6.2 (Leyes fundamentales). Para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_q$ se verifican:

1. **Conmutatividad:**

$$z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1, \quad z_1 \odot z_2 = z_2 \odot z_1.$$

2. **Asociatividad:**

$$z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3, \quad z_1 \odot (z_2 \odot z_3) = (z_1 \odot z_2) \odot z_3.$$

3. **Distributividad:**

$$z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \odot z_2) \oplus (z_1 \odot z_3).$$

6.4. La exponencial compleja. Ahora presentamos la identidad homóloga de Euler en el contexto proporcional. Dado que ya se han establecido las propiedades básicas de la exponencial, el logaritmo y las funciones trigonométricas dentro de la estructura proporcional, el objetivo ahora es articular cómo estas piezas se integran en una sola relación fundamental. En particular, mostraremos que la exponencial compleja proporcional admite una descomposición análoga a la clásica, expresándose en términos de \cos_p y \sin_p mediante la unidad imaginaria proporcional i_p . Esta identidad servirá como una herramienta recurrente en los desarrollos y aplicaciones posteriores.

Proposición 6.2 (Identidad de Euler proporcional). Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y sea $i_p := e^i$ (rama principal), de modo que $\log(i_p) = i$. Entonces, asumiendo \oplus como el producto usual, se cumple

$$e^{i_p \odot a} = \cos_p(a) \oplus i_p \odot \sin_p(a).$$

Demostración. Por definición del producto proporcional,

$$i_p \odot a = e^{(\log i_p)(\log a)}.$$

Como $\log(i_p) = i$, se obtiene

$$i_p \odot a = e^{i \log a}.$$

Aplicando la fórmula clásica de Euler con $t = \log a$, resulta

$$e^{i \log a} = \cos(\log a) + i \sin(\log a).$$

Por consiguiente,

$$e^{i_p \odot a} = e^{\cos(\log a) + i \sin(\log a)} = e^{\cos(\log a)} e^{i \sin(\log a)}.$$

A continuación, notamos que $\log(i_p) = \log(e^i) = i$ y, por la definición de \sin_p , se cumple

$$\log(\sin_p(a)) = \log(e^{\sin(\log a)}) = \sin(\log a).$$

Por lo tanto,

$$i_p \odot \sin_p(a) = e^{(\log i_p)(\log(\sin_p(a)))} = e^{i \sin(\log a)} = e^{i \sin(\log a)}.$$

Asimismo, por definición,

$$\cos_p(a) = e^{\cos(\log a)}.$$

Sustituyendo estas identidades en la descomposición anterior, concluimos que

$$e^{i_p \odot a} = \cos_p(a) (i_p \odot \sin_p(a)).$$

Finalmente, como en esta subsección identificamos \oplus con el producto usual, la igualdad anterior se reescribe como

$$e^{i_p \odot a} = \cos_p(a) \oplus i_p \odot \sin_p(a),$$

lo cual completa la demostración. \square

Proposición 6.3 (Límite importante). *Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+$. Suponga que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ominus a \odot x} = 1.$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ominus a \odot x \oplus i_p \odot b \odot x} = 1.$$

Demostración. Por la propiedad exponencial, se cumple

$$(10) \quad e^{\ominus a \odot x \oplus i_p \odot b \odot x} = e^{\ominus a \odot x} \odot e^{i_p \odot b \odot x}.$$

Aplicando la identidad de Euler proporcional,

$$(11) \quad e^{i_p \odot b \odot x} = \cos_p(b \odot x) \oplus i_p \odot \sin_p(b \odot x), \quad x > 0,$$

y sustituyendo en (10), obtenemos

$$(12) \quad e^{\ominus a \odot x \oplus i_p \odot b \odot x} = \left(e^{\ominus a \odot x} \odot \cos_p(b \odot x) \right) \oplus \left(i_p \odot (e^{\ominus a \odot x} \odot \sin_p(b \odot x)) \right).$$

Usando las cotas conocidas de las funciones trigonométricas proporcionales, en particular

$$\frac{1}{e} \leq \cos_p(b \odot x) \leq e, \quad x > 0,$$

y multiplicando por $e^{\ominus a \odot x} \in \mathbb{R}^+$, se deduce

$$(13) \quad \left(\frac{1}{e} \right) \odot e^{\ominus a \odot x} \leq e^{\ominus a \odot x} \odot \cos_p(b \odot x) \leq e \odot e^{\ominus a \odot x}.$$

Al hacer $x \rightarrow \infty$ y usando la hipótesis $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ominus a \odot x} = 1$, por el teorema del sándwich se obtiene

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\ominus a \odot x} \odot \cos_p(b \odot x)) = 1.$$

De manera análoga (utilizando la acotación correspondiente para \sin_p), se concluye

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\ominus a \odot x} \odot \sin_p(b \odot x)) = 1.$$

Finalmente, combinando (12) con (14) y (15), se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ominus a \oplus i_p \odot b \odot x} = 1,$$

como se quería. \square

7. LA DERIVADA PROPORCIONAL

Definición 7.1 (Derivada proporcional). Sea $I \subset \mathbb{R}^+$ y sea $f_p : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función. Dado $x \in I$, suponemos que para todo h suficientemente cercano a 1. Definimos la derivada proporcional de f_p en x por

$$\frac{d_{\odot} f_p}{d_{\odot} x}(x) := f'_p(x) := \lim_{h \rightarrow 1} \left(f_p(x \oplus h) \ominus f_p(x) \right) \oslash h,$$

si el límite existe. Equivalentemente, tenemos

$$f'_p(x) = \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{f_p(xh)}{f_p(x)} \right) \oslash h.$$

7.1. Reglas de derivación. En esta subsección enunciamos reglas básicas de derivación en el marco proporcional. En lo que sigue, asumimos que las derivadas proporcionales involucradas existen.

Proposición 7.1 (Constante). Sea $c \in \mathbb{R}^+$ constante. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot} x} c = 1.$$

Proposición 7.2 (Identidad). Para todo $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot} x} x = e.$$

Proposición 7.3 (Potencia proporcional). Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $f_p(x) = x^{\{n\}}$ se cumple

$$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot} x} x^{\{n\}} = x^{\{n\}} \oslash e^n.$$

Proposición 7.4 (Regla de escala). Sea $a \in \mathbb{R}^+$ constante y sea f_p derivable proporcionalmente. Defina $g_p(x) := a \odot f_p(x)$. Entonces

$$g'_p(x) = a \odot f'_p(x).$$

Proposición 7.5 (Regla de producto proporcional). Sean $f_p, g_p : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ derivables proporcionalmente. Entonces

$$(f_p \odot g_p)'(x) = (f'_p(x) \odot g_p(x)) \oplus (f_p(x) \odot g'_p(x)).$$

Proposición 7.6 (Regla de cociente proporcional). Sean $f_p, g_p : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ derivables proporcionalmente y $g_p(x) \neq 1$. Entonces

$$(f_p \oslash g_p)'(x) = (f'_p(x) \odot g_p(x) \ominus f_p(x) \odot g'_p(x)) \oslash g_p(x)^{\{2\}}.$$

Proposición 7.7 (Regla de la cadena). Sean $g_p : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $f_p : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ derivables proporcionalmente, con $g_p(I) \subset J$. Entonces

$$(f_p \circ g_p)'(x) = (f'_p(g_p(x))) \odot g'_p(x).$$

7.2. Vinculación con la derivada clásica. Recordemos que, dada $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, su función proporcional asociada es

$$f_p(x) = e^{f_c(\log x)}, \quad x > 0.$$

Teorema 7.1 (Teorema de Evaluación). Sea $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y defina

$$f_p(x) = \exp(f_c(\log x)), \quad x > 0.$$

Entonces f_p es derivable proporcionalmente en $(0, \infty)$ y se cumple

$$f'_p(x) = \exp(f'_c(\log x)), \quad x > 0.$$

Ejemplo 7.1 (Evaluación de una derivada proporcional). Sea

$$f_p(x) := \sin_p(e^2 \odot x), \quad x > 0.$$

La función clásica asociada es

$$f_c(x) = \sin(2x),$$

por lo que

$$f'_c(x) = 2 \cos(2x) \quad \implies \quad f'_c(\log x) = 2 \cos(2 \log x).$$

TABLA 3. Derivadas básicas: forma clásica y su forma homóloga proporcional.

Cálculo clásico	Cálculo proporcional
$\frac{d}{dx} \sin(e^a x) = e^a \cos(e^a x)$	$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot}x} \sin_p(e^a \odot x) = e^a \odot \cos_p(e^a \odot x)$
$\frac{d}{dx} \cos(e^a x) = -e^a \sin(e^a x)$	$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot}x} \cos_p(e^a \odot x) = \ominus e \odot e^a \odot \sin_p(e^a \odot x)$
$\frac{d}{dx} \exp(e^a x) = e^a \exp(e^a x)$	$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot}x} \exp(e^a \odot x) = e^a \odot \exp(e^a \odot x)$

Aplicando el Teorema de evaluación, se obtiene

$$f'_p(x) = \exp(f'_c(\log x)) = \exp(2 \cos(2 \log x)).$$

En particular, para $x = e^{\pi/8}$ se tiene $\log x = \pi/8$ y $2 \log x = \pi/4$, de modo que

$$f'_p(e^{\pi/8}) = \exp\left(2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \exp(\sqrt{2}).$$

Ejemplo 7.2. Sea

$$f_p(x) := \sin_p(e^2 \odot x), \quad x > 0.$$

Usando la regla de derivación (cadena) para funciones trigonométricas proporcionales, se tiene

$$\frac{d_{\odot}}{d_{\odot}x} \sin_p(e^2 \odot x) = e^2 \odot \cos_p(e^2 \odot x),$$

y por tanto

$$f'_p(x) = e^2 \odot \cos_p(e^2 \odot x).$$

Evaluando en $x = e^{\pi/8}$ y usando $e^2 \odot x = x^2$, obtenemos

$$f'_p(e^{\pi/8}) = e^2 \odot \cos_p(e^2 \odot e^{\pi/8}) = e^2 \odot \cos_p(e^{\pi/4}).$$

Como $\cos_p(t) = \exp(\cos(\log t))$, se cumple

$$\cos_p(e^{\pi/4}) = \exp\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Finalmente, usando $a \odot b = a^{\log b}$,

$$e^2 \odot \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (e^2)^{\log(\exp(\frac{\sqrt{2}}{2}))} = e^{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \exp(\sqrt{2}).$$

En consecuencia,

$$f'_p(e^{\pi/8}) = \exp(\sqrt{2}).$$

Este cálculo confirma el mismo valor obtenido mediante el Teorema de evaluación; en particular, para evaluaciones numéricas suele ser más directo trabajar con la función clásica asociada.

8. TRANSFORMADA DE FOURIER PROPORCIONAL

8.1. Definición y propiedades.

Definición 8.1 (Espacio $\mathcal{L}_p^1(0, \infty)$). Sea $|\cdot|_p$ un módulo en \mathbb{C}_p . Definimos

$$\mathcal{L}_p^1(0, \infty) := \left\{ g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}_p : \int_0^{\infty} |g(t)|_p d_{\odot}t < \infty \right\}.$$

Definición 8.2 (Transformada de Fourier proporcional (extendida)). Sea $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}_p$ una función. Definimos su transformada de Fourier proporcional por

$$(16) \quad \widehat{G}(\xi) := \mathcal{F}_p\{g\}(\xi) = e^{\ominus\sqrt{2}\pi} \odot \int_0^{\infty} g(t) \odot e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t} d_{\odot}t, \quad \xi \in \mathbb{R}^+.$$

Proposición 8.1 (Linealidad proporcional). *Sean $f, g \in \mathcal{L}_p^1(0, \infty)$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mathcal{F}_p\{a \odot f(t) \oplus b \odot g(t)\}(\xi) = a \odot \widehat{F}(\xi) \oplus b \odot \widehat{G}(\xi),$$

donde $\widehat{F}(\omega) = \mathcal{F}_p\{f(t)\}(\omega)$ y $\widehat{G}(\omega) = \mathcal{F}_p\{g(t)\}(\omega)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p\{a \odot f(t) \oplus b \odot g(t)\} &= e^{\ominus\sqrt{2\pi}} \odot \int_0^\infty (a \odot f(t) \oplus b \odot g(t)) \odot e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t} d_{\odot t} \\ &= e^{\ominus\sqrt{2\pi}} \odot \int_0^\infty \left[(a \odot f(t) \odot e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t}) \oplus (b \odot g(t) \odot e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t}) \right] d_{\odot t} \\ &= \left(e^{\ominus\sqrt{2\pi}} \odot \int_0^\infty a \odot f(t) \odot e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t} d_{\odot t} \right) \oplus \left(e^{\ominus\sqrt{2\pi}} \odot \int_0^\infty b \odot g(t) \odot e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t} d_{\odot t} \right) \\ &= a \odot \widehat{F}(\xi) \oplus b \odot \widehat{G}(\xi). \end{aligned}$$

□

Proposición 8.2 (Traslación proporcional). *Sea $t_0 \in \mathbb{R}^+$ y sea $f \in \mathcal{L}_p^1(0, \infty)$. Defina $\widehat{F}(\xi) = \mathcal{F}_p\{f(t)\}(\xi)$. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mathcal{F}_p\{f(t \ominus t_0)\}(\xi) = e^{\ominus i_p \odot \xi \odot t_0} \odot \widehat{F}(\xi).$$

Proposición 8.3 (Modulación proporcional). *Sea $\xi_0 \in \mathbb{R}^+$ y sea $f \in \mathcal{L}_p^1(1, \infty)$. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mathcal{F}_p\{e^{i_p \odot \xi_0 \odot t} \odot f(t)\}(\xi) = \widehat{F}(\xi \ominus \xi_0).$$

Proposición 8.4 (Escalamiento proporcional). *Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y sea $f \in \mathcal{L}_p^1(1, \infty)$. Defina $f_a(t) := f(a \odot t)$. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^+$,*

$$\mathcal{F}_p\{f(a \odot t)\}(\xi) = (e \odot |a|_p) \odot \widehat{F}(\xi \oslash a).$$

8.2. Teorema de evaluación.

Proposición 8.5 (Vinculación con la transformada clásica). *Sea $g \in \mathcal{L}_p^1(0, \infty)$ y sea g_c su función clásica asociada dada por $f_p(t) = e^{f_c(\log t)}$. Entonces, para todo $\xi \in \mathbb{R}^+$, se cumple*

$$(17) \quad \mathcal{F}_p\{g\}(\xi) = \exp\left(\mathcal{F}\{g_c\}(\ln \xi)\right).$$

REFERENCIAS

- [1] W. Campillay-Llanos, *Cálculo proporcional: un maravilloso recorrido por el mundo multiplicativo*, Undergraduate thesis, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, 2007.
- [2] W. Campillay-Llanos and F. Guevara-Morales, *Gelfond's constant and proportional arithmetic*, Sesión Álgebra y Teoría de Números, XXVIII Jornada Matemática de la Zona Sur, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile, 22–24 abril, 2015.
- [3] W. Campillay-Llanos and F. Guevara-Morales, *Proportional algebraic curves*, Sesión de Geometría, XXXI Jornada Matemática de la Zona Sur, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile, 25–27 abril, 2018.
- [4] W. Campillay-Llanos, F. Guevara, M. Pinto, and R. Torres, *Differential and integral proportional calculus: how to find a primitive for $f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-(1/2)x^2}$* , International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (2020), doi: 10.1080/0020739X.2020.1763489.
- [5] M. Pinto, R. Torres, W. Campillay-Llanos, and F. Guevara-Morales, *Applications of proportional calculus and a non-Newtonian logistic growth model*, Proyecciones (Antofagasta) **39**(6) (2020), doi: 10.22199/issn.0717-6279-2020-06-0090.
- [6] M. Pinto and W. Campillay-Llanos, *Proportional differential equations*, VIII Congreso de Análisis Funcional y Ecuaciones de Evolución, Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile, 20–23 noviembre, 2013.

CARLOS M. CRUZ-RODAS
 MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, UNAH – CU, TEGUCIGALPA, D. C., HONDURAS
Email address: carlos.cruz@unah.edu.hn

MARLON M. LÓPEZ-FLORES
 LABORATORIO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL, ROBÓTICA E CIBERNÉTICA - LIARC DEL INSTITUTO MILITAR DE INGENIARÍA
 - IME-RJ (BRASIL)
Email address: marlon.michael@ime.eb.br

WILLIAM CAMPILAY-LLANOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO, TEMUCO 4813302, CHILE.
Email address: `wcampillay@uct.cl`

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE LAS ECUACIONES DE CALOR Y ONDA EN EL CONTEXTO DE ARITMÉTICAS NO NEWTONIANAS USANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

J.D. ZUNIGA-VARELA, M. M. LÓPEZ-FLORES, W. CAMPILLAY-LLANOS

RESUMEN. En esta tesis se estudian soluciones numéricas de las ecuaciones de calor y de onda formuladas en el contexto de aritméticas no newtonianas, con énfasis en la aritmética proporcional. A partir del marco de las aritméticas no diophantinas se revisan las definiciones de derivada e integral proporcional y se muestra cómo ciertas integrales pueden escribirse en una forma logarítmica equivalente. Esta representación permite conectar el cálculo proporcional con herramientas del análisis clásico, en particular con el teorema de Taylor, que se adopta como eje para la construcción de métodos numéricos. Se proponen esquemas de diferencias finitas y métodos de tipo Taylor adaptados a la aritmética proporcional para aproximar soluciones de problemas modelo de difusión y propagación. Finalmente, se *plantea* el análisis numérico de consistencia, estabilidad y convergencia de los métodos propuestos y su comparación con esquemas clásicos, con el propósito de evaluar las ventajas y limitaciones de trabajar en un contexto no newtoniano.

ABSTRACT. This thesis studies numerical solutions of the heat and wave equations formulated in the framework of non-Newtonian arithmetics, with emphasis on proportional arithmetic. Within the setting of non-diophantine arithmetics, we review the definitions of proportional derivative and integral and show how certain integrals can be written in an equivalent logarithmic form. This representation makes it possible to connect proportional calculus with tools of classical analysis, in particular with Taylor's theorem, which is used as the main ingredient to construct numerical methods. We propose finite-difference schemes and Taylor-type methods adapted to proportional arithmetic in order to approximate solutions of model diffusion and wave-propagation problems. Finally, we *outline* a numerical analysis of consistency, stability and convergence for the proposed methods, together with a comparison against classical schemes, aiming to assess the advantages and limitations of working in a non-Newtonian setting.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales constituyen uno de los lenguajes centrales de la matemática aplicada. Mediante ellas es posible describir fenómenos como la difusión de calor en un sólido, la propagación de ondas mecánicas o electromagnéticas y la evolución temporal de sistemas biológicos y económicos. Cuando no es posible obtener soluciones cerradas, se recurre a métodos numéricos que permiten aproximar la solución con ayuda de una computadora.

Históricamente, estos métodos se han construido casi exclusivamente en el marco de la aritmética y el cálculo clásicos. No obstante, trabajos como los de Grossman y Katz sobre el *Non-Newtonian Calculus* [1], así como las aritméticas no diophantinas estudiadas por Burgin [2], muestran que es posible redefinir las operaciones básicas y obtener estructuras aritméticas alternativas, sobre las cuales también se pueden formular derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales.

En este boletín se presenta una síntesis del marco algebraico y analítico de la aritmética proporcional y del cálculo proporcional, destacando la representación logarítmica de la integral proporcional y su papel en la formulación de un teorema de Taylor proporcional. Esta conexión sirve como punto de partida para el planteamiento de esquemas numéricos (en particular, de tipo Taylor y de diferencias finitas) orientados a problemas modelo asociados con las ecuaciones del calor y de la onda.

Palabras y frases clave. aritmética no newtoniana, aritmética proporcional, cálculo proporcional, diferencias finitas, ecuaciones de calor y de onda, métodos numéricos, teorema de Taylor, modelación matemática.

