

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS



EL COSTO DE LA CONTROLABILIDAD A CERO DE UNA
ECUACIÓN DE TRANSPORTE-DIFUSIÓN

TESIS PRESENTADA POR LEANDRO JESÚS GALO MENDOZA
PARA OBTENER EL GRADO DE MASTER EN MATEMÁTICAS CON
ORIENTACIÓN EN INGENIERÍA MATEMÁTICA
PROFESOR ASESOR: DOCTOR. FRANCISCO MARCOS LÓPEZ GARCÍA

2018

Departamento de Matemática Aplicada

A mi amada Yorlyn....

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Dios por haberme brindado la sabiduría para poder realizar este trabajo de tesis.

Agradezco al Doctor Francisco Marcos López García de la Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad de Cuernavaca, por haber aceptado asesorarme en el trabajo de tesis, le estoy muy agradecido por su tiempo y dedicación, ya que sin su ayuda no hubiera sido posible realizar este trabajo. También quiero agradecer al proyecto "Programa para un avance global e integrado de la matemática mexicana" FORDECYT 265667 y al proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT-IN102116, quienes cubrieron los gastos de estadía y boleto aéreo en México.

Agradezco y reconozco el esfuerzo de todas aquellas personas que han contribuido a que en la UNAH tengamos una maestría en matemáticas, así como a todos mis profesores en la maestría, en especial al Doctor Jorge Destephen y a mi amigo Iván Henríquez por dirigir dicho proyecto de forma incansable.

Agradezco a mis amigos Mariano Solorzano y Luis Ramos pues ellos fueron parte crucial en mi vida para que yo me dedicara a estudiar matemáticas. Parte del trabajo que ellos hacen en matemática se ve reflejado en mi crecimiento académico.

Agradezco a mi familia por apoyarme en cada etapa de mi vida, en especial a mi madre ya que ella a sido un pilar importante en mi vida.

Finalmente agradezco a mi amada Yorlyn por su apoyo incondicional y por su ayuda en cada una de las etapas que he vivido en la maestría, por la motivación que me dio en aquellos momentos de flaqueza, por estar siempre pendiente de mí mostrando su amor y ayuda hacia mí sin siquiera pedirlo o merecerlo.

Introducción

La teoría de control en las últimas décadas se ha vuelto indispensable para entender el mundo físico, químico, biológico, económico, etc, ya que éstos están muchas veces enlazados a un problemas de control y en su gran mayoría se modelan a través de una ecuación de estado

$$A(y) = f(u),$$

donde y es el estado o solución de la ecuación y u es el control a elegir de manera libre para actuar sobre el mismo. Controlar la ecuación anterior es hallar u en un conjunto de controles admisibles U de manera que exista la solución y , sin embargo no sólo se necesita encontrar a u en el conjunto de controles admisibles U , sino que se busca el mejor control o el control óptimo de manera que exista solución de coste mínimo.

Por su importancia hoy en día la teoría de control a revolucionado el mundo ya que siempre el hombre ha querido controlar su entorno, lo que sucede a su alrededor; ejemplo de esto a sido la búsqueda de la automatización de procesos en la industria, en la tecnología, en la economía, en salud, en genética, etc. Hoy en día la ley de causa-efecto no es estática, es dinámica; es decir, introducimos el control óptimo para obtener ciertos estados conforme transcurre un determinado tiempo en algún tipo de proceso; dicho proceso lo vamos controlando de manera sistemática para obtener un resultado deseado, pasando por diferentes estados. Ejemplo de eso es la aviación, cuando se quiere aterrizar un avión por medio de la computadora cuando se pilota a ciegas por las condiciones climáticas desfavorables.

En robótica tenemos un ejemplo simple acerca del control de un brazo rígido giratorio a través de un motor puesto en el extremo de la estructura. Sea m la masa total localizada en el extremo libre, asumimos que la barra tiene longitud 1 y no hay fricción, aplicando las leyes de Newton a objetos giratorios obtenemos la ecuación

$$m\ddot{\theta}(t) + mg\theta(t) = u(t),$$

donde $\theta = \theta(t)$ es el ángulo del brazo medido desde la vertical en sentido antihorario, g es

la constante de gravedad y u es el momento de torsión externo que se aplica al sistema. En el problema anterior θ es el que describe el estado del sistema y u es el control.

Otro ejemplo es la famosa ecuación de la onda

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L), \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, L). \end{array} \right.$$

El sistema anterior describe la vibración de una cuerda de longitud L que permanece fija en sus extremos $x = 0$ y $x = L$, donde $u = u(x, t)$ representa la altura a la que se encuentra el punto x de la cuerda al instante de tiempo t . Mediante un control $u(0, t) = u(t)$ queremos conducir a la partícula de un punto inicial a un punto final, dicho problema a sido objeto de muchos estudios a través de la historia de la matemática debido a su importancia en ecuaciones de movimiento. Si consideramos la ecuación bidimensional bajo ciertas condiciones se vuelve el modelo perfecto para predecir y controlar terremotos.