2. MARCO TEÓRICO: ARITMÉTICA PROPORCIONAL Y CÁLCULO PROPORCIONAL

Dentro de las aritméticas no newtonianas, la aritmética proporcional proporciona un marco en el que las operaciones reflejan relaciones esencialmente multiplicativas. Desde el punto de vista de las aritméticas no diophantinas de Burgin [2], estas estructuras se obtienen a partir de una función generadora biyectiva $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de números reales. Dicha función permite *transportar* la suma y el producto clásicos a una nueva aritmética sobre I , definiendo operaciones \oplus_f y \odot_f mediante

$$\begin{aligned} a \oplus_f b &:= f^{-1}(f(a) + f(b)), & a \ominus_f b &:= f^{-1}(f(a) - f(b)), \\ a \odot_f b &:= f^{-1}(f(a) f(b)), \end{aligned}$$

para $a, b \in I$. Con estas definiciones, la estructura (I, \oplus_f, \odot_f) resulta isomorfa al cuerpo usual $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y hereda propiedades como conmutatividad, asociatividad, existencia de neutros y de inversos [2].

Una elección particular de la función generadora conduce a distintas aritméticas no newtonianas. El trabajo clásico de Grossman y Katz [1] muestra que, para generadores adecuados, se obtienen familias de cálculos (geométrico, bigeométrico, etc.) adaptados a contextos de crecimiento multiplicativo. En el caso de la aritmética proporcional, se toma como generador el logaritmo natural y se restringe la atención a $I = \mathbb{R}_+$. Con $f(x) = \ln(x)$, las operaciones anteriores se especializan en

$$\begin{aligned} a \oplus_p b &:= \exp(\ln a + \ln b) = ab, & a \ominus_p b &:= \exp(\ln a - \ln b) = \frac{a}{b}, \\ a \odot_p b &:= \exp(\ln a \cdot \ln b) = \exp((\ln a)(\ln b)), \end{aligned}$$

para $a, b \in \mathbb{R}_+$. En esta aritmética, el neutro aditivo para \oplus_p es 1 (pues $a \oplus_p 1 = a$), mientras que el neutro multiplicativo para \odot_p es e (pues $a \odot_p e = a$). Así, $(\mathbb{R}_+, \oplus_p, \odot_p)$ constituye un cuerpo isomorfo a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, pero con una interpretación intrínsecamente proporcional de las operaciones.

Notación. En aritmética proporcional, la *división proporcional* se denota por \oslash y se define por

$$a \oslash b := a \ominus_p b = \exp(\ln a - \ln b) = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+.$$

En particular, aunque \oslash coincide numéricamente con la división usual en \mathbb{R}_+ , la notación permite distinguir cuándo se está operando en el marco proporcional.

Cálculo proporcional. Sobre esta base algebraica se construye el cálculo proporcional, en el que se definen derivadas e integrales coherentes con $(\mathbb{R}_+, \oplus_p, \odot_p)$. El cálculo diferencial e integral proporcional desarrollado por Campillay-Llanos y colaboradores introduce operadores interpretables como tasas de cambio y acumulación *relativas*, estructuralmente compatibles con la aritmética proporcional [3]. Además, existe un teorema fundamental del cálculo proporcional que vincula derivación e integración en forma análoga al caso clásico [3].

Derivada proporcional. Sea $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. La derivada proporcional de f en $x_0 \in \mathbb{R}_+$ puede definirse como

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \ominus_p f(x_0)}{x \ominus_p x_0}.$$

Usando la notación de división proporcional \oslash (con $a \oslash b = a \ominus_p b = \frac{a}{b}$), esta expresión puede escribirse de forma compacta como

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{f(x_0)} \oslash \frac{x}{x_0} \right).$$

Esta expresión refleja que se comparan variaciones *relativas* de la función y de la variable independiente [3]. De forma equivalente, usando el incremento multiplicativo $h = \frac{x}{x_0}$ (de modo que $x = x_0 h$), se obtiene

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{f(x_0 h)}{f(x_0)} \oslash h \right).$$

Forma logarítmica (cálculo clásico). La definición anterior puede reescribirse en términos de logaritmos naturales como

$$\tilde{f}(x) = \frac{d \ln(f(x))}{d \ln(x)}.$$

Aquí la notación $\frac{d}{d \ln(x)}$ se entiende en el *sentido clásico*: si $s = \ln(x)$ y $F(s) = \ln(f(e^s))$, entonces

$\tilde{f}(x) = \frac{dF}{ds}$. Si además f es derivable clásicamente, por regla de la cadena se obtiene la representación clásica

$$\tilde{f}(x) = \frac{d \ln(f(x))}{d \ln(x)} = \frac{\frac{d}{dx} \ln(f(x))}{\frac{d}{dx} \ln(x)} = \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{1}{x}} = \frac{x f'(x)}{f(x)}.$$

Por tanto, $\tilde{f}(x)$ mide una tasa de variación adimensional, apropiada para dinámicas de tipo multiplicativo [3].

Integral proporcional. De forma dual, la integral proporcional de f en $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ se define como el operador inverso (en sentido proporcional) de la derivada proporcional [3]. En particular, puede expresarse en forma logarítmica como

$$\int_a^b f(x) \tilde{d}x = \exp\left(\int_a^b \frac{\ln(f(x))}{x} dx\right).$$

Una motivación natural de esta fórmula se obtiene con el cambio $s = \ln(x)$: si $x = e^s$, entonces $dx/x = ds$, y la acumulación proporcional se traduce en la acumulación aditiva de $\ln(f)$ respecto de s , regresando luego a la escala original con la exponencial [3]. Esta representación permite reutilizar técnicas del cálculo clásico (estimaciones integrales, expansiones tipo Taylor, etc.) al analizar problemas formulados en el marco proporcional.

Finalmente, trabajos posteriores de Pinto, Torres y coautores muestran cómo este marco permite reformular modelos diferenciales conocidos (por ejemplo, variantes no newtonianas del crecimiento logístico) y discutir cambios cualitativos en la interpretación de parámetros y soluciones cuando la dinámica se describe en términos de tasas proporcionales [4, 5].

Observación 2.1 (Propiedades básicas y reglas de cálculo proporcional). Al igual que en el cálculo clásico, la derivada e integral proporcional cumplen reglas que facilitan el análisis de funciones. En lo sucesivo asumimos $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (en particular $f(x), g(x) > 0$) y la regularidad necesaria para que existan los operadores involucrados.

A. Propiedades de la derivada proporcional.

1. Forma logarítmica y clásica.

$$\tilde{f}(x) = \frac{d \ln(f(x))}{d \ln(x)} \quad (\text{sentido clásico}), \quad \tilde{f}(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)} \quad \text{si } f \text{ es derivable clásicamente.}$$

2. **Constante.** Si $f(x) \equiv c$ con $c > 0$, entonces $\tilde{f}(x) = 0$.

3. **Identidad.** Para $f(x) = x$, se tiene $\tilde{f}(x) = 1$.

4. **Potencias (caso base).** Si $f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces $\tilde{f}(x) = k$.

5. **Producto y cociente.**

$$(\widetilde{fg})(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x), \quad \left(\widetilde{\frac{f}{g}}\right)(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{g}(x).$$

6. **Potencia de una función.** Para $c \in \mathbb{R}$,

$$(\widetilde{f})^c(x) = c \tilde{f}(x).$$

7. **Linealidad (en el sentido multiplicativo).** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(\widetilde{f^\alpha \cdot g^\beta})(x) = \alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{g}(x).$$

8. **Regla de la cadena (forma operativa).** Si $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ son proporcionalmente derivables, entonces

$$\widetilde{(f \circ g)}(x) = \widetilde{f}(g(x)) \widetilde{g}(x),$$

lo cual puede interpretarse al introducir la variable auxiliar $s = \ln(x)$, donde la derivación se reduce a la regla clásica de la cadena.

9. **Ejemplos clásicos (si están definidos en \mathbb{R}_+).** Para $\widetilde{f(x)} = e^x$ se obtiene $\widetilde{(e^x)} = x$. Para $f(x) = \ln(x)$ (por ejemplo en $x > 1$ si se exige $f(x) > 0$), $\widetilde{(\ln x)} = \frac{1}{\ln x}$.

B. Propiedades de la integral proporcional.

1. **Representación logarítmica.**

$$\int_a^b f(x) \widetilde{dx} = \exp\left(\int_a^b \frac{\ln(f(x))}{x} dx\right).$$

2. **Intervalo nulo (caso $a = b$).**

$$\int_a^a f(x) \widetilde{dx} = 1.$$

3. **Caso constante.** Si $f(x) \equiv c$, entonces

$$\int_a^b f(x) \widetilde{dx} = c^{\ln(b/a)}.$$

4. **Producto punto a punto.**

$$\int_a^b (f(x)g(x)) \widetilde{dx} = \left(\int_a^b f(x) \widetilde{dx}\right) \left(\int_a^b g(x) \widetilde{dx}\right).$$

5. **Integral proporcional de una potencia.** Si f es continua y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b f(x)^\alpha \widetilde{dx} = \left(\int_a^b f(x) \widetilde{dx}\right)^\alpha.$$

6. **Cambio $s = \ln(x)$.** Si $x = e^s$ y $dx/x = ds$, entonces

$$\int_a^b f(x) \widetilde{dx} = \exp\left(\int_{\ln a}^{\ln b} \ln(f(e^s)) ds\right).$$

7. **Cambio de límites (concatenación).** Para $a < b < c$,

$$\int_a^c f(x) \widetilde{dx} = \left(\int_a^b f(x) \widetilde{dx}\right) \left(\int_b^c f(x) \widetilde{dx}\right).$$

C. Teorema fundamental (forma operativa). Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua. Si existe $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\widetilde{F(x)} = f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x) \widetilde{dx} = \frac{F(b)}{F(a)}.$$

[3, 4, 5]

3. DEL TEOREMA DE TAYLOR A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

El hecho de que la integral proporcional admita una representación en forma logarítmica hace posible trasladar al marco proporcional herramientas análogas a las del cálculo clásico. En particular, en el cálculo clásico el teorema de Taylor es central para el análisis local de funciones y constituye la base de numerosos métodos numéricos para ecuaciones diferenciales, como el método de Euler, los métodos de Taylor de orden superior y familias de esquemas de Runge–Kutta [6]. Estos métodos se apoyan en expandir la solución alrededor de un punto y controlar el resto mediante estimaciones ligadas a las derivadas.

En el marco proporcional, el cambio de variable $s = \ln(x)$ permite interpretar la variación local en una escala aditiva (logarítmica) y regresar luego al marco original mediante la exponencial. Esta idea conduce a un análogo proporcional del teorema de Taylor, donde los términos de la expansión quedan expresados en función de derivadas proporcionales de orden superior [3]. En lo sucesivo, $\tilde{f}^{(k)}(x_0)$ denota la *derivada proporcional de orden k* evaluada en x_0 (esto es, la iteración del operador derivada proporcional k veces, cuando está bien definido).

Teorema 3.1 (Teorema de Taylor proporcional). *Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función suficientemente regular que admite derivadas proporcionales hasta orden n en un entorno de $x_0 > 0$. Entonces*

$$f(x) = f(x_0) \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \tilde{f}^{(k)}(x_0) \ln^k\left(\frac{x}{x_0}\right) + R_n(x)\right),$$

donde $R_n(x)$ representa el término de resto proporcional.

[3, 6]

Observación 3.2 (Truncaciones de primer y segundo orden). Al truncar el Teorema 3.1 en orden 1, se obtiene la aproximación

$$f(x) \approx f(x_0) \exp\left(\tilde{f}(x_0) \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right) = f(x_0) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\tilde{f}(x_0)}.$$

Al truncar en orden 2,

$$f(x) \approx f(x_0) \exp\left(\tilde{f}(x_0) \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{1}{2} \tilde{f}^{(2)}(x_0) \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right)\right).$$

[3, 6]

Desde la perspectiva numérica, estas expansiones permiten derivar esquemas de avance análogos a los clásicos, pero formulados en términos proporcionales. Por ejemplo, en una ecuación diferencial proporcional de primer orden, la truncación de primer orden conduce a un esquema tipo Euler (proporcional), mientras que incluir términos adicionales conduce a métodos tipo Taylor de orden superior. La teoría clásica de métodos numéricos para EDOs proporciona el marco para analizar consistencia y orden de convergencia de estos esquemas [6].

En este contexto, la tesis propone utilizar versiones proporcionales de las expansiones de Taylor para construir nuevos esquemas numéricos, en particular esquemas de diferencias finitas en tiempo y espacio, que aproximen soluciones de ecuaciones diferenciales formuladas en la aritmética proporcional. En una primera etapa se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, estudiando consistencia y convergencia de los métodos resultantes. Posteriormente, se extiende la construcción a modelos en derivadas parciales, en particular a las ecuaciones del calor y de la onda en un contexto proporcional, tomando como referencia el tratamiento clásico de estas ecuaciones y de sus discretizaciones [7, 8].

4. MARCO TEÓRICO EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y MÉTODOS NUMÉRICOS

El estudio de las ecuaciones del calor y de la onda posee una larga tradición dentro del análisis de ecuaciones en derivadas parciales. Textos como el de Pinchover y Rubinstein [7] presentan bases teóricas para el tratamiento de estos modelos, incluyendo formulaciones en espacios de funciones apropiados, propiedades cualitativas de las soluciones y técnicas clásicas de resolución. En particular, las ecuaciones

del calor y de la onda se interpretan como prototipos de fenómenos de difusión y propagación, respectivamente, y sirven como modelos de referencia para el desarrollo de teoría general en ecuaciones en derivadas parciales.

Desde el punto de vista numérico, la obra de Holmes [6] y el texto de Vides [8] proporcionan un marco sistemático para el diseño y análisis de métodos numéricos basados en diferencias finitas, elementos finitos y otros esquemas de aproximación. En ellos se introducen conceptos como consistencia, estabilidad y convergencia, así como criterios prácticos para la construcción de mallas, la elección de pasos de tiempo y la evaluación del error numérico. Estos resultados se formulan en el contexto del cálculo clásico, pero su estructura general (esquemas de discretización, análisis de error y estudio de estabilidad) sirve como guía para adaptar ideas al marco de la aritmética proporcional.

La contribución de la tesis se sitúa precisamente en el cruce entre estos dos cuerpos teóricos: por un lado, el desarrollo reciente del cálculo proporcional y de las aritméticas no newtonianas [1, 2, 3, 4, 5]; por otro, la teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales y métodos numéricos para su resolución [6, 7, 8]. El objetivo es construir un puente entre ambos marcos, de manera que herramientas numéricas inspiradas en Taylor y en diferencias finitas puedan formularse de forma coherente en el contexto proporcional, preservando criterios de consistencia, estabilidad y convergencia en un sentido apropiado.

5. ESQUEMA METODOLÓGICO DEL TRABAJO

La estructura metodológica del trabajo combina tres componentes principales:

- **Desarrollo teórico:** revisión de la literatura sobre aritméticas no newtonianas, aritmética proporcional y cálculo proporcional [1, 2, 3, 4, 5]; formalización de las nociones de derivada e integral proporcional necesarias para formular ecuaciones diferenciales en este marco; y adaptación del teorema de Taylor a partir de la representación logarítmica.
- **Diseño de métodos numéricos:** construcción de esquemas de aproximación (en particular, de diferencias finitas y de tipo Taylor) definidos sobre la aritmética proporcional, incluyendo el análisis de consistencia, estabilidad y convergencia de dichos esquemas, guiado por la teoría clásica de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales [6, 8].
- **Implementación y experimentación numérica:** implementación computacional de los métodos propuestos y resolución de problemas modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales (ecuaciones del calor y de la onda), comparando el comportamiento numérico de los métodos proporcionales con métodos clásicos en términos de error, estabilidad y eficiencia [7, 8].

6. RESULTADOS ESPERADOS Y APORTES

Desde una perspectiva teórica, se espera que la investigación conduzca a una formulación sistemática de ecuaciones diferenciales en el marco de la aritmética proporcional, con énfasis en modelos tipo ecuación del calor y de la onda [3, 4]. Esto incluye clarificar las nociones de solución, estabilidad y comportamiento asintótico cuando la dinámica se describe mediante tasas proporcionales.

En el plano numérico, el objetivo es desarrollar métodos basados en expansiones tipo Taylor adaptadas al contexto proporcional, proporcionando esquemas alternativos a los métodos clásicos [6]. El análisis de consistencia, estabilidad y convergencia de estos esquemas permitirá comparar de manera crítica los métodos proporcionales y los tradicionales, identificando posibles ventajas o limitaciones en problemas donde la dinámica sea esencialmente relativa o multiplicativa [4, 5, 8].

Más allá de los resultados específicos, el trabajo busca contribuir a la consolidación de la aritmética proporcional y del cálculo proporcional como herramientas útiles en modelación matemática e ingeniería, motivando la exploración de marcos no convencionales para el estudio de ecuaciones diferenciales y sus aproximaciones numéricas.

REFERENCIAS

- [1] M. Grossman and R. Katz, *Non-Newtonian Calculus*, Lee Press, 1972.
- [2] M. Burgin, Non-diophantine arithmetics in mathematics, computer science and physics, *Information*, 11(5):257, 2020.
- [3] W. Campillay-Llanos, J. Guevara-Morales, M. Pinto and D. F. M. Torres, Differential and integral proportional calculus: A non-Newtonian approach, *Mathematics*, 8(6):912, 2020.
- [4] M. Pinto, D. F. M. Torres, W. Campillay-Llanos and J. Guevara-Morales, Applications of proportional calculus and a non-Newtonian logistic growth model, *Alexandria Engineering Journal*, 59(5):3269–3281, 2020.
- [5] D. F. M. Torres, On a non-Newtonian calculus of variations, *Mathematics*, 9(5):522, 2021.
- [6] M. H. Holmes, *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*, Springer, 2007.
- [7] Y. Pinchover and J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] F. Vides, *Métodos numéricos y modelación computacional*, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, 2021.

JOSÉ D. ZUNIGA-VARELA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS, CIUDAD UNIVERSITARIA, SEGUNDO PISO EDIFICIO F1, ESCUELA DE MATEMÁTICAS Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Dirección de correo electrónico: `jzuniga@unah.edu.hn`

MARLON M. LÓPEZ-FLORES

LABORATORIO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL, ROBÓTICA E CIBERNÉTICA (LIARC) INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA (IME-RJ), BRASIL

Dirección de correo electrónico: `marlon.michael@ime.eb.br`

WILLIAM CAMPILLAY-LLANOS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO, TEMUCO 4813302, CHILE.

Dirección de correo electrónico: `wcampillay@uct.cl`

TRANSFORMADA DE LAPLACE NO NEWTONIANA Y SUS PROPIEDADES

G. MALDONADO-BATRES, MARLON M. LÓPEZ-FLORES, WILLIAM CAMPILLAY-LLANOS

RESUMEN. Este trabajo presenta una versión no newtoniana de la transformada de Laplace construida sobre la aritmética proporcional, un marco alternativo al cálculo clásico que resulta especialmente útil para describir procesos de tipo multiplicativo. Se introducen sus propiedades fundamentales incluyendo linealidad proporcional, teoremas de traslación y reglas para derivadas e integrales proporcionales y se muestran transformadas básicas que permiten resolver ecuaciones diferenciales dentro de este nuevo entorno, ofreciendo una alternativa al enfoque clásico.

ABSTRACT. This work presents a non-Newtonian version of the Laplace transform built upon proportional arithmetic, an alternative framework to classical calculus that is particularly useful for describing multiplicative type processes. We introduce its fundamental properties including proportional linearity, translation theorems, and rules for proportional derivatives and integrals and provide basic transforms that allow differential equations to be solved within this new setting, offering an alternative to the classical approach.

1. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace constituye una de las herramientas más poderosas del análisis matemático aplicado, particularmente en la resolución de ecuaciones diferenciales y en el estudio de sistemas dinámicos en ingeniería y física. Su formulación clásica se apoya en la aritmética usual de los números reales y en la estructura aditiva que caracteriza al cálculo diferencial e integral tradicional.

Sin embargo, numerosos fenómenos naturales y modelos matemáticos describen procesos cuyo comportamiento es esencialmente multiplicativo o proporcional. En tales contextos, la estructura aditiva del cálculo clásico puede no reflejar de manera natural la dinámica del sistema. Ante esta limitación, surgen los cálculos no newtonianos, desarrollados inicialmente por Grossman y Katz, los cuales proponen una reestructuración de las operaciones fundamentales para adaptarse a marcos de trabajo alternativos.[4]

El propósito de este trabajo es introducir y estudiar una versión no-newtoniana de la transformada de Laplace construida sobre la aritmética proporcional. Se presentan sus propiedades fundamentales, incluyendo linealidad proporcional, teoremas de traslación y reglas para derivadas e integrales proporcionales, así como un conjunto de transformadas básicas que permiten abordar ecuaciones diferenciales en este nuevo entorno. Este enfoque no pretende sustituir la transformada clásica, sino

Fecha: 10 de febrero de 2026.

Palabras y frases clave. Aritmética proporcional, Cálculo proporcional, Derivada e integral proporcional, Ecuaciones diferenciales proporcionales, Operador de Laplace.

ofrecer una alternativa conceptual y técnica adecuada para el análisis de procesos proporcionalmente estructurados.

2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL CÁLCULO NO-NEWTONIANO

El cálculo diferencial e integral, en su forma clásica, se desarrolla en el siglo XVII a partir de los trabajos de Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).[4] De manera independiente, ambos formularon el llamado *cálculo infinitesimal*, introduciendo técnicas para estudiar límites, derivadas e integrales, y estableciendo la conexión entre derivación e integración mediante el teorema fundamental del cálculo. Más allá de la controversia sobre la prioridad del descubrimiento, la obra de ambos unificó métodos geométricos y algebraicos previos en un lenguaje común que se convirtió en base del análisis matemático moderno y en una herramienta central para la física y la ingeniería.

En las décadas y siglos posteriores, el cálculo clásico fue objeto de un proceso de formalización y rigor crecientes (por ejemplo, mediante la noción moderna de límite y el desarrollo de la teoría de funciones reales), pero mantuvo un rasgo esencial: se apoya en la aritmética usual de los números reales, en la que los cambios entre cantidades se describen mediante sumas y restas. Durante mucho tiempo esa forma de trabajar se dio por sentada, sin cuestionarla demasiado. Solo en épocas más recientes algunos autores comenzaron a preguntarse qué pasaría si se cambiara la aritmética de fondo y se construyeran *otros* tipos de cálculo a partir de ella; en esa línea se sitúan precisamente los cálculos no-newtonianos que se estudiarán en esta tesis.

La idea de construir sistemas de cálculo alternativos al cálculo clásico se materializa de forma sistemática a finales de la década de 1960 con los trabajos de Michael Grossman y Robert Katz. Entre 1967 y 1970 estos autores desarrollan una familia completa de *cálculos no-newtonianos*, definidos sobre aritméticas distintas de la usual, y en los que se introducen gradientes, derivadas, integrales y promedios “naturales” junto con teoremas fundamentales análogos a los del cálculo clásico.[4]

El libro *Non-Newtonian Calculus*[4] presenta por primera vez esta teoría de manera unificada y describe una familia infinita de calculi (geométrico, anageométrico, bigeométrico, armónico, entre otros). En trabajos posteriores, como *Bigeometric Calculus: A System with a Scale-Free Derivative*[5], los autores profundizan en casos particulares y muestran que en cada uno de estos sistemas las funciones con derivada constante forman clases distintas de funciones (por ejemplo, funciones lineales, exponenciales o potencias), lo que refuerza la idea de que el cálculo clásico es solo un caso particular dentro de un marco mucho más amplio.

Tras los trabajos fundacionales de Grossman y Katz, el tema de los cálculos no-newtonianos quedó durante un tiempo relativamente fuera del foco principal de la investigación matemática. Sin embargo, a partir de la década de 2000 vuelve a tomar fuerza, en particular con el artículo de Bashirov, Misirli y Özyapıcı, donde se desarrolla el llamado *cálculo multiplicativo* y se muestran algunas de sus aplicaciones en ecuaciones diferenciales y problemas de modelación.[1] Más recientemente, Georgiev y Zennir han presentado una exposición sistemática de este enfoque en forma de libro de texto, lo que indica que el cálculo multiplicativo ha alcanzado un grado de madurez suficiente como para ser incorporado a la formación avanzada de estudiantes de matemáticas y áreas afines.[3]

En paralelo, distintos autores han propuesto variantes no-newtonianas más específicas. Una de ellas es el *cálculo proporcional*, desarrollado en trabajos recientes de Campillay-Llanos, Pinto, Torres y colaboradores, donde se introduce una aritmética proporcional y se definen derivadas e integrales proporcionales con sus teoremas básicos.[2] Este marco ha permitido, por ejemplo, encontrar primitivas proporcionales para funciones como la gaussiana y formular modelos de crecimiento logístico en versión no-newtoniana.[6] Además, Torres ha extendido estas ideas al contexto del cálculo de variaciones y de los teoremas de simetría tipo Noether, mostrando que los métodos no-newtonianos también pueden aplicarse a problemas de optimización y a la búsqueda de cantidades conservadas en sistemas dinámicos.[7, 8]

En resumen, a partir de los trabajos pioneros de Grossman y Katz sobre cálculos no-newtonianos, y de los desarrollos más recientes en cálculo multiplicativo y proporcional, se ha ido construyendo un marco alternativo al cálculo clásico que resulta especialmente adecuado para describir procesos de tipo multiplicativo o proporcional.[4, 2] En ese contexto se sitúa el presente trabajo, cuyo objetivo principal es estudiar una versión no-newtoniana de la transformada de Laplace, formulada sobre una aritmética proporcional, y analizar algunas de sus propiedades básicas y aplicaciones en ecuaciones diferenciales planteadas en este nuevo entorno.

3. ARITMÉTICA PROPORCIONAL

La *aritmética proporcional* ofrece un enfoque alternativo para trabajar con los números reales positivos y se puede ver como un caso particular del esquema general de aritméticas no clásicas generado por la función $f(x) = \log(x)$. [4, 2] En este contexto se consideran las operaciones $x \oplus y$, $x \ominus y$, $x \odot y$ y $x \oslash y$, definidas sobre el conjunto $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ por

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad x \ominus y = \frac{x}{y}, \quad x \odot y = x^{\log(y)}, \quad x \oslash y = x^{\frac{1}{\log(y)}}, \quad y \neq 1,$$

donde \log denota el logaritmo natural (de base e).

3.1. Operaciones en la aritmética proporcional. En esta aritmética, la operación \oplus juega el papel de la “suma proporcional”, mientras que \odot actúa como una “multiplicación proporcional”. Estas operaciones heredan muchas de las propiedades habituales de la suma y el producto clásicos, pero adaptadas al nuevo entorno. A continuación se recogen algunos resultados básicos que describen la estructura algebraica de \mathbb{R}^+ con estas operaciones.

Proposición 3.1. *El conjunto de los números reales positivos \mathbb{R}^+ , bajo la operación \oplus , forma un grupo abeliano con elemento identidad 1.*

Proposición 3.2. *El conjunto $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, bajo la operación \odot , forma un grupo abeliano con el número trascendente e como elemento identidad cuando se considera el logaritmo natural.*

Proposición 3.3. *La operación \odot es distributiva con respecto a \oplus , es decir, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ se cumple*

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Teorema 3.4. *El conjunto de los números reales positivos $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ forma un campo isomorfo al campo clásico $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a través de la aplicación $\varphi(x) = \log(x)$.*

3.2. Potencia y factorial proporcional. En la aritmética proporcional también se pueden definir versiones análogas de operaciones clásicas como la potencia y el factorial. La *potencia proporcional* de base $x \in \mathbb{R}^+$ y exponente natural n se define como la repetición de la operación \odot :

$$x^{\{n\}} = \underbrace{x \odot x \odot \cdots \odot x}_{n \text{ veces}}.$$

Usando la definición de \odot , para $n \in \mathbb{N}^+$ se obtiene

$$x^{\{n\}} = e^{(\log x)^n}.$$

En particular, $x^{\{1\}} = x$, $x^{\{2\}} = e^{(\log x)^2}$, $x^{\{3\}} = e^{(\log x)^3}$, etcétera. Es decir, en coordenadas logarítmicas la potencia proporcional se corresponde con elevar $\log x$ a una potencia entera.

De manera similar, se puede definir un *factorial proporcional*. Sea \mathbb{N}^+ el conjunto de los números naturales positivos y sea $n \in \mathbb{N}^+$. El factorial proporcional de n se define como

$$\tilde{n}! = e \odot e^2 \odot e^3 \odot \cdots \odot e^n,$$

es decir, como el \odot -producto de los términos e^k para $k = 1, 2, \dots, n$. Aplicando nuevamente la definición de \odot , se tiene

$$\tilde{n}! = e^{\log(e) \log(e^2) \cdots \log(e^n)} = e^{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = e^{n!}.$$

Por tanto, el factorial proporcional $\tilde{n}!$ se obtiene tomando el factorial clásico $n!$ y elevando e a dicha cantidad. Este tipo de construcciones sirve para ilustrar cómo, al pasar de la aritmética usual a la aritmética proporcional, muchas operaciones familiares cambian de forma pero conservan cierta relación con sus versiones clásicas a través del logaritmo. ‘

3.3. Funciones proporcionales. En la aritmética proporcional es útil asociar a cada función clásica f una versión “proporcional” que viva en \mathbb{R}^+ . Formalmente, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real, definimos su *función proporcional asociada* como

$$f_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f_p(x) = e^{f(\log x)}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

A modo de resumen, en la Tabla 1 se muestran algunas funciones clásicas f y sus correspondientes funciones proporcionales f_p .

Función clásica $f(x)$	Función proporcional $f_p(x)$
x^2	$e^{(\log x)^2} = x^{\{2\}}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^+$	$e^{(\log x)^n} = x^{\{n\}}$
$\sin(x)$	$e^{\sin(\log x)} = \sin_p(x)$
e^x	$e^{e^{\log x}} = e^x$
x	$e^{\log x} = x$
$c, c \in \mathbb{R}$	e^c
$\log(x), x > 1$	$e^{\log(\log x)} = \log x$

CUADRO 1. Ejemplos de funciones clásicas y sus funciones proporcionales asociadas.

3.4. Derivada Proporcional.

Definición 3.5 (Derivada proporcional). Sea $f_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función positiva. Decimos que f_p es diferenciable en $x_0 > 0$ si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 1} \left[(f_p(x_0 \oplus h) \ominus f_p(x_0)) \oslash h \right].$$

En tal caso, a ese límite lo denotamos por $\tilde{f}_p(x_0)$ y lo llamamos *derivada proporcional* de f_p en x_0 .

Definición 3.6 (Transformada de Laplace proporcional).

$$F_p(s) = \mathcal{L}_p\{f_p(t)\} = \int_1^\infty e^{(1/s) \odot t} \odot f_p(t) \rho t,$$

donde $s = \sigma \cdot j \odot \omega$ es la variable compleja, con σ representando la parte real y ω representando la parte imaginaria. La transformada de Laplace proporcional es una herramienta matemática usada para convertir una función del dominio del tiempo $f_p(t)$ en una función del dominio complejo $F_p(s)$, donde s es una variable compleja proporcional.

La transformada proporcional de Laplace no newtoniana tiene, entre otras, las siguientes propiedades importantes:

1. **Linealidad proporcional:**

$$\mathcal{L}_p\{ \alpha \odot f_p(t) \oplus \beta \odot g_p(t) \} = \alpha \odot \mathcal{L}_p\{f_p(t)\} \oplus \beta \odot \mathcal{L}_p\{g_p(t)\}.$$

2. **Segundo teorema del traslación:**

Definimos la función escalón unitario proporcional $u(t/a)$ (con $a > 1$) por:

$$u(t/a) = \begin{cases} 1, & 1 \leq t < a, \\ e, & t \geq a. \end{cases}$$

Sea $u(t/a)$ la función escalón unitario proporcional. Entonces se tiene

$$\mathcal{L}_p\{ f_p(t/a) \odot u(t/a) \} = e^{(1/a) \odot s} \odot F_p(s).$$

3. **Transformada de la derivada proporcional:**

Sea $f_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función proporcional continua y de clase proporcional $C^{\{\{n\}\}}$, si $\mathcal{L}_p\{f_p(t)\} = F_p(s)$, entonces, la transformada proporcional de la derivada proporcional de orden n está dada por

$$\mathcal{L}_p\{f_p^{\{\{n\}\}}(t)\}(s) = s^{\{n\}} \odot F_p(s) \ominus s^{\{n-1\}} \odot f_p(1) \ominus s^{\{n-2\}} \odot \tilde{f}_p(1) \ominus \dots \ominus f_p^{\{\{n-1\}\}}(1).$$

4. **Transformada de una integral proporcional:**

Sea $\mathcal{L}_p\{f_p(t)\} = F_p(s)$, entonces la transformada proporcional de la integral proporcional está dada por:

$$\mathcal{L}_p\left\{ \int_1^t f_p(u) \rho u \right\} = F_p(s) \oslash s$$

4. TRANSFORMADAS PROPORCIONALES BÁSICAS

En esta sección se presentan algunas transformadas fundamentales asociadas a la transformada proporcional \mathcal{L}_p , las cuales permiten construir expresiones más complejas y resolver ecuaciones diferenciales en el marco del cálculo proporcional. Todas las funciones consideradas pertenecen a \mathbb{R}^+ y se emplean las operaciones proporcionales $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ junto con las potencias de orden proporcional $s^{\{n\}}$.

Función	Transformada proporcional
a	$a \oslash s$
$e^{a \odot t}$	$e \oslash (s \ominus a)$
$\sin_{be}(a \odot t)$	$a \oslash (s^{\{2\}} \oplus a^{\{2\}})$
$\cos_{be}(a \odot t)$	$s \oslash (s^{\{2\}} \oplus a^{\{2\}})$
t	$e \oslash s^{\{2\}}$
$t^{\{n\}}$	$e^{n!} \oslash s^{\{n+1\}}$

CUADRO 2. Algunas transformadas de Laplace proporcionales básicas.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una versión no newtoniana de la transformada de Laplace formulada sobre la aritmética proporcional, enmarcada dentro del esquema general de los cálculos no clásicos inducidos por funciones generadoras. A partir de la estructura algebraica $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ y del isomorfismo logarítmico con el campo clásico de los números reales, se ha definido la transformada proporcional y se han establecido sus propiedades fundamentales.

Se demostró que esta transformada conserva análogos proporcionales de resultados esenciales de la teoría clásica, tales como la linealidad, los teoremas de traslación y las reglas para derivadas e integrales. Asimismo, se presentaron transformadas básicas que permiten abordar ecuaciones diferenciales dentro del marco proporcional, mostrando que el método mantiene una coherencia estructural comparable a la del enfoque tradicional. En este sentido, el enfoque no pretende reemplazar la teoría clásica, sino ampliarla, proporcionando un marco alternativo que puede resultar más natural para ciertos modelos de crecimiento, escalamiento o dinámica geométrica.

Como líneas futuras de investigación, resulta de interés profundizar en el estudio de problemas de valor inicial, ecuaciones en derivadas parciales proporcionales y posibles aplicaciones en modelación matemática, así como explorar conexiones con otros cálculos no newtonianos y estructuras funcionales relacionadas.

REFERENCIAS

1. Agamirza E. Bashirov, Emine Misirli Kurpinar, and Ali Özyapici, *Multiplicative calculus and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **337** (2008), no. 1, 36–48.
2. William A. Campillay-Llanos, Felipe Guevara, Manuel Pinto, and Ricardo Torres, *Differential and integral proportional calculus: how to find a primitive for gaussian function*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **52** (2021), no. 7, 1120–1133.
3. Svetlin Georgiev and Khaled Zennir, *Multiplicative differential calculus*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, 2022.
4. Michael Grossman and Robert Katz, *Non-newtonian calculus*, Lee Press, Pigeon Cove, Massachusetts, 1972.

5. ———, *Biometric calculus: A system with a scale-free derivative*, Lee Press, 1983.
6. Manuel Pinto, Ricardo Torres, William A. Campillay-Llanos, and Felipe Guevara, *Applications of proportional calculus and a non-newtonian logistic growth model*, *Proyecciones (Antofagasta)* **39** (2020), no. 6, 1471–1513.
7. Delfim F. M. Torres, *On a non-newtonian calculus of variations*, *Axioms* **10** (2021), no. 3, 171.
8. ———, *A non-newtonian noether's symmetry theorem*, *Applicable Analysis* **102** (2023), no. 7, 1934–1941.

GUSTAVO A. MALDONADO-BATRES
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, UNAH – CU, TEGUCIGALPA, D. C., HONDURAS
Dirección de correo electrónico: gustavo.batres@unah.edu.hn

MARLON M. LÓPEZ-FLORES
LABORATORIO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL, ROBÓTICA E CIBERNÉTICA - LIARC DEL INSTITUTO
MILITAR DE INGENIARÍA - IME-RJ (BRASIL)
Dirección de correo electrónico: marlon.michael@ime.eb.br

WILLIAM CAMPILLAY-LLANOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO, TE-
MUCO 4813302, CHILE.
Dirección de correo electrónico: wcampillay@uct.cl

BOLETÍN RESUMEN: POLAR MOLECULES BY P. DEBYE, PH.D.

KILVER TEJEDA

A la teoría fundamental que explica las propiedades dieléctricas de la materia.

RESUMEN. Este boletín resume la obra seminal *Polar Molecules* de Peter Debye, publicada originalmente en 1929. El libro presenta la teoría cuántico-mecánica (en su formulación temprana) y estadística de las moléculas polares, con un enfoque principal en la explicación del comportamiento dieléctrico de gases, líquidos y soluciones. Se detalla la derivación de la famosa ecuación de Debye que relaciona el momento dipolar permanente de una molécula con la polarización y constante dieléctrica del medio, incluyendo los efectos de la temperatura. El trabajo también aborda conceptos pioneros como el tiempo de relajación dipolar y sus implicaciones en la dispersión y absorción de ondas electromagnéticas.

ABSTRACT. This bulletin summarizes Peter Debye's seminal work *Polar Molecules*, originally published in 1929. The book presents the quantum-mechanical (in its early formulation) and statistical theory of polar molecules, with a main focus on explaining the dielectric behavior of gases, liquids, and solutions. It details the derivation of the famous Debye equation, which relates the permanent dipole moment of a molecule to the polarization and dielectric constant of the medium, including the effects of temperature. The work also addresses pioneering concepts such as dipolar relaxation time and its implications for the dispersion and absorption of electromagnetic waves.

1. INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE DIELECTRICA

La introducción del libro establece el problema central de la física molecular de la época: la incapacidad de la teoría de Clausius-Mossotti (aplicable a moléculas no polares) para predecir correctamente la constante dieléctrica ϵ de sustancias cuyas moléculas poseen un momento dipolar eléctrico permanente (μ). Debye plantea que la orientación de estos dipolos bajo un campo eléctrico externo es el factor clave faltante. La obra propone unir la teoría de la polarizabilidad electrónica/atómica (α) con una teoría estadística de la orientación de dipolos rígidos para derivar una expresión general de la polarización molar P .

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE DEBYE

Esta sección constituye el núcleo del libro. Debye parte de la mecánica estadística (distribución de Boltzmann) para calcular la energía media de un dipolo en un campo eléctrico. Considera un dipolo rígido de momento μ que puede orientarse libremente. La contribución de la orientación dipolar a la polarización P_{orient} se

Fecha: 11 de diciembre de 2025.

Palabras y frases clave. Momento Dipolar, Constante Dieléctrica, Polarización, Moléculas Polares, Relajación Dipolar.

calcula promediando el componente del momento dipolar en la dirección del campo sobre todas las orientaciones posibles, ponderadas por el factor de Boltzmann $e^{\mu E \cos \theta / kT}$.

Contribución	Símbolo	Origen Físico
Polarización Electrónica	$P_e = N\alpha_e E$	Desplazamiento de la nube electrónica.
Polarización Atómica	$P_a = N\alpha_a E$	Desplazamiento de núcleos atómicos.
Polarización por Orientación	$P_{orient} = \frac{N\mu^2}{3kT} E$	Alineamiento de dipolos permanentes.

CUADRO 1. Contribuciones a la polarización total en la teoría de Debye (N : número de moléculas por unidad de volumen, k : constante de Boltzmann, T : temperatura).

Sumando todas las contribuciones y relacionándolas con la constante dieléctrica a través de la ecuación de Clausius-Mossotti, se llega a la **Ecuación de Debye**:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{N_A}{3\epsilon_0} \left(\alpha_e + \alpha_a + \frac{\mu^2}{3kT} \right)$$

donde M es la masa molar, ρ la densidad, N_A el número de Avogadro y ϵ_0 la permitividad del vacío. Esta ecuación permite determinar experimentalmente el momento dipolar μ a partir de mediciones de ϵ y ρ a diferentes temperaturas.

3. APLICACIONES Y LIMITACIONES DEL MODELO

La teoría se aplica exitosamente a **gases polares** y **soluciones diluidas** en disolventes no polares. En estos casos, las moléculas actúan de forma casi independiente, sin interacciones dipolo-dipolo fuertes. El libro presenta datos experimentales (para gases como HCl o vapores de agua) que muestran una excelente concordancia con la predicción de que la polarización molar es una función lineal de $1/T$, cuya pendiente es proporcional a μ^2 .

Sin embargo, Debye discute en profundidad las **limitaciones** del modelo, especialmente para **líquidos puros** y **soluciones concentradas**. La fuerte interacción entre dipolos vecinos crea un campo local interno (campo de reacción) que no es igual al campo externo aplicado. Esta interacción conduce a la **saturación** del efecto de orientación a campos altos y temperaturas bajas, y es el origen de las desviaciones observadas. El tratamiento exacto de este campo interno.º campo de Lorentz"se señala como un problema abierto y complejo.

4. EXTENSIÓN A CAMPOS ALTERNOS Y EL CONCEPTO DE RELAJACIÓN

Uno de los aportes más significativos del libro es la extensión de la teoría a campos eléctricos alternos de alta frecuencia. Debye introduce el concepto de **tiempo de relajación** τ , que es el tiempo característico que tarda una población de dipolos en alcanzar una distribución de equilibrio orientacional tras un cambio en el campo aplicado.

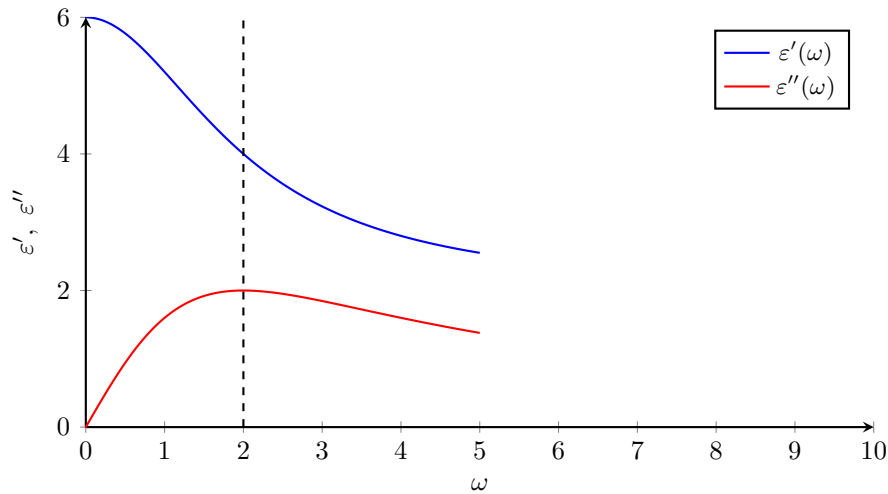


FIGURA 1. Dispersión dieléctrica tipo Debye. La parte real de la permitividad $\epsilon'(\omega)$ decrece desde $\epsilon_s = \epsilon_\infty + \Delta\epsilon$ hasta ϵ_∞ , mientras que $\epsilon''(\omega)$ presenta un máximo en $\omega = 1/\tau$, característico del proceso de relajación dipolar.

Cuando la frecuencia del campo ω es comparable a $1/\tau$, los dipolos no pueden seguir al campo, causando un retraso de fase. Esto se manifiesta como: 1. Una **dispersión**: caída de la constante dieléctrica medida (ϵ') desde un valor estático ϵ_s a un valor de alta frecuencia ϵ_∞ . 2. Una **absorción**: aparición de un máximo en la parte imaginaria de la constante dieléctrica (ϵ''), lo que significa disipación de energía (calentamiento dieléctrico).

La teoría predice la forma de estas curvas (curva de Debye), sentando las bases de la **espectroscopía dieléctrica**. Este capítulo conecta las propiedades moleculares (μ , τ) con fenómenos macroscópicos medibles en un rango amplio de frecuencias (desde radiofrecuencias hasta microondas).

5. ELECTROMAGNETISMO EN MEDIOS DISPERSIVOS: APLICACIÓN AL TEJIDO HUMANO

El estudio de la interacción entre campos electromagnéticos y materiales biológicos ha adquirido gran relevancia en física médica, bioingeniería y dosimetría de radiación no ionizante. A diferencia de medios simples como gases o soluciones diluidas —donde la teoría de Debye describe adecuadamente la respuesta dieléctrica— los tejidos biológicos presentan una estructura altamente heterogénea y multifase, donde coexisten moléculas polares, agua ligada, membranas celulares, iones libres y estructuras macromoleculares. Esto provoca un comportamiento *marcadamente dispersivo*, es decir, una fuerte dependencia de la permitividad compleja con respecto a la frecuencia.

5.1. Permitividad Compleja en Tejidos Biológicos. En medios dispersivos, el desplazamiento eléctrico se expresa como

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega),$$

donde la permitividad compleja tiene la forma

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega).$$

Aquí, $\varepsilon'(\omega)$ cuantifica la capacidad de almacenamiento de energía eléctrica, mientras que $\varepsilon''(\omega)$ representa las pérdidas dieléctricas asociadas a procesos de relajación y conducción. Los tejidos humanos poseen conductividades apreciables debido a la presencia de iones móviles (Na^+ , K^+ , Cl^-), lo cual se incorpora usualmente mediante

$$\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_d''(\omega) + \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0},$$

siendo σ la conductividad efectiva del tejido.

5.2. Modelos de Relajación en Tejido Humano. La teoría de Debye clásica proporciona un modelo fenomenológico útil para capturar la respuesta de agua pura y soluciones diluidas. En su forma básica,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 - i\omega\tau},$$

con τ el tiempo de relajación dipolar. Sin embargo, el tejido humano presenta múltiples mecanismos de relajación asociados a escalas estructurales distintas: rotación de moléculas de agua, polarización interfacial en membranas celulares, difusión iónica, y procesos colectivos en macromoléculas. Por ello suelen emplearse *modelos de relajación múltiple*, como el modelo de Debye generalizado,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{k=1}^N \frac{\Delta\varepsilon_k}{1 - i\omega\tau_k},$$

o su extensión empírica más general, la función de Havriliak–Negami.

En frecuencias bajas (kHz–MHz), la respuesta está dominada por fenómenos interfaciales (dispersión α). En el rango de microondas, predomina la relajación dipolar del agua (dispersión γ), estrechamente relacionada con la relajación de Debye original.

5.3. Relevancia Física y Biomédica. La dispersión electromagnética en tejidos determina aspectos fundamentales como:

- **Distribución de campos internos:** Las variaciones espaciales de $\varepsilon(\omega)$ regulan la atenuación, reflexión y absorción de ondas en tejido.
- **Calentamiento dieléctrico:** La parte imaginaria $\varepsilon''(\omega)$ gobierna la conversión de energía electromagnética en calor, relevante en procedimientos de hipertermia oncológica y seguridad de exposiciones.
- **Profundidad de penetración:** Depende fuertemente de la conductividad y de los mecanismos de relajación, siendo menor a frecuencias altas.
- **Imagenología:** Métodos como RMN, EIT y algunas modalidades de microondas utilizan propiedades dieléctricas para reconstruir contrastes médicos.

En conjunto, el estudio del electromagnetismo en medios dispersivos conecta directamente con el marco teórico introducido por Debye. La presencia de múltiples procesos de relajación en el tejido humano puede interpretarse como una generalización del modelo dipolar simple, donde cada escala molecular o estructural aporta un término de relajación con su propio tiempo característico τ_k . Esta perspectiva permite comprender tanto la complejidad experimental de la permitividad tisular como las aplicaciones prácticas en medicina y biofísica.

6. ECUACIONES DE MAXWELL–DEBYE Y SU APLICACIÓN A LA PROPAGACIÓN ELECTROMAGNÉTICA EN MEDIOS BIOLÓGICOS

Los tejidos biológicos constituyen medios dieléctricos altamente dispersivos, caracterizados por una fuerte dependencia de la permitividad con la frecuencia y por la coexistencia de múltiples mecanismos de relajación. Esta complejidad ha sido ampliamente documentada en estudios experimentales y modelos paramétricos, siendo los trabajos de Gabriel et al. [6, 7, 8] la referencia estándar para las propiedades dieléctricas de tejidos humanos en un amplio rango espectral. Para describir estos efectos, es necesario extender las ecuaciones macroscópicas de Maxwell mediante relaciones constitutivas dinámicas, entre ellas el modelo clásico de relajación de Debye [2].

En su forma fundamental, las ecuaciones de Maxwell para un medio dieléctrico no magnético se expresan como

$$(6.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(6.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$(6.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

La relación constitutiva entre el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el campo \mathbf{E} incorpora la dinámica de polarización propia de un medio dispersivo. En el modelo de Debye, la polarización $\mathbf{P}(t)$ satisface

$$(6.4) \quad \tau \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \mathbf{E}(t),$$

donde τ es el tiempo de relajación dipolar característico, y $(\varepsilon_s, \varepsilon_\infty)$ representan las permitividades estática y de alta frecuencia. Este modelo describe perfectamente la relajación dipolar del agua y soluciones simples, tal como se detalla en los estudios clásicos de Schwan [13, 14] y en análisis más recientes de Pethig [11].

El desplazamiento eléctrico total queda expresado como

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t).$$

6.1. Significado Físico en Tejidos Biológicos. La ecuación de Debye captura el retardo temporal con que los dipolos (principalmente agua libre y estructuras proteicas) responden a una variación del campo eléctrico. Esto resulta especialmente relevante en el rango de microondas, donde la relajación dipolar del agua domina la respuesta dieléctrica [3]. En frecuencias bajas, fenómenos interfaciales como la polarización Maxwell–Wagner en membranas celulares producen dispersión adicional, como se estudia en los modelos Cole–Cole [1].

En el dominio frecuencial, la expresión resultante es

$$(6.5) \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 - i\omega\tau},$$

que determina directamente:

- **Dispersión dieléctrica**, controlada por la variación de $\varepsilon'(\omega)$;
- **Pérdidas dieléctricas y calentamiento**, asociadas a la parte imaginaria $\varepsilon''(\omega)$;
- **Atenuación y profundidad de penetración** de ondas electromagnéticas en tejido humano.

Estos efectos son esenciales en dosimetría, evaluación de SAR y en aplicaciones como imagenología por microondas [4].

6.2. Propagación de Ondas en un Medio con Dispersión de Debye. Sustituyendo la relación de Debye en las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de onda modificada. En ausencia de conductividad, para ilustración, la ecuación para el campo eléctrico es

$$(6.6) \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

En tejidos reales, la conductividad σ es significativa [5], por lo que la ecuación completa incluye un término disipativo:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$$

Este término es responsable de la fuerte atenuación de microondas en tejidos ricos en agua y del calentamiento dieléctrico empleado en técnicas de hipertermia y ablación.

6.3. Generalización a Modelos Multirrelajación. Los tejidos humanos muestran múltiples escalas de relajación, desde rotación de moléculas de agua, polarización interfacial en membranas, hasta procesos iónicos de baja frecuencia. Esto conduce a modelos multiescala como Debye múltiple,

$$(6.7) \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{k=1}^N \frac{\Delta \varepsilon_k}{1 - i\omega\tau_k} + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_0},$$

y extensiones empíricas como Cole–Cole, Cole–Davidson o Havriliak–Negami, ampliamente utilizados en bioelectromagnetismo [9, 10].

Estos modelos generalizados explican la estructura jerárquica de la dispersión dieléctrica: dispersión α , β y γ , tal como se resume en [6] y en la monografía de Pethig [12].

6.4. Interpretación Biofísica. La formulación Maxwell–Debye permite comprender fenómenos esenciales:

- **Absorción máxima** cuando $\omega \approx 1/\tau$, lo cual coincide con mediciones en agua pura y tejidos hidratados [3].
- **Contraste dieléctrico** entre diferentes tejidos (grasa, músculo, cerebro), clave para imagenología por microondas [4].
- **Cálculo de SAR** y análisis de seguridad en exposición a campos EM.
- **Simulaciones electromagnéticas** que emplean FDTD y modelos de Debye discretizados [15].

Así, el marco Maxwell–Debye constituye la conexión natural entre las propiedades moleculares descritas por Debye [2] y la fenomenología macroscópica observada en bioelectromagnetismo contemporáneo.

7. CONCLUSIONES E IMPACTO

Polar Molecules consolidó la comprensión cuantitativa de la polarización dieléctrica. Su ecuación central se convirtió en la herramienta estándar para determinar momentos dipolares moleculares, un parámetro fundamental en química y biología. Más allá de la estática, la introducción del modelo de relajación fue revolucionaria,

proporcionando un marco para estudiar la dinámica molecular en líquidos, polímeros y coloides. Aunque modelos posteriores (Onsager, Kirkwood) refinaron la descripción del campo local, el trabajo de Debye sigue siendo la piedra angular de la teoría dieléctrica.

Algoritmo 1 Determinación del momento dipolar a partir de la ecuación de Debye

Entrada: Datos experimentales: $\epsilon(T)$, $\rho(T)$ para un gas o solución diluida.

Salida: Momento dipolar molecular μ en Debyes.

- 1: Calcular la polarización molar $P_m(T) = \frac{\epsilon(T)-1}{\epsilon(T)+2} \frac{M}{\rho(T)}$ para cada temperatura.
 - 2: Graficar P_m en función de $1/T$.
 - 3: Realizar un ajuste por mínimos cuadrados a la línea $P_m = A + \frac{B}{T}$.
 - 4: La ordenada al origen A da la polarizabilidad total: $A = \frac{N_A}{3\epsilon_0}(\alpha_e + \alpha_a)$.
 - 5: La pendiente B es proporcional al momento dipolar: $B = \frac{N_A\mu^2}{9k\epsilon_0}$.
 - 6: Calcular $\mu = \sqrt{\frac{9k\epsilon_0 B}{N_A}}$.
 - 7: Convertir μ de unidades SI a Debyes ($1D = 3,33564 \times 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$).
-

REFERENCIAS

1. K. S. Cole and R. H. Cole, *Dispersion and absorption in dielectrics i. alternating current characteristics*, Journal of Chemical Physics **9** (1941), no. 4, 341–351.
2. Peter Debye, *Polar molecules*, Chemical Catalog Company, 1929.
3. W. J. Ellison, *Permittivity of pure water over the frequency range 0–25 thz*, Journal of Physical and Chemical Reference Data **36** (2007), no. 1, 1–18.
4. E. Fear, X. Li, and S. C. Hagness, *Breast cancer detection using microwave imaging*, IEEE Signal Processing Magazine **31** (2014), no. 1, 66–79.
5. K. R. Foster and H. P. Schwan, *Dielectric properties of tissues*, CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering **17** (1989), no. 1, 25–104.
6. Camelia Gabriel, Stuart Gabriel, and E. Corthout, *The dielectric properties of biological tissues: I. literature survey*, Physics in Medicine and Biology **41** (1996), no. 11, 2231–2249.
7. S. Gabriel, R. W. Lau, and C. Gabriel, *The dielectric properties of biological tissues: II. measurements in the frequency range 10 hz to 20 ghz*, Physics in Medicine and Biology **41** (1996), no. 11, 2251–2269.
8. ———, *The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues*, Physics in Medicine and Biology **41** (1996), no. 11, 2271–2293.
9. A. K. Jonscher, *Dielectric relaxation in solids*, Journal of Physics D: Applied Physics **32** (1999), no. 14, R57–R70.
10. Ø. G. Martinsen and S. Grimnes, *Bioimpedance and bioelectricity basics*, Academic Press, 2002.
11. R. Pethig, *Dielectric properties of biological materials: biophysical and medical applications*, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation **24** (2017), no. 5, 2854–2873.
12. Ronald Pethig, *Dielectric and electronic properties of biological materials*, Wiley, 1979.
13. H. P. Schwan, *Electrical properties of tissue and cell suspensions*, Advances in Biological and Medical Physics **5** (1957), 147–209.
14. ———, *Linear and non-linear dielectric properties of biological materials*, Proceedings of the IEEE **80** (1992), no. 1, 146–165.
15. Allen Taflov and Susan C. Hagness, *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*, Artech House, 2005.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS.

CARACTERÍSTICAS MATEMÁTICAS Y PROPIEDADES DEL PROBLEMA OPF

JOSÉ LESMAN RODRÍGUEZ BONILLA

RESUMEN. El Problema de Flujo Óptimo de Potencia (Optimal Power Flow, OPF) constituye una de las herramientas fundamentales en la operación y análisis de los sistemas eléctricos de potencia modernos. Su formulación integra simultáneamente criterios económicos y restricciones físicas, dando lugar a un problema de optimización no lineal, no convexo y de gran escala. En este trabajo se analizan las principales características matemáticas del problema OPF en corriente alterna, haciendo énfasis en la estructura del conjunto factible, la no convexidad inherente del problema y sus implicaciones geométricas. Se presentan formalmente las formulaciones del OPF bajo los modelos de inyección nodal (Bus Injection Model, BIM) y flujo por ramas (Branch Flow Model, BFM), destacando su equivalencia matemática. Asimismo, se estudian propiedades de diferenciabilidad, calificaciones de restricciones, el cono tangente y las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden.

ABSTRACT. The Optimal Power Flow (OPF) problem is one of the fundamental tools in the operation and analysis of modern electric power systems. Its formulation simultaneously integrates economic criteria and physical constraints, resulting in a large-scale, nonlinear, and non-convex optimization problem. This work analyzes the main mathematical characteristics of the AC Optimal Power Flow problem, with emphasis on the structure of the feasible set, the inherent non-convexity of the problem, and its geometric implications. Formal OPF formulations based on the Bus Injection Model (BIM) and the Branch Flow Model (BFM) are presented, highlighting their mathematical equivalence. In addition, differentiability properties, constraint qualifications, tangent cone, and first- and second-order optimality conditions are examined.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas eléctricos de potencia son conjuntos complejos de equipos interconectados destinados a generar, transmitir, distribuir y consumir energía eléctrica. Debido a su naturaleza física y a las interacciones electromagnéticas que los gobiernan, estos sistemas pueden modelarse matemáticamente mediante las ecuaciones de flujo de potencia, las cuales describen cómo se distribuyen las magnitudes eléctricas —tensiones, corrientes y potencias— a lo largo de la red.

Dentro de este marco, el Flujo Óptimo de Potencia (OPF, por sus siglas en inglés: Optimal Power Flow) surge como una herramienta fundamental para determinar la mejor forma de operar el sistema cumpliendo simultáneamente criterios económicos y técnicos. En términos generales, el OPF consiste en un problema de minimización cuyo objetivo suele ser reducir los costos de generación o, en otros casos, las

Fecha: Enero 2026.

Palabras y frases clave. Flujo óptimo de potencia (Optimal Power Flow), Conjunto factible, Convexidad, Sistemas eléctricos de potencia, Espacio de soluciones.

emisiones contaminantes. Este problema está sujeto a un conjunto de restricciones que representan las leyes físicas del electromagnetismo y las limitaciones operativas del sistema, tales como rangos permitidos de voltaje, límites de generación de cada central y capacidades máximas de transferencia en las líneas de transmisión.

La importancia del OPF radica en que la producción de energía eléctrica implica costos sustanciales y depende de recursos que pueden ser renovables —como la energía solar, eólica o hidroeléctrica— o no renovables —como los combustibles fósiles o la energía nuclear—. Optimizar su uso es esencial para asegurar una operación eficiente, sostenible y económica.

Los sistemas eléctricos suelen abarcar ciudades, regiones e incluso países completos, conectando a millones de personas por medio de una infraestructura común. Esta interconexión convierte su operación en un asunto estratégico, donde intervienen intereses económicos, técnicos, sociales y ambientales. Además, dado que la energía eléctrica no puede almacenarse fácilmente —al menos no en grandes cantidades sin recurrir a tecnologías avanzadas como baterías de gran escala o sistemas de bombeo hidroeléctrico—, es indispensable mantener un equilibrio instantáneo entre generación y consumo. Esta característica añade un nivel adicional de complejidad y hace aún más relevante el uso de herramientas de optimización como el OPF.

En suma, el OPF constituye un componente central en el análisis y operación moderna de sistemas eléctricos de potencia. Su propósito es identificar, dentro de un conjunto de restricciones físicas y operativas, la mejor forma de suplir la demanda eléctrica, ya sea minimizando costos, reduciendo emisiones o mejorando la eficiencia global del sistema.

2. JUSTIFICACIÓN

La operación de los sistemas eléctricos de potencia se desarrolla en un entorno dinámico donde múltiples agentes generadores participan con el propósito fundamental de producir energía eléctrica y maximizar sus beneficios económicos. Esta interacción configura un mercado competitivo en el que cada generador ofrece su capacidad de producción a un costo determinado por su tecnología, sus condiciones operativas y las características particulares de cada unidad. Como resultado, la coordinación eficiente de estas ofertas se convierte en un elemento crítico para garantizar un suministro energético confiable y económicamente viable.

En este contexto, surge la necesidad de contar con herramientas analíticas que permitan determinar, de manera objetiva y transparente, la forma óptima de abastecer la demanda eléctrica en cada instante. Tal determinación debe priorizar la eficiencia económica sin comprometer la seguridad del sistema, respetando las leyes físicas que gobiernan el flujo de potencia y las limitaciones operativas de la red. El problema que se plantea consiste, esencialmente, en minimizar el costo total de generación sujeto a un conjunto de restricciones no lineales, no convexas y de gran escala, inherentes a la operación de un sistema eléctrico real.[2]

Desde su formulación original en 1962, el Problema de Flujo Óptimo de Potencia (OPF, por sus siglas en inglés) ha sido abordado mediante una notable diversidad de métodos matemáticos y computacionales[7]. Estos enfoques pueden agruparse en tres grandes categorías. La primera corresponde a los métodos convencionales de optimización, como la programación lineal (LP), la programación cuadrática (QP), los métodos de gradiente y los métodos de punto interior, ampliamente utilizados

en entornos operativos por su madurez algorítmica y su capacidad para manejar problemas de gran tamaño.

Una segunda categoría está constituida por métodos basados en inteligencia artificial, que incluyen algoritmos genéticos, técnicas evolutivas y modelos de aprendizaje automático. Estos enfoques exploran el espacio de soluciones desde una perspectiva heurística o metaheurística, privilegiando su capacidad para escapar de mínimos locales y aproximar soluciones en escenarios altamente no convexos [8] [3].

3. ANTECEDENTES

El problema de *Optimal Power Flow* (OPF) constituye uno de los desarrollos matemáticos y computacionales más importantes en la ingeniería eléctrica moderna. Su objetivo fundamental es determinar el estado óptimo de operación de un sistema de potencia, cumpliendo simultáneamente las leyes físicas que gobiernan el flujo de energía y las múltiples restricciones técnicas que caracterizan la red. Aunque hoy forma parte del corazón operativo de los mercados eléctricos y centros de control en todo el mundo, sus orígenes se remontan a una época en la que ni siquiera existían computadoras digitales.

Desde las primeras décadas del siglo XX, la operación eficiente de los sistemas eléctricos se basaba principalmente en la experiencia humana y reglas empíricas. Los operadores realizaban el despacho económico utilizando métodos manuales como el principio de *equal incremental cost*, mientras que el cálculo del flujo de potencia se efectuaba mediante analizadores analógicos de redes. Estas herramientas, aunque útiles para sistemas pequeños, eran insuficientes frente al crecimiento acelerado de la demanda y la expansión de las redes eléctricas interconectadas.

El surgimiento de las primeras computadoras digitales a mediados del siglo pasado marcó un punto de inflexión. En 1956, Ward y Hale publicaron la primera solución digital del flujo de potencia, lo que dio inicio al desarrollo de métodos numéricos más rigurosos para analizar la red eléctrica. Durante los años siguientes, algoritmos como Gauss–Seidel y especialmente Newton–Raphson se volvieron estándar, impulsados por avances en el manejo de matrices dispersas y en la formulación matricial del problema mediante la matriz de admitancias.

En este contexto histórico aparece, en 1962, la contribución seminal de Jean Carpentier, considerada el nacimiento formal del OPF moderno[7]. Carpentier formuló el problema como una optimización restringida por las ecuaciones completas del flujo de potencia en corriente alterna, introduciendo además condiciones de optimalidad basadas en la teoría de Kuhn–Tucker. Su planteamiento reconocía explícitamente la complejidad inherente del problema, dominado por fuertes no linealidades y no convexidades, lo que lo convertía en un desafío matemático de gran escala.

A lo largo de las décadas de 1960 y 1970, la investigación en OPF avanzó mediante el uso de métodos de gradiente, programación cuadrática y técnicas de penalización. Se desarrollaron aproximaciones operativas como el OPF desacoplado, aprovechando la estructura física que vincula principalmente el flujo de potencia activa con los ángulos y la potencia reactiva con las magnitudes de tensión. Sin embargo, incluso con estas simplificaciones, los algoritmos presentaban problemas recurrentes de convergencia, sensibilidad numérica y susceptibilidad a mínimos locales.

Durante los años ochenta y noventa, el OPF se consolidó como una herramienta indispensable tanto para el análisis de sistemas eléctricos como para la planificación.

Se incorporaron nuevas restricciones vinculadas a estabilidad, límites térmicos, curvas de capacidad y factores de seguridad. Surgió el concepto de OPF con seguridad (*Security-Constrained OPF*, SCOPF), que integra contingencias y lleva el problema a una escala computacional aún mayor. Aun así, distintos estudios en la época destacaban que, pese a la abundancia de métodos propuestos, ningún enfoque ofrecía una solución robusta y generalizable para el AC-OPF completo.

El inicio de los mercados eléctricos a finales del siglo XX transformó el OPF en un componente operativo crítico. Su solución se volvió indispensable para el despacho económico, la formación de precios nodales y la evaluación continua de la seguridad operativa. Actualmente, los operadores de sistemas lo resuelven diariamente, cada hora y en muchos casos cada cinco minutos, empleando diversas aproximaciones que equilibran precisión y velocidad de cómputo. La necesidad operativa de obtener soluciones rápidas, estables y de alta calidad impulsó el surgimiento de nuevas formulaciones y desarrollos algorítmicos.

A pesar de los extraordinarios avances computacionales de las últimas décadas, el consenso académico e industrial es claro: el AC-OPF sigue siendo uno de los problemas abiertos más complejos en la optimización aplicada. Su naturaleza no convexa, la multiplicidad de mínimos locales, la presencia simultánea de restricciones cuadráticas, trigonométricas y límites operativos, y la necesidad de resolverlo en tiempos muy reducidos lo convierten en un desafío técnico permanente[2].

En síntesis, la evolución histórica del OPF refleja el desarrollo conjunto de la ingeniería eléctrica, la matemática aplicada y la computación científica. Desde los analizadores analógicos hasta los modernos métodos convexos y algoritmos de optimización no lineal, la búsqueda de soluciones eficientes para el OPF ha acompañado la expansión del sistema eléctrico global. Aunque se han logrado avances significativos, la solución rápida, robusta y garantizada del AC-OPF completo continúa siendo un objetivo en construcción, con implicaciones económicas, energéticas y ambientales de enorme relevancia.

4. PRELIMINARES

4.1. Definición formal de OPF.

4.1.1. Formulación Matemática del Problema. Sea un sistema eléctrico de potencia con:

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de buses.
- $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{N}$ el conjunto de buses con generación, no todos los buses tienen generador.
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ el conjunto de elementos de transmisión.

La red se modela mediante la matriz de admitancias compleja, que describe la estructura de la red, describiendo las características de los elementos de transmisión.

$$(4.1) \quad Y \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad Y = G + jB.$$

donde G y B son las matrices de conductancias y susceptancias, respectivamente.

Para cada bus $i \in \mathcal{N}$ podemos definir los siguientes parámetros:

- P_i^d, Q_i^d son la demanda de potencia activa y reactiva.
- P_i^{\min}, P_i^{\max} son los límites de generación activa, si $i \in \mathcal{G}$.
- Q_i^{\min}, Q_i^{\max} son los límites de generación reactiva, si $i \in \mathcal{G}$.
- V_i^{\min}, V_i^{\max} son los límites de magnitud de tensión.

Para cada elemento de transmisión $(i, j) \in \mathcal{E}$:

- $Y_{ij} \in \mathbb{C}$ es la admitancia serie equivalente entre los buses i y j .
- $S_{ij}^{\text{máx}} > 0$ es el límite térmico del flujo aparente en la dirección $i \rightarrow j$.

Definimos además los vectores de demandas y límites:

$$P^d, Q^d \in \mathbb{R}^N, \quad P^{\text{mín}}, P^{\text{máx}}, Q^{\text{mín}}, Q^{\text{máx}}, V^{\text{mín}}, V^{\text{máx}} \in \mathbb{R}^N.$$

Las Variables de decisión para este problema son los siguientes:

- $V \in \mathbb{C}^N$: vector de tensiones nodales complejas,

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}, \quad V_i \in \mathbb{C}.$$

- $P^g, Q^g \in \mathbb{R}^N$: vectores de potencia activa y reactiva generada en cada bus, si $i \notin \mathcal{G}$ entonces $P_i^g = Q_i^g = 0$.

Definimos el vector de inyecciones netas de potencia compleja:

$$S_i = P_i + jQ_i \in \mathbb{C}^N, \quad P_i = P_i^g - P_i^d, \quad Q_i = Q_i^g - Q_i^d.$$

Ante el problema de optimización que el costo de generación depende únicamente de la potencia activa generada:

$$C(P^g) = \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(P_i^g),$$

donde $C_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es típicamente una función convexa en P_i^g .

El problema OPF en forma compacta se escribe como [9] :

$$\begin{aligned} & \min_{V \in \mathbb{C}^N} \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(P_i^g) \\ \text{sujeto a } & S = P + jQ = \text{diag}(V) Y^* V^*, \\ & P = P^g - P^d, \quad Q = Q^g - Q^d, \\ & P_i^{\text{mín}} \leq P_i^g \leq P_i^{\text{máx}}, \quad \forall i \in \mathcal{G}, \\ & Q_i^{\text{mín}} \leq Q_i^g \leq Q_i^{\text{máx}}, \quad \forall i \in \mathcal{G}, \\ & (V_i^{\text{mín}})^2 \leq V_i V_i^* \leq (V_i^{\text{máx}})^2, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ & |S_{ij}(V)| \leq S_{ij}^{\text{máx}}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

4.2. Modelos de redes. En esta sección describiremos dos modelos de relaciones entre las variables del problema de OPF que derivan de los sistemas físicos que gobiernan estas interacciones.

4.2.1. Modelo BIM (Bus Injection Model). El *Bus Injection Model* (BIM) describe la red eléctrica a través de las inyecciones de potencia en cada bus y la matriz de admitancias nodales (4.1). Es el modelo tradicional utilizado en la formulación clásica del flujo de carga y en la mayoría de formulaciones del OPF[1].

Variables del modelo.

- $V \in \mathbb{C}^N$: vector de tensiones nodales complejas.
- $S = P + jQ \in \mathbb{C}^N$: vector de potencias complejas inyectadas en cada bus.

Ecuación fundamental. La potencia inyectada en cada bus se define en forma componente a componente de la siguiente manera:

$$(4.2) \quad S_i = V_i \left(\sum_{j \in \mathcal{N}} Y_{ij}^* (V_i^* - V_j^*) \right)$$

Y sea el conjunto de soluciones V para cada s :

$$\mathbb{V}(s) := \{ V \in \mathbb{C}^N \mid V \text{ satisface (4.2)} \}$$

Por conveniencia V_1 en el vector de $V := (V_j, j \in N)$ esta definido como el nodo de referencia o nodo slack y su valor es $1\angle 0^\circ$.

4.2.2. Modelo BFM (Branch Flow Model). El *Branch Flow Model* (BFM) describe la red desde la perspectiva de los flujos de potencia y corrientes en cada rama. Es ampliamente utilizado en estudios de sistemas radiales[1].

Para cada línea $(i, j) \in \mathcal{E}$ se definen:

- $I_{ij} \in \mathbb{C}$: corriente compleja que fluye de i hacia j .
- $S_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij}$: potencia compleja que fluye de i a j .
- $\ell_{ij} = |I_{ij}|^2$: magnitud cuadrática de la corriente.
- Sea m el número de líneas o ramas.

Para cada bus i :

- $V_i \in \mathbb{C}$: tensión nodal compleja.
- $S_i = P_i + jQ_i$: potencia neta inyectada al bus.

Las ecuaciones fundamentales para este modelo son las siguientes:

$$(4.3) \quad I_{ij} = y_{ij}(V_i - V_j)$$

$$(4.4) \quad S_{ij} = V_i I_{ij}^*$$

$$(4.5) \quad \sum_{i:i \rightarrow j} S_{ij} = \sum_{k:k \rightarrow i} (S_{ki} - z_{ki}|I_{ki}^2|) + s_i$$

Donde (4.3) es la ley de Ohm, (4.4) define la potencia que circula por un elemento de transmisión y (4.5) impone el balance de potencia para cada nodo.

Sea el conjunto solución formado por elementos de la forma $x := (S, I, V)$ para cada s :

$$\mathbb{X}(s) := \{ c \in \mathbb{C}^{2m+N} \mid x \text{ satisface (4.3), (4.4), (4.5)} \}$$

Los modelos BIM (*Bus Injection Model*) y BFM (*Branch Flow Model*) constituyen dos representaciones matemáticamente equivalentes de las leyes eléctricas que gobiernan un sistema de potencia en estado estacionario. Aunque difieren en la elección de variables (inyecciones versus flujos por rama), ambos modelos describen la misma física y generan exactamente el mismo conjunto de soluciones factibles.

En el modelo BIM las variables fundamentales son el voltaje por barra y la potencia por barra

En el modelo BFM las variables fundamentales son el voltaje por barra, la corriente por línea y la potencia por línea. La correspondencia entre ellas se obtiene directamente de las leyes de Kirchhoff y la definición de admitancias.

De BIM a BFM: Dado un vector de tensiones V que satisface el modelo BIM, definimos

$$I_{ij} = y_{ij}(V_i - V_j), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E},$$

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^*$$

Con estas definiciones, los flujos (S_{ij}, I_{ij}) satisfacen automáticamente las ecuaciones del modelo BFM.

La correspondencia entre BIM y BFM es biyectiva siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. La red no contiene ramas abiertas ni elementos desconectados.
2. Todas las líneas $(i, j) \in \mathcal{E}$ tienen una admitancia $Y_{ij} \neq 0$.
3. Las tensiones V_i son distintas de cero.

Debido a la biyección entre BIM y BFM, ambos modelos generan el mismo conjunto de soluciones factibles del flujo de potencia AC. Por lo tanto:

$$\text{mín } f(V, S) \quad \text{sujeto al BIM}$$

es equivalente a

$$\text{mín } f(S_{ij}, I_{ij}, V) \quad \text{sujeto al BFM,}$$

siempre que se apliquen las transformaciones anteriores.

La diferencia entre ellos no es física sino algebraica, lo que tiene importantes implicaciones para el análisis de sus propiedades como problema de optimización

5. CARACTERÍSTICAS MATEMÁTICAS DEL PROBLEMA OPF

5.1. Convexidad del Problema. Un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualquier $x, y \in \mathcal{C}$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ se satisface:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{C}.$$

Un problema de optimización

$$\text{mín}_x f(x) \quad \text{s.a. } x \in \mathcal{C}$$

es **convexo** si y sólo si f es convexa, y \mathcal{C} es un conjunto convexo. [10]

El problema OPF completo puede cumplir el requisito de que la función objetivo $C_i(P_i^g)$ sea convexa, el problema es que la región factible no lo es. Esto se debe a las siguientes no convexidades fundamentales: los límites técnicos de línea dependen de expresiones cuadráticas no convexas como $V_i V_j^*$; y las ecuaciones nodales $S_i = V_i (YV)_i^*$ involucran multiplicación de variables complejas. Debido a que la función objetivo es cuadrática, las restricciones también son cuadráticas y las variables son complejas podemos describir al problema como QCQP (Quadratically constrained quadratic program).[1]

5.1.1. Conjunto Factible del Problema OPF. En un problema general de optimización

$$\text{mín}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.a. } g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0,$$

se define el **conjunto factible** como:

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0\}.$$

Es decir, \mathcal{F} agrupa todos los puntos que satisfacen exactamente las restricciones de igualdad y desigualdad del problema. [10]

El conjunto factible en el problema completo de OPF depende de la metodología que se esté utilizando, en el modelo BIM el conjunto factible solo depende del vector de tensiones, mientras que el modelo BFM depende de las potencias, corrientes y voltajes del sistema. [1]

El conjunto factible del OPF, denotado por \mathcal{F}_{OPF} en el modelo BIM, está formado por

$$\mathcal{F}_{OPF} := \left\{ (V) \in \mathcal{X} \left| \begin{array}{l} S = \text{diag}(V)Y^*V^*, \\ P^{\text{mín}} \leq P^g \leq P^{\text{máx}}, \\ Q^{\text{mín}} \leq Q^g \leq Q^{\text{máx}}, \\ (V_i^{\text{mín}})^2 \leq |V_i|^2 \leq (V_i^{\text{máx}})^2, \forall i, \\ |S_{ij}(V)|^2 \leq (S_{ij}^{\text{máx}})^2, \forall (i, j) \in \mathcal{E}. \end{array} \right. \right\}.$$

5.2. Diferenciabilidad y Smoothness del Problema OPF. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es **continuamente diferenciable** (en notación C^1) si existe un vector gradiente $\nabla f(x)$ en todo $x \in \text{dom}(f)$ y si la aplicación $x \mapsto \nabla f(x)$ es continua. [10]

De forma general, un problema de optimización

$$\text{mín } f(x) \text{ s.a. } g(x) = 0, h(x) \leq 0,$$

es **suave** si todas sus funciones f , g y h son C^1 . Cuando además poseen segundas derivadas continuas, se dice que el problema es C^2 , lo cual permite definir Hessianos, condiciones de segundo orden y aproximaciones cuadráticas.

En el caso de funciones complejas, se considera la diferenciabilidad respecto a sus partes reales e imaginarias. Para cualquier variable compleja $z = x + jy$, se define:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right].$$

Todas las funciones que aparecen en el OPF (inyección de potencia, flujos de línea, magnitud de tensión, costos) son **suaves** (C^∞) cuando se expresan en variables reales.

5.3. Cono Tangente y Calificación de Restricciones. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto factible y sea $x^* \in \mathcal{F}$ un punto factible. El **cono tangente** de \mathcal{F} en x^* se define como:

$$T_{\mathcal{F}}(x^*) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \downarrow 0, \exists d_k \rightarrow d \text{ tal que } x^* + t_k d_k \in \mathcal{F}\}.$$

Equivalentemente (cuando \mathcal{F} está descrito mediante funciones suaves)

$$T_{\mathcal{F}}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^\top d = 0, i \in \mathcal{E}(x^*), \nabla h_j(x^*)^\top d \leq 0, j \in \mathcal{A}(x^*)\},$$

donde:

$$\mathcal{E}(x^*) := \{i : g_i(x^*) = 0\}, \quad \mathcal{A}(x^*) := \{j : h_j(x^*) = 0\},$$

son los índices de restricciones activas de igualdad y desigualdad. [10]

Sea el vector de variables del problema de flujo óptimo de potencia (OPF), en formulación de inyección nodal (*Bus Injection Model*, BIM), definido como

$$x := (V, S) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N,$$

donde $V \in \mathbb{C}^N$ representa el vector de tensiones nodales y $S \in \mathbb{C}^N$ el vector de potencias complejas inyectadas en las barras.

El conjunto factible del OPF se define mediante restricciones de igualdad que representan el modelo eléctrico de la red y restricciones de desigualdad que imponen los límites operativos.

Las restricciones de igualdad se expresan como

$$\begin{aligned} g_1^P(V, S) &:= \Re(S - \text{diag}(V) \overline{YV}) = 0, \\ g_2^Q(V, S) &:= \Im(S - \text{diag}(V) \overline{YV}) = 0, \end{aligned}$$

las cuales garantizan el balance de potencia activa y reactiva en cada barra.

Las restricciones de desigualdad representan los límites operativos del sistema eléctrico:

$$\begin{aligned} V_i^{\min} &\leq |V_i| \leq V_i^{\max}, & i = 1, \dots, N, \\ P_i^{\min} &\leq \Re(S_i) \leq P_i^{\max}, & i = 1, \dots, N, \\ Q_i^{\min} &\leq \Im(S_i) \leq Q_i^{\max}, & i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

En consecuencia, el conjunto factible del OPF queda definido como

$$\Omega := \left\{ x = (V, S) : \begin{array}{l} g_1^P(x) = 0, \quad g_2^Q(x) = 0, \\ V_i^{\min} \leq |V_i| \leq V_i^{\max}, \\ P_i^{\min} \leq \Re(S_i) \leq P_i^{\max}, \\ Q_i^{\min} \leq \Im(S_i) \leq Q_i^{\max} \end{array} \right\}.$$

Sea $x = (V, S) \in \Omega$ un punto factible. El *cono tangente* del conjunto factible Ω en x , denotado por $T_\Omega(x)$, está formado por todas las direcciones factibles de primer orden (dV, dS) que preservan las restricciones del OPF de manera infinitesimal.

Formalmente, el cono tangente se define como

$$T_\Omega(x) := \left\{ (dV, dS) : \begin{array}{l} \nabla g_1^P(x)^\top (dV, dS) = 0, \\ \nabla g_2^Q(x)^\top (dV, dS) = 0, \\ \nabla h_i(x)^\top (dV, dS) \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x) \end{array} \right\},$$

donde $\mathcal{A}(x)$ denota el conjunto de restricciones de desigualdad activas en el punto x .

Calificaciones de restricciones (CQ). Consideremos el conjunto de restricciones activas en x^* :

$$\mathcal{A}(x^*) = \{j : h_j(x^*) = 0\}.$$

Denótese por $\mathcal{A}(x) \subset \mathcal{I}$ el conjunto de restricciones activas en un punto factible $x \in \Omega$.

5.3.1. LICQ (Linear Independence Constraint Qualification). Se dice que la LICQ se satisface en x si el conjunto de gradientes

$$\{\nabla g_1^P(x), \nabla g_2^Q(x), \nabla h_i(x) : i \in \mathcal{A}(x)\}$$

es linealmente independiente.

El LICQ implica que las ecuaciones de red y las restricciones operativas activas definen localmente una intersección regular, garantizando la unicidad de los multiplicadores de Lagrange asociados.

5.3.2. *MFCQ (Mangasarian–Fromovitz Constraint Qualification)*. Se dice que la *MFCQ* se satisface en x si:

- Los gradientes de las restricciones de igualdad

$$\nabla g_1^P(x), \nabla g_2^Q(x)$$

son linealmente independientes;

- Existe una dirección d tal que

$$\nabla g_1^P(x)^\top d = 0, \quad \nabla g_2^Q(x)^\top d = 0,$$

y

$$\nabla h_i(x)^\top d < 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x).$$

Esta condición garantiza la existencia de una dirección factible de primer orden que reduce simultáneamente todas las restricciones operativas activas, manteniendo el balance de potencia.

5.3.3. *CRCQ (Constant Rank Constraint Qualification)*. Se dice que la *CRCQ* se satisface en x si, para todo subconjunto $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}(x)$, el rango de la matriz formada por los gradientes

$$\{\nabla g_1^P(x), \nabla g_2^Q(x), \nabla h_i(x) : i \in \mathcal{J}\}$$

permanece constante en un entorno de x .

5.4. Lagrangiano del Problema OPF.

5.4.1. *Multiplicadores de Lagrange*. Asociamos:

$$\lambda_i^P, \lambda_i^Q \in \mathbb{R} \quad \text{para las igualdades } g_i^P(x), g_i^Q(x),$$

y para las desigualdades que detallan los límites técnicos del sistema:

$$\begin{aligned} \mu_{V,i}^{\min} &\geq 0, & \mu_{V,i}^{\max} &\geq 0, \\ \mu_{P,i}^{\min} &\geq 0, & \mu_{P,i}^{\max} &\geq 0, \\ \mu_{S,ij} &\geq 0, & (i,j) &\in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

El Lagrangiano se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i^P g_i^P(x) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i^Q g_i^Q(x) \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{N}} \mu_{V,i}^{\min} h_{V,i}^{\min}(x) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \mu_{V,i}^{\max} h_{V,i}^{\max}(x) \\ (5.1) \quad &+ \sum_{i \in \mathcal{G}} \mu_{P,i}^{\min} h_{P,i}^{\min}(x) + \sum_{i \in \mathcal{G}} \mu_{P,i}^{\max} h_{P,i}^{\max}(x) \\ &+ \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \mu_{S,ij} h_{S,ij}(x). \end{aligned}$$

5.5. Condiciones de Optimalidad de Primer Orden (KKT). Las condiciones KKT caracterizan puntos críticos del problema OPF bajo calificaciones apropiadas de restricciones (LICQ, MFCQ o CRCQ). Para el problema de optimización las condiciones KKT consisten en la combinación de factibilidad primal, estacionariedad del Lagrangiano, factibilidad dual y complementariedad.

Consideramos el Lagrangiano (5.1) donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ son multiplicadores de restricciones de igualdad y $\mu_j \geq 0$ son multiplicadores de restricciones de desigualdad.

1. *Factibilidad primal.* En el AC–OPF, la factibilidad primal exige:

$$g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, 2N,$$

donde

$$g_i^P(x) = P_i^g - P_i^d - \Re(V_i(YV)_i^*),$$

$$g_i^Q(x) = Q_i^g - Q_i^d - \Im(V_i(YV)_i^*),$$

y las desigualdades activas:

$$h_j(x^*) \leq 0.$$

En particular:

$$\begin{aligned} (V_i^{\min})^2 - |V_i|^2 &\leq 0, \\ |V_i|^2 - (V_i^{\max})^2 &\leq 0, \\ |S_{ij}(V)|^2 - (S_{ij}^{\max})^2 &\leq 0, \\ P_i^{\min} - P_i^g &\leq 0, \quad P_i^g - P_i^{\max} \leq 0. \end{aligned}$$

2. *Factibilidad dual.* Los multiplicadores asociados a desigualdades deben satisfacer:

$$\mu_j^* \geq 0,$$

en particular:

$$\begin{aligned} \mu_{V,i}^{\min} &\geq 0, \quad \mu_{V,i}^{\max} \geq 0, \\ \mu_{P,i}^{\min} &\geq 0, \quad \mu_{P,i}^{\max} \geq 0, \\ \mu_{S,ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

3. *Complementariedad.* Para cada restricción de desigualdad se debe cumplir:

$$\mu_j^* h_j(x^*) = 0.$$

En el OPF:

$$\begin{aligned} \mu_{V,i}^{\min} ((V_i^{\min})^2 - |V_i|^2) &= 0, \\ \mu_{V,i}^{\max} (|V_i|^2 - (V_i^{\max})^2) &= 0, \\ \mu_{P,i}^{\min} (P_i^{\min} - P_i^g) &= 0, \\ \mu_{P,i}^{\max} (P_i^g - P_i^{\max}) &= 0, \\ \mu_{S,ij} (|S_{ij}(V)|^2 - (S_{ij}^{\max})^2) &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, una restricción activa sólo puede tener multiplicador positivo y una restricción inactiva debe tener multiplicador cero.

4. *Estacionariedad del Lagrangiano.*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0.$$

En el caso del AC–OPF, esto implica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i^g} &= C_i'(P_i^g) + \lambda_i^P - \mu_{P,i}^{\min} + \mu_{P,i}^{\max} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i^g} &= \lambda_i^Q - \mu_{Q,i}^{\min} + \mu_{Q,i}^{\max} = 0, \end{aligned}$$

y para las tensiones complejas $V_i = V_i^r + jV_i^i$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i^r} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_i^i} = 0.$$

Estas derivadas involucran:

$$\frac{\partial}{\partial V_i} \Re(\lambda_i^* V_i (YV)_i^*), \quad \frac{\partial}{\partial V_i} |S_{ij}(V)|^2, \quad \frac{\partial}{\partial V_i} |V_i|^2.$$

En forma compacta:

$$\nabla_V f(x^*) + \sum_i \lambda_i^* \nabla_V g_i(x^*) + \sum_j \mu_j^* \nabla_V h_j(x^*) = 0.$$

En resumen, un punto (x^*, λ^*, μ^*) satisface las condiciones KKT del OPF si y sólo si:

- (i) Factibilidad primal: $g_i(x^*) = 0$, $h_j(x^*) \leq 0$,
- (ii) Factibilidad dual: $\mu_j^* \geq 0$,
- (iii) Complementariedad: $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$,
- (iv) Estacionariedad: $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$.

5.6. Condiciones de Optimalidad de Segundo Orden. Las condiciones KKT de primer orden caracterizan puntos estacionarios del problema OPF, pero dado que el problema es no convexo, no garantizan que dichos puntos sean mínimos locales. Para ello se requieren las *condiciones de optimalidad de segundo orden*, basadas en la matriz Hessiana del Lagrangiano y en el cono crítico asociado a las restricciones activas.

Definición del Hessiano del Lagrangiano. Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_j \mu_j h_j(x).$$

Su Hessiano respecto a las variables primales es:

$$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla_{xx}^2 g_i(x) + \sum_j \mu_j \nabla_{xx}^2 h_j(x).$$

En el OPF, las funciones g_i y h_j son polinomios en las partes real e imaginaria de V , por lo que \mathcal{L} es dos veces continuamente diferenciable (C^2).

Cono crítico. Sea x^* un punto factible que satisface las condiciones KKT. Definimos el **cono crítico** como:

$$C(x^*) := \left\{ d : \begin{aligned} \nabla g_i(x^*)^\top d &= 0, & i \in \mathcal{N}_e, \\ \nabla h_j(x^*)^\top d &= 0, & j \in \mathcal{A}(x^*) \text{ con } \mu_j^* > 0, \\ \nabla h_j(x^*)^\top d &\leq 0, & j \in \mathcal{A}(x^*) \text{ con } \mu_j^* = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Podemos interpretar que $C(x^*)$ contiene las direcciones que no violan las restricciones activas en primer orden

Condición necesaria de segundo orden (SONC). Si x^* es un mínimo local y satisface KKT, entonces:

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0, \quad \forall d \in C(x^*).$$

Esta condición descarta máximos locales y puntos silla, pero no garantiza que el punto sea un mínimo local estricto.

Condición suficiente de segundo orden (SOSC). El punto factible x^* que satisface KKT es un **mínimo local estricto** si:

$$d^\top \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0, \quad \forall d \in C(x^*) \setminus \{0\}.$$

Equivalentemente, el Hessiano del Lagrangiano es **positivo definido** en la restricción del subespacio crítico.

En el OPF:

$$f(x) \in C^2, \quad g_i(x) \in C^2, \quad h_j(x) \in C^2,$$

por lo que el Hessiano del Lagrangiano existe y es continuo.

La satisfacción de SOSC implica que x^* es un mínimo local estricto y establece la base para análisis de sensibilidad, estabilidad numérica y comportamiento asintótico de métodos de punto interior.

6. EXPLORACIÓN DEL CONJUNTO FACTIBLE

En esta sección se implementa un barrido masivo del flujo de potencia AC para aproximar el conjunto factible de un sistema de 3 barras, con el objetivo de visualizar curvaturas, fronteras y zonas sin solución, características típicas de un problema no convexo.

6.0.1. Modelo de red y matriz Y_{bus} . Se consideran tres líneas con impedancias complejas:

$$Z_{12}, Z_{13}, Z_{23} \in \mathbb{C}, \quad y_{ij} = \frac{1}{Z_{ij}}.$$

A partir de las admitancias serie y_{ij} se construye manualmente la matriz nodal:

$$Y_{bus} = G + jB \in \mathbb{C}^{3 \times 3},$$

donde $G = \Re(Y_{bus})$ y $B = \Im(Y_{bus})$. Esta matriz codifica la topología y parámetros eléctricos del sistema.

6.0.2. Ecuaciones de flujo de potencia (Bus Injection Model). Sea el fasor de voltaje en la barra i dado por $V_i = |V_i|e^{j\theta_i}$. Las inyecciones activas y reactivas en el modelo BIM se expresan como:

$$(6.1) \quad P_i(V, \theta) = \sum_{k=1}^3 |V_i||V_k| \left(G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) \right),$$

$$(6.2) \quad Q_i(V, \theta) = \sum_{k=1}^3 |V_i||V_k| \left(G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) \right).$$

La barra 1 se fija como slack: $|V_1| = 1$ p.u. y $\theta_1 = 0$. La barra 2 se trata como PV: se impone un voltaje $|V_2| = V_2^{\text{set}}$ y una inyección activa neta P_2^{set} . La barra 3 es PQ: se fija una demanda (P_{d3}, Q_{d3}) , por lo que

$$P_3 = -P_{d3}, \quad Q_3 = -Q_{d3}.$$

El vector de incógnitas se define como

$$x = (\theta_2, \theta_3, |V_3|),$$

y se resuelve el sistema no lineal de desbalances

$$F(x) = \begin{bmatrix} P_2(x) - P_2^{\text{set}} \\ P_3(x) + P_{d3} \\ Q_3(x) + Q_{d3} \end{bmatrix} = 0,$$

usando un solucionador tipo Newton (función `root` de `scipy.optimize`).

6.0.3. Barrido masivo y criterios de factibilidad. Para aproximar el conjunto factible se realiza un barrido en dos parámetros:

- La generación en la barra 2, $P_{g2} \in [\underline{P}_{g2}, \overline{P}_{g2}]$,
- Un factor de carga $\lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ que escala las demandas.

En cada par (P_{g2}, λ) se define la inyección neta en la barra 2 como

$$P_2^{\text{set}} = P_{g2} - P_{d2}(\lambda),$$

y se resuelve el flujo de potencia. Si el solucionador converge, se filtra la solución imponiendo un umbral mínimo de voltaje en la barra de carga, por ejemplo $|V_3| > 0,6$ p.u., con el fin de evitar puntos numéricamente degenerados.

Luego se recalcula la potencia activa del slack:

$$P_1 = P_1(V, \theta),$$

y la potencia reactiva generada en la barra 2 como

$$Q_{g2} = Q_2^{\text{net}} + Q_{d2}(\lambda),$$

donde Q_2^{net} es la inyección reactiva calculada por el BIM y Q_{d2} representa la carga local asociada.

Finalmente se almacena cada punto factible como:

$$(P_1, P_{g2}, Q_{g2}, |V_3|, P_{d2}(\lambda) + P_{d3}(\lambda)).$$

6.0.4. Visualización del conjunto factible. Con la nube de puntos factibles se generan cuatro visualizaciones:

1. **Región factible 3D** en el espacio (P_1, P_{g2}, Q_{g2}) coloreada por $|V_3|$.
2. **Manifold de voltaje** en $(P_1, P_{g2}, |V_3|)$ coloreado por la demanda total.
3. **Curvas PV superpuestas** en $(P_1 + P_{g2}, |V_3|)$.

Superficie de Estabilidad de Voltaje

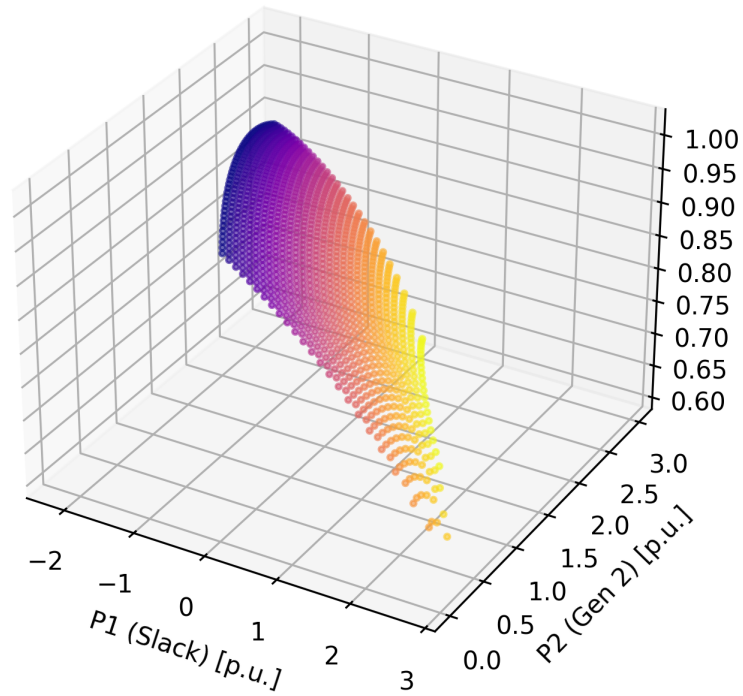


FIGURA 1. Exploración del conjunto factible en un sistema de 3 barras P1, P2 y V3

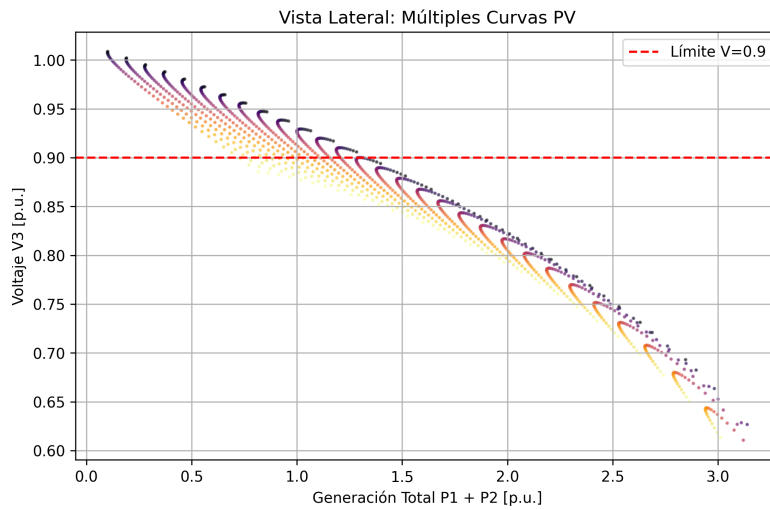


FIGURA 2. Exploración del conjunto factible en un sistema de 3 barras curvas PV

Región Factible de Generación (Color=V3)

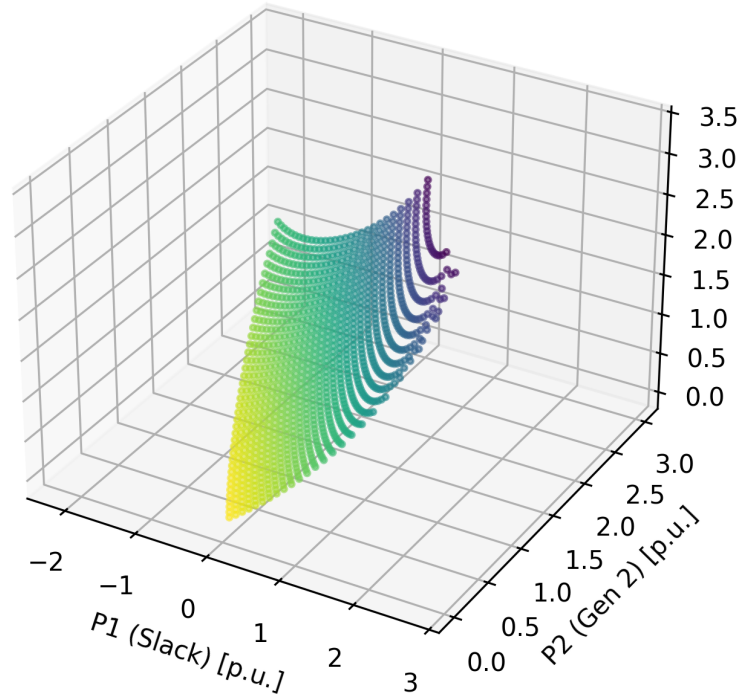


FIGURA 3. Exploración del conjunto factible en un sistema de 3 barras P1, P2 y Q2

7. CONCLUSIONES

Ante los constantes retos que conllevan los sistemas eléctricos de potencia, en cuanto al tamaño del problema y los nuevos avances tecnológicos, el estudio de las características matemáticas del problema de optimización de flujo de potencia sigue siendo muy vigente para poder encontrar las soluciones óptimas.

La investigación sobre OPF cubren una diversa variedad de métodos, desde métodos convencionales, a inteligencia artificial y ciencia de datos, y métodos heurísticos lo que nos indica que es un campo en constante cambio.

En muchas ocasiones, en la práctica, no es posible analizar estas propiedades del problema, por lo que cabe resaltar que comprender estas propiedades resulta esencial para el diseño de métodos numéricos robustos, el desarrollo de relajaciones convexas y la correcta interpretación de los resultados operativos en sistemas eléctricos reales.

REFERENCIAS

1. Steven H. Low. *Convex Relaxation of Optimal Power Flow. Part I: Formulations and Equivalence* IEEE Transactions on Control of Network Systems, 15(1): 15–27, March 2014.
2. Arun Sukumaran Nair, Shirang Abhyankar, Slaven Peles, Prakash Ranganathan. *Computational and numerical analysis of AC optimal power flow formulations on large-scale power grids*, IET Research Journals, pp. 1–9, The Institution of Engineering and Technology 2015.

3. Ahmed Babiker, Sulaiman S. Ahmad, Ijaz Ahmed, Muhammad Khalid, Mohammad A. Abido, Fahad Saleh Al-Ismael, *Optimal Power Flow: A Review of State-of-the-Art Techniques and Future Perspectives* IEEE Access, Volumen 13 2025.
4. Ian A. Hiskens and Robert J. Davy. *Exploring the Power Flow Solution Space Boundary* IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS, VOL. 16, NO. 3, AUGUST 2001
5. Bukhsh, W., Grothey, A., McKinnon, K. et al. (1 more author) *Local solutions of the optimal power flow problem*. IEEE Transactions on Power Systems, 28 (4). pp. 4780-4788. (2213) ISSN 0885-8950.
6. Mohammad Rasoul Narimani, Daniel K. Molzahn, Dan Wu, and Mariesa L. Crow *Empirical Investigation of Non-Convexities in Optimal Power Flow Problems* 2018 Annual American Control Conference (ACC)
7. Mary B. Cain, Richard P. O'Neill, Anya Castillo *History of Optimal Power Flow and Formulations* Federal Energy Regulatory Commission (FERC).
8. Stephen Frank and Steffen Rebennack *An introduction to optimal power flow: Theory, formulation, and examples* IIE TRANSACTIONS 2016, Vol 49. No. 12, 1172-1197
9. J. Zhu. *Optimization of Power System Operation* 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2015
10. J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed., New York: Springer, 2006.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS.
 Dirección actual: Tegucigalpa, Francisco Morazán, Honduras
 Dirección de correo electrónico: lesman1999@gmail.com

EL PROBLEMA INVERSO EN UN MODELO DE ANGIOGÉNESIS TUMORAL: CÁLCULO DE COEFICIENTE DE QUIMIOTAXIS MEDIANTE EL USO DE REDES NEURONALES

SHEILA MEMBREÑO

RESUMEN. La transición de un tumor hacia la malignidad depende críticamente de la angiogénesis, un proceso dominado por la quimiotaxis que es difícil de cuantificar en la práctica clínica debido a la naturaleza estática de las imágenes médicas y la complejidad del problema inverso. Los métodos actuales, como la optimización discreta o el aprendizaje profundo puro, presentan limitaciones por su dependencia de mallas computacionales o la necesidad de bases de datos masivas para el entrenamiento. Esta investigación propone la implementación de Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs) para resolver el problema inverso en el modelo de angiogénesis de Chaplain. A diferencia de trabajos previos centrados en modelos de reacción-difusión, este enfoque incorpora el término de advección no lineal para capturar los frentes de onda generados por la respuesta quimiotáctica. La metodología utiliza un enfoque libre de malla con diferenciación automática y una estrategia de entrenamiento en dos etapas (pre-entrenamiento y ajuste fino) para mitigar inestabilidades numéricas. El objetivo principal es recuperar con precisión los coeficientes biológicos específicos del paciente, en particular la sensibilidad quimiotáctica (χ), a partir de datos estáticos, proporcionando una herramienta personalizada para cuantificar la agresividad vascular sin requerir grandes volúmenes de datos sintéticos. El presente trabajo consta de una investigación enfocada en guiar la resolución del problema inverso en modelos de crecimiento tumoral, específicamente el modelo de angiogénesis, utilizando redes neuronales. La motivación principal es superar las limitaciones de la oncología clínica, que depende de imágenes estáticas y carece de herramientas eficientes para inferir parámetros biológicos dinámicos específicos del paciente, como el coeficiente de quimiotaxis (χ).

1. INTRODUCCIÓN

1.1. El fenómeno biológico y el problema clínico. El crecimiento de los tumores sólidos es un proceso que ocurre en dos etapas distintas: una fase inicial avascular y una fase vascular agresiva. Durante la fase avascular, el tumor permanece en un estado latente, limitado por la difusión de nutrientes, alcanzando apenas unos milímetros de diámetro. [2] La transición hacia la malignidad depende críticamente de la angiogénesis, un proceso mediante el cual el tumor, bajo condiciones de hipoxia, secreta factores químicos (TAF) que inducen a las células endoteliales de los vasos sanguíneos cercanos a migrar y proliferar, formando una nueva red capilar que nutre al tumor. [2]

Desde una perspectiva clínica, comprender la dinámica de esta vascularización es vital para predecir la agresividad del cáncer. [2] Sin embargo, en la práctica oncológica, los médicos a menudo disponen únicamente de imágenes estáticas (como

Date: Diciembre 2025.

Key words and phrases. angiogénesis, redes neuronales, problema inverso.

resonancias magnéticas o histologías) que muestran el estado final de la vasculatura, sin información directa sobre los parámetros dinámicos que guiaron su formación, como la velocidad de respuesta quimiotáctica de las células endoteliales. [5] [6]

1.2. El modelado matemático clásico y sus limitaciones. Históricamente, la biología matemática ha abordado este fenómeno mediante modelos continuos basados en ecuaciones en derivadas parciales (EDP). El trabajo de Chaplain (1996) [2] estableció un marco robusto donde la densidad de células endoteliales se modela mediante un equilibrio entre difusión aleatoria (motilidad) y, crucialmente, quimiotaxis (advección dirigida por gradientes químicos).

Aunque estos modelos describen con éxito el problema directo (simular el crecimiento dado un conjunto de parámetros), su aplicación clínica se ha visto obstaculizada por la dificultad de resolver el *problema inverso*: inferir los parámetros biológicos específicos de un paciente (como el coeficiente de quimiotaxis, χ) a partir de las imágenes médicas observadas. Como señalan Zhang et al. (2024) [3], la estimación de estos parámetros es un desafío debido a la escasez de datos temporales y la naturaleza mal planteada del problema matemático.

1.3. La inteligencia artificial en el modelado oncológico. En años recientes, la aplicación de técnicas de inteligencia artificial al modelado matemático en oncología ha abierto nuevas posibilidades para estimar las propiedades biológicas de los tumores a partir de imágenes médicas. En este contexto, investigaciones recientes como la de Ezhov et al. (2023) [5] han propuesto sistemas de aprendizaje profundo capaces de estimar los parámetros de crecimiento tumoral de manera casi instantánea. Sin embargo, este enfoque presenta una limitación práctica considerable: para funcionar correctamente, el sistema debe ser entrenado previamente con una base de datos masiva de tumores simulados (aproximadamente 100,000 casos sintéticos). Esto puede restringir su capacidad para adaptarse a pacientes reales que presenten características atípicas no contempladas en la distribución de los datos de entrenamiento.

Desde una perspectiva diferente, Balcerak et al. (2023) [6] desarrollaron el método ODIL (Optimizing a Discrete Loss), el cual ajusta el modelo matemático directamente a los datos del paciente mediante técnicas de optimización. Aunque es una estrategia efectiva que integra restricciones físicas, su funcionamiento sigue dependiendo de la discretización del espacio anatómico en una cuadrícula fija o malla de cálculo, lo que puede limitar la flexibilidad numérica al tratar con geometrías complejas o gradientes elevados.

A diferencia de las estrategias anteriores, esta investigación propone la implementación de *Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs)* para resolver el problema inverso de la angiogénesis. Siguiendo la metodología de entrenamiento híbrido validada recientemente por Zhang et al. (2024) [3] para glioblastomas, este enfoque ofrece una ventaja crítica: es teóricamente libre de malla (mesh-free) y utiliza diferenciación automática, lo que permite calcular derivadas exactas sin los errores de truncamiento de los métodos tradicionales.

Mientras que trabajos previos (como Zhang [3] y Ezhov [5]) se centran en modelos de reacción-difusión puros, la angiogénesis [2] está dominada por la *quimiotaxis*, un término de advección no lineal ($\nabla \cdot (\chi n \nabla c)$). Este término introduce frentes de onda pronunciados y comportamientos hiperbólicos que representan un desafío

numérico mayor. El objetivo principal de esta investigación es demostrar que las PINNs pueden recuperar con precisión el coeficiente de quimiotaxis (χ) a partir de datos estáticos, proporcionando una herramienta personalizada para cuantificar la agresividad vascular de un tumor sin necesidad de bases de datos masivas previas.

2. JUSTIFICACIÓN

La relevancia de este estudio se establece sobre tres problemas críticos que hoy limitan el éxito de los tratamientos oncológicos. En primer lugar, cuestiona la práctica clínica convencional de planificar radioterapias asumiendo formas geométricas simples, las cuales a menudo fallan al no cubrir las zonas donde el tumor realmente se está infiltrando ([6]; [3]). En segundo lugar, busca superar la rigidez de las herramientas computacionales actuales, que suelen requerir semanas de cálculos previos o bases de datos masivas para adaptarse a la biología de un nuevo paciente ([5]; [3]). Finalmente, ataca un reto matemático pendiente: lograr que la inteligencia artificial aprenda a simular el movimiento dirigido de las células hacia los nutrientes —conocido como quimiotaxis [2]—, un comportamiento mucho más complejo de predecir que la simple expansión aleatoria utilizada en los modelos predictivos más recientes ([3], [6]).

El tratamiento estándar para tumores cerebrales invasivos, como el glioblastoma, sigue dependiendo de una planificación geométrica que aplica márgenes de seguridad uniformes (típicamente 1.5 - 2 cm) alrededor de la lesión visible en resonancia magnética (MRI) ([3], [6]). Este enfoque omite la compleja realidad biológica del cáncer: las células no se expanden de manera uniforme en todas direcciones (isotrópicamente), sino que invaden el tejido siguiendo rutas anatómicas específicas —como las fibras de la materia blanca—, impulsadas tanto por señales químicas como por presiones físicas (gradientes químicos y mecánicos) [6].

Investigaciones publicadas recientemente, como el estudio de Balcerak et al. (2025) sobre una muestra de 152 pacientes, han cuantificado el fracaso de este enfoque convencional: la recurrencia tumoral ocurre frecuentemente fuera de los márgenes estándar de radioterapia, demostrando que la infiltración microscópica es invisible a las técnicas de imagen actuales pero determinante para la supervivencia del paciente ([6], [3]). Por tanto, existe una necesidad crítica de desarrollar herramientas computacionales capaces de predecir esta infiltración oculta ("invisible tumor growth") basándose en la física del transporte celular y no solo en la anatomía visible ([3]).

Para adaptar estos modelos físicos a un contexto clínico individual, resulta indispensable abordar el denominado problema inverso, el cual consiste en estimar los parámetros cinéticos específicos del paciente —como la difusividad, la tasa de proliferación y el coeficiente de quimiotaxis— a partir de una imagen estática. No obstante, las metodologías actualmente disponibles presentan limitaciones importantes que dificultan su adopción en la práctica clínica, entre ellas:

1. Ineficiencia de métodos probabilísticos clásicos: Aunque estos enfoques proporcionan una cuantificación robusta de la incertidumbre, revisiones recientes del estado del arte, como las realizadas por Zhang et al. (2024) [3] y

Balcerak et al. (2025) [6], señalan que estrategias tradicionales como las Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) son computacionalmente prohibitivas para la clínica puesto que requieren resolver el problema directo miles de veces para estimar la distribución posterior, resultando en tiempos de cómputo de días por paciente, lo cual bloquea su integración en flujos de trabajo de radioterapia urgentes,.

2. Rigidez del *Deep Learning* Puro: Enfoques recientes como el de Ezhov et al. (2023) [5] proponen redes neuronales (Learn-Morph-Infer) que aprenden un mapeo directo de imagen a parámetro. Sin embargo, su debilidad radica en la dependencia de datos sintéticos masivos: para funcionar, requieren el pre-entrenamiento con bases de datos de hasta *100,000 simulaciones*,. Esto conlleva un alto costo computacional y, si se desea cambiar la ecuación del modelo se debe regenerar toda la base de datos y reentrenar la red desde cero.
3. Dependencia de Malla en Optimización Discreta: Aunque métodos como ODIL (Optimizing a Discrete Loss) propuestos por Balcerak et al. [6] eliminan la necesidad de grandes bases de datos, siguen atados a la discretización del dominio en una grilla fija (grid-based). Esto limita la resolución en fronteras irregulares complejas y dificulta el manejo de geometrías reales sin incurrir en errores de aproximación significativos.

Esta investigación propone el uso de PINNs (Physics-Informed Neural Networks) 3.2 como la solución que supera estas limitaciones simultáneas: son métodos libres de malla (mesh-free) que permiten una resolución continua del espacio mediante diferenciación automática, y no requieren bases de datos de entrenamiento masivas, ya que aprenden la física específica del paciente mediante un ajuste fino (fine-tuning) individualizado, como han demostrado preliminarmente Zhang et al. (2024) [3].

En literatura reciente aplicada a la oncología, correspondiente a los últimos cinco años. se observa que predominan los modelos basados en dinámicas difusivas; algunos trabajos incluyendo a Zhang et al. (2024) [3], Ezhov et al. (2023) [5] y Balcerak et al. (2025) [6], fundamentan sus predicciones exclusivamente en la ecuación de Fisher-Kolmogorov:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u) + \rho u(1 - u)$$

Este modelo asume que la invasión tumoral es puramente difusiva (movimiento aleatorio). Sin embargo, la biología fundamental de la angiogénesis establecida por Chaplain [2] demuestra que la formación de nueva vasculatura —el evento clave en la progresión de un tumor hacia la malignidad— es un proceso dominado por la *quimiotaxis*: el movimiento dirigido de células endoteliales en respuesta a gradientes de factores de crecimiento angiogénicos (TAF).

Matemáticamente, esto implica pasar de una ecuación parabólica a una ecuación dominada por un componente de transporte debido al término de advección no lineal o quimiotaxis [2]:

$$-\nabla \cdot (\chi n \nabla c)$$

La inclusión de este término rompe la simetría de las soluciones difusivas y genera inestabilidades que dan lugar a proyecciones irregulares o frentes de onda pronunciados, un fenómeno característico de la angiogénesis que difiere de la expansión

suave de los gliomas [2]. La captura numérica de estos gradientes advectivos representa un desafío de estabilidad superior al de los modelos puramente difusivos utilizados actualmente en el estado del arte ([3]; [6]). Este trabajo de investigación pretende extender el formalismo PINN, validado hasta ahora principalmente en modelos de reacción-difusión, para incluir la dinámica advectiva propuesta por Chaplain, contribuyendo a reducir la brecha existente entre la complejidad de los modelos biológicos y las herramientas modernas de inferencia computacional.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y MATEMÁTICOS

Este capítulo se inicia describiendo el modelo inicial de angiogénesis tumoral planteado por Chaplain [2]. Posteriormente, establece el modelo directo (forward model) basado en principios de conservación de masa y la biología del transporte celular con el fin de derivar la formulación específica del problema inverso que será resuelto mediante redes neuronales.

3.1. Definiciones preliminares. Para garantizar la precisión conceptual de esta investigación, se establecen las siguientes definiciones operativas fundamentadas en la literatura de oncología matemática y computacional:

3.1.1. *Biología Tumoral y Angiogénesis.*

1. Glioblastoma (GBM): Se trata del tumor cerebral primario más frecuente y agresivo (clasificado como grado IV según la OMS). Se caracteriza por un crecimiento infiltrativo y difuso, que invade el tejido cerebral circundante más allá de los márgenes visibles en las imágenes médicas, lo que dificulta significativamente la resección completa y favorece una alta tasa de recurrencia.[3]; [6].
2. Estado Metastásico: Fase avanzada del desarrollo tumoral en la que las células cancerosas adquieren la capacidad de invadir tejidos circundantes y diseminarse. Para tumores sólidos, esta transición depende críticamente de la adquisición de un suministro sanguíneo propio a través de la vascularización [2].
3. Angiogénesis Tumoral: Proceso mediante el cual un tumor estimula la formación de nuevos vasos sanguíneos a partir de la vasculatura preexistente del huésped. Este fenómeno constituye un paso crítico en la progresión tumoral, ya que permite al tumor superar la fase avascular latente y avanzar hacia un crecimiento vascularizado y más agresivo. [2].
4. Neovascularización: Formación física de nuevos vasos capilares sanguíneos que penetran el tumor, proporcionándole microcirculación y permitiendo su rápido crecimiento [2].
5. Factor de Angiogénesis Tumoral (TAF): Sustancia química difusible secretada por las células tumorales en el tejido circundante. Actúa como un estímulo quimiotáctico que provoca que las células endoteliales de los vasos sanguíneos vecinos degraden su membrana basal y migren hacia el tumor [2].

6. Células Endoteliales (EC): Células que forman el revestimiento de los vasos sanguíneos. Son los agentes activos de la angiogénesis; responden al TAF migrando y proliferando para formar nuevos brotes capilares [2].

3.1.2. *Dinámica y Transporte Celular.*

7. Quimiotaxis: Movimiento dirigido de las células (en este caso, endoteliales) en respuesta a un gradiente de concentración química. A diferencia de la difusión, implica una migración orientada hacia la fuente del estímulo [2].
8. Sensibilidad Quimiotáctica (χ): parámetro que mide el grado de respuesta de las células frente a los gradientes químicos presentes en el entorno. Valores elevados de χ indican una migración celular más intensa y dirigida hacia las señales angiogénicas [2].
9. Difusividad (D): Medida de la motilidad celular aleatoria de a través del tejido. [3].
10. Difusión Anisotrópica: propiedad del movimiento celular en la que la dispersión no es uniforme en todas las direcciones, sino que se ve condicionada por la estructura anatómica del tejido [3].

3.1.3. *Modelado Matemático y Computacional.*

11. Sistemas de Reacción-Difusión-Advección: Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) que modelan la densidad celular combinando reacción (proliferación), difusión (movimiento aleatorio) y advección (movimiento dirigido por quimiotaxis). [2].
12. Problema Inverso: Proceso matemático de recuperar los parámetros desconocidos del modelo de crecimiento (como tasas de proliferación o difusión) a partir de las imágenes médicas observadas, minimizando la discrepancia entre la simulación y los datos clínicos [7].
13. PINNs (Physics-Informed Neural Networks): Marco de aprendizaje profundo que incorpora las leyes físicas (EDPs) directamente en la función de pérdida de la red neuronal, permitiendo resolver problemas inversos sin necesidad de mallas complejas [3].

3.1.4. *Imagenología y Clínica.*

14. Resonancias Magnéticas Estructurales (MRI): Imágenes médicas utilizadas para visualizar la anatomía. Se utilizan principalmente las modalidades *T1Gd* (núcleo tumoral activo) y *FLAIR* (edema e infiltración), las cuales sirven como condiciones iniciales y datos de validación para el modelo [3].

3.2. Redes Neuronales. Las PINNs (Physics-Informed Neural Networks, por sus siglas en inglés), traducidas al español como Redes Neuronales Informadas por la Física, constituyen un enfoque de aprendizaje profundo orientado a la resolución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales.

Originalmente formalizadas por Raissi, Perdikaris y Karniadakis (2019) [4], las Physics-Informed Neural Networks (PINNs) constituyen un cambio de paradigma en la computación científica. En lugar de recurrir a una discretización espacial mediante mallas para aproximar la solución, este enfoque emplea una red neuronal profunda como aproximador universal de funciones, la cual se entrena para ajustar simultáneamente los datos observados y cumplir las leyes físicas gobernantes del sistema.

En este marco, se define dicha red neuronal profunda para aproximar la solución del problema, denotada como $u_\theta(\mathbf{x}, t)$, donde θ representa el conjunto de parámetros entrenables de la red (pesos y sesgos), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ corresponde al vector de coordenadas espaciales y t denota la variable temporal. La red neuronal define así un mapeo continuo:

$$(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\text{Red Neuronal}} u_\theta(\mathbf{x}, t)$$

que actúa como un aproximador funcional de la solución desconocida de la ecuación gobernante.

La característica distintiva de las Physics-Informed Neural Networks reside en su capacidad para calcular las derivadas parciales de la salida u_θ respecto a sus variables de entrada — en particular $\frac{\partial u}{\partial t}$, ∇u , $\nabla^2 u$ — mediante *diferenciación automática* (AD). A diferencia de los esquemas de diferenciación numérica, que introducen errores de truncamiento, y de la diferenciación simbólica, cuyo costo crece rápidamente con la complejidad de la expresión, la AD evalúa estas derivadas de forma exacta hasta precisión de máquina, aplicando sistemáticamente la regla de la cadena a través de las capas de la red durante el proceso de retropropagación (backpropagation). Esta propiedad permite evaluar el residuo de la ecuación diferencial parcial (EDP) en cualquier punto del dominio espacio-temporal continuo, sin recurrir a una discretización basada en mallas, lo que confiere al método un carácter libre de malla (mesh-free) y una notable flexibilidad para tratar dominios de geometría compleja. [4]

El entrenamiento de la red neuronal se plantea como un problema de optimización no lineal, cuyo objetivo consiste en determinar el conjunto óptimo de parámetros θ^* que minimizan una función de pérdida compuesta \mathcal{L}_{total} . Considerando [3], dicha función de pérdida combina de manera explícita la fidelidad a los datos médicos observados con el cumplimiento de las leyes físicas que gobiernan el proceso de angiogénesis. En particular, se define como

$$(3.1) \quad \mathcal{L}_{total}(\theta) = \mathcal{L}_{PDE} + w_{data}\mathcal{L}_{data} + \mathcal{L}_{reg}$$

donde

- \mathcal{L}_{PDE} : pérdida física residual o residual de la EDP.
- \mathcal{L}_{data} : pérdida de datos o data fidelity.
- \mathcal{L}_{reg} : término de regularización, mitiga los efectos del ruido presente en los datos.
- w_{data} : coeficiente de ponderación, equilibra la afluencia de la información clínica observada frente a las restricciones físicas impuestas por la EDP.

3.3. El Modelo Original de Angiogénesis. La base teórica de este trabajo se sustenta en el modelo continuo de Chaplain, quien describió matemáticamente la transición de un tumor desde su fase avascular (latente) hacia su fase vascular (agresiva); describió la angiogénesis no solo como una expansión difusiva, sino como

un proceso dominado por la migración dirigida hacia el tumor. El fenómeno central modelado es la respuesta de las células endoteliales (EC) a los factores químicos secretados por el tumor, conocidos como Factores de Angiogénesis Tumoral (TAF) [2].

El modelo original plantea un sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) que describen la interacción entre la densidad de células endoteliales, denotada como $n(\mathbf{x}, t)$, y la concentración del factor angiogénico, $c(\mathbf{x}, t)$.

3.3.1. Ecuación de Conservación Celular. La migración de las células endoteliales se modela mediante una ecuación de conservación de masa:

$$(3.2) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_n = f(n, c)$$

Según Chaplain, el flujo celular total \mathbf{J}_n se interpreta como el resultado de la interacción entre dos mecanismos fundamentales de transporte:

1. Motilidad Aleatoria (Difusión): Describe el movimiento de las células en ausencia de estímulos, modelado por la ley de Fick

$$(3.3) \quad \mathbf{J}_{dif} = -D_n \nabla n$$

2. Quimiotaxis (Advección): Describe el movimiento dirigido de las células en respuesta al gradiente químico del TAF. Este es el término crucial que distingue la angiogénesis de los procesos puramente difusivos de invasión tumoral. Matemáticamente se expresa como

$$(3.4) \quad \mathbf{J}_{quim} = n\chi(c)\nabla c$$

, donde $\chi(c)$ es la función de sensibilidad quimiotáctica [2].

Sustituyendo los flujos 3.4 y 3.3 en 3.2e incluyendo un término de proliferación logística (crecimiento limitado por nutrientes), se obtiene la ecuación gobernante que describe la dinámica de las células endoteliales

$$(3.5) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \underbrace{D_n \nabla^2 n}_{\text{Difusión}} - \underbrace{\nabla \cdot (\chi_0 n \nabla c)}_{\text{Quimiotaxis}} + \underbrace{\rho n(1-n)}_{\text{Proliferación}}$$

Donde [2] asume una sensibilidad quimiotáctica constante χ_0 para simplificar el análisis de estabilidad.

3.3.2. Ecuación del Factor Químico (TAF). El modelo original también contempla la dinámica del factor químico c , el cual difunde desde el tumor hacia el tejido circundante, experimenta un decaimiento natural y es consumido por las células endoteliales; dicho comportamiento se describe mediante la ecuación:

$$(3.6) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \nabla^2 c - \lambda c - \beta n c$$

3.6 es una ecuación de reacción-difusión que describe la conservación de masa del factor de angiogénesis tumoral (TAF) en el tejido, donde:

- $c = c(\mathbf{x}, t)$: concentración del Factor de Angiogénesis Tumoral (TAF). Es la sustancia química segregada por el tumor que difunde hacia el tejido sano circundante y actúa como señal para la migración a los vasos sanguíneos.

- D_c : coeficiente de difusión del TAF. Este parámetro físico mide la rapidez con la que el químico se dispersa aleatoriamente a través de la matriz extracelular. Este valor (D_c) es típicamente varios órdenes de magnitud mayor que el coeficiente de difusión celular (D_n), lo que nos permite asumir más tarde que el químico llega al equilibrio muy rápido.
- λ : tasa de decaimiento natural o degradación del químico. El TAF no es una sustancia permanente en el tejido y experimenta procesos de degradación que siguen una cinética de primer orden.
- β : coeficiente de consumo o absorción. Representa la tasa a la cual el químico es metabolizado, internalizado o degradado específicamente por la interacción con las células endoteliales.

3.4. El problema inverso. En la práctica clínica, para individualizar el modelo de angiogénesis resulta necesario estimar los valores de los coeficientes biológicos específicos de cada paciente, los cuales no pueden medirse directamente en el paciente. Desde el punto de vista matemático, esta tarea se formula naturalmente como un problema inverso.

Siguiendo la formulación fundamental propuesta en [7], el problema inverso se plantea como un problema de estimación de parámetros guiada por imágenes (image-driven parameter estimation). El objetivo consiste en determinar el conjunto de parámetros del modelo que minimiza la discrepancia entre la solución numérica de la ecuación diferencial parcial (EDP) y la evidencia clínica extraída de las imágenes médicas del paciente.

3.4.1. Definición. Sea $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t; \Lambda)$ el operador del modelo directo (la solución de la EDP para una configuración de parámetros dada) y sea $u_{obs}(\mathbf{x})$ la distribución de densidad celular o intensidad derivada de la imagen MRI del paciente en el tiempo t_{scan} .

De acuerdo con el marco de optimización restringida por ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) propuesto por Hoge et al. (2008) [7], se busca determinar el vector óptimo de parámetros $\Lambda^* = \{D, \chi, \rho\}$ tal que:

$$(3.7) \quad \Lambda^* = \arg \min_{\Lambda} \mathcal{J}(u, u_{obs}) + \mathcal{R}(\Lambda)$$

sujeto a que la variable de estado u satisfaga la ecuación gobernante correspondiente, dónde:

- \mathcal{J} representa el funcional de costo (o función de pérdida) que cuantifica la diferencia entre la solución simulada u y la observación clínica u_{obs} .
- $\mathcal{R}(\Lambda)$ corresponde a un término de regularización (como la norma de Tikhonov) introducido frecuentemente con el fin de estabilizar la solución frente a la presencia de ruido en las imágenes y la posible no unicidad inherente al problema inverso.

3.4.2. El desafío del planteamiento mal condicionado. En [7] se identificó que este problema inverso es inherentemente *mal planteado*, principalmente debido a la limitada disponibilidad de información (datos) temporales y la naturaleza difusa de los bordes tumorales en las imágenes médicas. En particular, distintas combinaciones de difusión (D) y proliferación (ρ) pueden resultar en configuraciones (geometrías)

tumorales finales prácticamente indistinguibles cuando únicamente se dispone de una imagen estática.

Tradicionalmente, este tipo de problemas se ha abordado mediante métodos iterativos basado en gradientes, tales como el método del lagrangiano aumentado o el método adjunto, los cuales requieren un alto costo computacional. En este trabajo, se propone explorar una alternativa basada en redes neuronales: Physics-Informed Neural Networks (PINNs), las cuales incorporan de manera simultánea la minimización del funcional \mathcal{J} y la imposición de la EDP como restricción dentro del proceso de entrenamiento de la red neuronal, ofreciendo una vía computacionalmente más eficiente para abordar las dificultades señaladas originalmente en [7].

3.5. Formulación del Problema Inverso. Para la aplicación clínica mediante PINNs, el modelo descrito en la sección 3.3 se adapta al contexto de la oncología moderna [3] de la siguiente forma:

3.5.1. Simplificación del campo químico. Dado que en el problema inverso de interés clínico se dispone únicamente de una imagen estática correspondiente al tiempo fina (t_{end}), y no de la evolución temporal del campo químico, se adopta la aproximación de estado estacionario sugerida por Chaplain [2]. Bajo esta hipótesis, se asume que el gradiente de nutrientes o factores angiogénicos (∇c) está esencialmente determinado por la geometría tumoral observable en las imágenes de resonancia magnética. En consecuencia, el campo $c(\mathbf{x})$ se modela como un campo escalar fijo, ya sea conocido o inferido a partir de la información geométrica, lo que permite reducir el sistema acoplado a una única ecuación que describe la dinámica de la densidad celular.

3.5.2. Ecuación Objetivo Adimensionalizada. Se introduce la densidad celular normalizada $u(\mathbf{x}, t)$, equivalente a la variable n empleada en el modelo original de Chaplain descrito en 3.3. Con el objetivo de favorecer la estabilidad numérica y la convergencia del entrenamiento de la red neuronal, la ecuación se adimensionaliza utilizando los parámetros característicos propuestos en [3], a saber, una longitud característica \bar{L} y coeficientes de referencia $\bar{D}, \bar{\rho}$. Bajo estas consideraciones, la ecuación gobernante que será resuelta mediante la PINN toma la forma:

$$(3.8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u) - \nabla \cdot (\chi u \nabla c) + \rho u(1 - u)$$

En esta formulación, el conjunto de parámetros a recuperar, $\Lambda = \{D, \chi, \rho\}$, representan propiedades biológicas específicas del paciente:

- D : motilidad celular invasiva, modelada mediante un coeficiente de difusión efectivo;
- χ : coeficiente de quimiotaxis, intensidad de la respuesta quimiotáctica, asociada a la migración inducida por gradientes angiogénicos.
- ρ : tasa neta de proliferación celular.

Esta formulación conserva los mecanismos físicos asociados al transporte advectivo, incluidos los patrones tipo frentes de onda descritos por Chaplain en 3.3, al tiempo que reduce la complejidad del modelo lo suficiente como para hacer viable

la recuperación de parámetros en escenarios clínicos caracterizados por una disponibilidad limitada de datos.

3.6. Aplicación de Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs).

Las metodologías tradicionales para la resolución de problemas inversos en oncología, —como los enfoques basados en elementos finitos acoplados a esquemas de optimización bayesiana— presentan limitaciones significativas asociadas al alto costo computacional y a la construcción de mallas en dominios con geometrías complejas. Con el objetivo de abordar estas dificultades, en esta tesis se explora la implementación del marco de las Redes Neuronales Informadas por la Física (PINNs) como una alternativa metodológica.

3.6.1. Formulación de la Función de Pérdida Compuesta. Según 3.1, en conjunto, los términos \mathcal{L}_{PDE} , \mathcal{L}_{data} y \mathcal{L}_{reg} definen una función de pérdida compuesta que permite entrenar simultáneamente la red neuronal y estimar los parámetros físicos del modelo, integrando de manera coherente la información clínica disponible con las restricciones impuestas por la dinámica de la angiogénesis.

1. \mathcal{L}_{PDE} : Pérdida Física (Residual de la EDP): Se evalúa en un conjunto de puntos de colocación N_r muestreados aleatoriamente en el dominio espacio-temporal. La contribución correspondiente a la función de pérdida se define como:

$$\mathcal{L}_{PDE} = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \|\mathcal{F}[u_\theta(\mathbf{x}_i, t_i); \Lambda]\|^2$$

Donde \mathcal{F} , denota el operador residual asociado al modelo de advección–difusión con proliferación, dado explícitamente por derivado del modelo de advección–difusión, es:

$$\mathcal{F}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla u) + \nabla \cdot (\chi u \nabla c) - \rho u(1 - u)$$

Es importante destacar que, en este enfoque, los parámetros físicos del modelo $\Lambda = \{D, \chi, \rho\}$ se consideran variables entrenables, las cuales se ajustan de manera simultánea con los parámetros de la red neuronal durante el proceso de optimización.

2. \mathcal{L}_{data} : término de fidelidad a los datos (Data Fidelity). Este término penaliza la discrepancia entre la predicción de la red y la segmentación tumoral observada en la imagen MRI (y_{seg}) en el tiempo del diagnóstico t_{scan} . La contribución asociada se define como:

$$\mathcal{L}_{data} = \frac{1}{N_{dat}} \sum_{j=1}^{N_{dat}} \|\mathcal{H}(u_\theta(\mathbf{x}_j, t_{scan})) - y_{seg}(\mathbf{x}_j)\|^2$$

Aquí, $\mathcal{H}(\cdot)$ es una función umbral diferenciable que conecta la densidad celular continua con la segmentación binaria empleada en la práctica clínica.

3.6.2. Estrategia de Entrenamiento: Pre-entrenamiento y Ajuste Fino. La optimización de PINNs en el contexto de problemas inversos oncológicos puede presentar inestabilidades numéricas, principalmente debido a la limitada disponibilidad de información temporal, usualmente restringida a una única imagen clínica. Con el fin de favorecer la convergencia del proceso de entrenamiento, en este trabajo se adopta la estrategia de optimización en dos etapas propuesta por Zhang et al. (2024) [?],

la cual contribuye a reducir el riesgo de converger hacia mínimos locales carentes de interpretación biológica:

1. Pre-entrenamiento (Warm Start): En una primera etapa, la red neuronal se entrena para aproximar una solución de referencia o solución característica \bar{u} . Dicha solución se obtiene mediante una simulación numérica empleando valores promedio de los parámetros biológicos, estimados a través de una búsqueda en grilla de bajo costo computacional sobre una geometría simplificada. Este procedimiento permite inicializar los parámetros de la red θ con una configuración que ya captura las características espaciales esenciales de un tumor, en lugar de partir de una inicialización aleatoria, favoreciendo así una convergencia más estable del proceso de entrenamiento posterior.
2. En una segunda etapa, la red neuronal se entrena utilizando los datos específicos del paciente, correspondientes a la imagen de resonancia magnética real. En esta fase, los parámetros físicos del modelo Λ se liberan y se estiman conjuntamente con los parámetros de la red, permitiendo que la solución aprendida se adapte a la dinámica particular del caso clínico y capture de manera más precisa la física subyacente del proceso.

En conjunto, esta estrategia de entrenamiento en dos etapas permite mejorar la estabilidad del proceso de optimización y favorecer la identificación de parámetros biológicamente plausibles, al aprovechar una inicialización informada por el modelo y refinar posteriormente la solución con los datos clínicos específicos del paciente.

4. METODOLOGÍA DE IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACIÓN

Este capítulo describe el flujo de trabajo computacional (workflow) desarrollado para abordar el problema inverso, iguiendo la arquitectura propuesta por Zhang et al. (2024) [3] y las métricas de evaluación empleadas por Balcerak et al. (2025) [6]. La metodología se organiza en dos fases complementarias: una validación controlada mediante datos sintéticos (in silico), orientada a verificar la robustez numérica del enfoque, y una aplicación a datos clínicos retrospectivos, destinada a evaluar su relevancia y potencial utilidad médica.

4.1. Generación de datos sintéticos (Ground Truth). Estos datos se obtienen mediante la simulación directa del modelo matemático con parámetros conocidos, incorporando posteriormente perturbaciones que emulan la incertidumbre presente en las imágenes clínicas reales.

Este enfoque permite validar el desempeño de la PINN en la recuperación de parámetros antes de su aplicación a datos clínicos reales.

4.2. Flujo de procesamiento de datos clínicos. El procesamiento se organiza en tres etapas fundamentales, orientadas a la definición de la geometría del dominio, la caracterización de la difusividad del tejido y la construcción del gradiente químico que guía el transporte:

1. Registro y definición del tensor de difusión. Esta etapa permite establecer una correspondencia anatómica consistente y definir propiedades de difusión espacialmente variables del tejido

2. Representación del Dominio Difuso : para gestionar la compleja geometría del borde del tumor dentro del marco de las PINNs sin necesidad de generar mallas conformes.
3. Construcción del Campo Angiogénico (TAF): el modelo de requiere la existencia de un campo de concentración química $c(\mathbf{x})$ que guíe la advección. Dado que la concentración de TAF no es visible directamente en MRI, la aproximaremos basándonos en la fisiología tumoral descrita por Chaplain, asume que el núcleo tumoral actúa como la fuente constante de factores angiogénicos.

4.3. Estrategia de Entrenamiento en Tres Etapas. Dado que el problema inverso considerado es altamente no convexo, un entrenamiento directo de la red neuronal puede resultar inestable o conducir a la convergencia hacia mínimos locales triviales. Con el fin de mitigar estas dificultades, el procedimiento se inicia con la siguiente etapa:

Estimación de parámetros característicos (grid search). Se realiza una búsqueda rápida en malla para obtener estimaciones aproximadas de los coeficientes de difusión y proliferación que reproduzcan un tumor con un radio máximo comparable al observado en el paciente. Este paso proporciona un conjunto inicial de parámetros Λ_0 , el cual sirve como punto de partida razonable para el entrenamiento posterior.

A continuación, se implementa la estrategia de entrenamiento en dos etapas descrita en la Sección 3.6.2.

4.4. Métricas de Evaluación. La calidad de la solución se cuantificará utilizando métricas estándar en oncología computacional [6]:

- Coeficiente DICE: Mide la superposición volumétrica entre la segmentación tumoral predicha por el modelo y la segmentación real del médico.
- Error Relativo de Parámetros (E_Λ):** En los casos sintéticos, se calcula: $\|\Lambda_{pred} - \Lambda_{GT}\| / \|\Lambda_{GT}\|$.

REFERENCIAS

1. H. P. Greenspan, *On the growth and stability of cell cultures and solid tumors*, *Journal of Theoretical Biology*, vol. 56, no. 1, pp. 229–242, 1976.
2. Chaplain, M. A. J. (1996). *Avascular growth, angiogenesis and vascular growth in solid tumours: The mathematical modelling of the stages of tumour development*. *Mathematical and Computer Modelling*, 23(6), 47-87.
3. Zhang, R. Z., Ezhov, I., Balcerak, M., Zhu, A., Wiestler, B., Menze, B., & Lowengrub, J. S. (2025) *Personalized predictions of Glioblastoma infiltration: Mathematical models*, *Physics-Informed Neural Networks and multimodal scans*. *Medical Image Analysis*, 101, 103423.
4. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*. *Journal of Computational Physics*, 378, 686-707.
5. Ezhov, I., Scibilia, K., Franitza, K., Steinbauer, F., Shit, S., Zimmer, L., & Menze, B. (2023). *Learn-Morph-Infer: A new way of solving the inverse problem for brain tumor modeling*. *Medical Image Analysis*, 83, 102672.

6. Balcerak, M., Weidner, J., Karnakov, P., Ezhov, I., Litvinov, S., Koumoutsakos, P., & Menze, B. (2025). *Individualizing glioma radiotherapy planning by optimization of a data and physics-informed discrete loss*. *Nature Communications*, 16(1), 5982.
7. Hogeia, C., Davatzikos, C., & Biros, G. (2008). *An image-driven parameter estimation problem for a reaction-diffusion glioma growth model with mass effects*. *Journal of mathematical biology*, 56(6), 793-825.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS.
Current address: Ciudad Universitaria, CU
Email address: maestria.matematica@unah.edu.hn