Cabe mencionar que a medida que se avanza en la teoría de control, cada día se atacan problemas más complejos con el fin de controlar aquellos fenómenos que parecen imposibles de entender, es ahí donde la matemática entra en juego, ya que los distintos fenómenos se representan por una ecuación o un sistema algebraico o funcional (integral, diferencial parcial u ordinario, etc), de ahí la relación tan estrecha de la teoría de control con las ecuaciones diferenciales. El presente trabajo de tesis tiene como objeto principal de estudio el costo de la controlabilidad a cero de la siguiente ecuación de transporte-difusión

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t + My_x - \varepsilon y_{xx} = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{si } t \in (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{si } t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{si } x \in (0, L), \end{array} \right.$$

para $L, T, \varepsilon > 0$, $M \neq 0$ constantes fijas, $u \in L^2(0, T)$ la función de control y $y_0 \in L^2(0, L)$ el estado inicial del sistema.

En concreto, queremos estudiar el costo de controlabilidad a cero del sistema al tiempo T dado un estado inicial $y_0 \in L^2(0, T)$, es decir, mostramos que existe una función de control $u \in L^2(0, T)$ tal que existe solución única al problema en mención y que satisface

$$y(T, x) = 0, \quad x \in [0, L].$$

Además queremos mostrar que sucede con dicho costo cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Es conocido (ver [13]) que el costo de controlabilidad a cero al tiempo T del sistema se mide como la mejor constante $C = C(T, L, M, \varepsilon)$ tal que para cada $y_0 \in L^2(0, L)$ existe el control $u \in L^2(0, T)$ tal que

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, L)}.$$

Notamos que si $\varepsilon \rightarrow 0^+$, estudiar el costo de controlabilidad a cero al tiempo T de nuestro sistema es equivalente a estudiar el costo de controlabilidad a cero al tiempo T del siguiente sistema de transporte

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = u(t), & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases}$$

donde mostramos que el sistema anterior es controlable a cero al tiempo T si y sólo si $T \geq L/|M|$. Se ha querido emular dicho resultado para nuestro sistema en cuestión, sin embargo lo que hasta ahora se ha obtenido son cotas para el tiempo T donde existe el control exacto a cero, las cuales se han ido mejorando con los años. En nuestro trabajo de tesis realizamos las pruebas detalladas de estos resultados utilizando la teoría de los semigrupos de operadores así como el análisis complejo, clarificando aquellos aspectos tediosos y haciendo ciertas correcciones, para así proporcionar una guía para todas aquellas personas que quieran abordar este tipo de problemas. A continuación mostramos la organización de nuestro trabajo de tesis

En el capítulo 1 introducimos el problema que trataremos en nuestro trabajo de tesis, así como el planteamiento del mismo.

En el capítulo 2 tratamos aspectos preliminares que son relevantes para nuestro problema, como la ecuación de transporte y el método de los momentos que propone Fattorini en [10] para la controlabilidad exacta para problemas de segundo orden de tipo parabólicos.

En el capítulo 3 mostramos la existencia y unicidad de la solución para nuestro problema y planteamos la relación que existe con el problema de transporte del capítulo 2, así como el significado del control a cero y su costo.

En el capítulo 4 damos una prueba detallada de los resultados de Glass para nuestro pro-

blema esclareciendo y corrigiendo algunos detalles y proponiendo el lema 10 que es de mucha importancia para la prueba de los resultados.

En el capítulo 5 damos una prueba detallada de la mejor cota que hasta ahora se conoce para el caso $M < 0$. Además realizamos las conclusiones pertinentes de nuestro trabajo.

En conclusiones ponemos lo más relevante de nuestro trabajo de tesis.

En el apéndice A mostramos los elementos necesarios de la teoría de semigrupos de operadores fuertemente continuos en un espacio de Hilbert H , aplicados a los sistemas de ecuaciones diferenciales.

En el apéndice B mostramos algunos aspectos relevantes de los espacios de Sobolev que utilizamos para nuestro problema.

En el apéndice C desarrollamos de ciertos detalles que utilizamos en su mayoría en el capítulo 4, así como una prueba completa de la fórmula (4.25) que es fundamental en el capítulo 4 y de la fórmula (C.2) la cual es de mucha importancia en la prueba del lema 10.

Índice general

| | |
|---|------------|
| Agradecimientos | II |
| Introducción | III |
| 1. Planteamiento del problema de transporte-difusión | 1 |
| 1.1. Ecuación de transporte-difusión | 1 |
| 1.2. Controlabilidad uniforme a cero | 1 |
| 1.3. Formulación del problema | 2 |
| 1.4. Ecuación de transporte de primer orden | 2 |
| 2. Ecuación de transporte | 4 |
| 2.1. Ecuación lineal de transporte de primer orden | 4 |
| 2.2. El método de los momentos | 14 |
| 3. La ecuación de transporte-difusión | 21 |
| 3.1. Problema de Cauchy bien planteado | 22 |
| 3.2. Problema de control nulo | 29 |
| 4. Costo de la controlabilidad a cero utilizando análisis armónico | 32 |
| 4.1. Diagonalización del operador $-M\partial_x - \varepsilon\partial_{xx}$ | 33 |
| 4.2. Construcción de la familia biortogonal | 34 |
| 4.2.1. Multiplicador de Beurling y Malliavin | 35 |
| 4.2.2. Las cotas para T | 47 |
| 4.2.3. Desigualdad de observabilidad | 48 |
| 5. Un límite relativo de la ecuación de transporte-difusión 1D | 51 |
| 5.1. Resultado principal | 51 |
| A. Semigrupos de operadores lineales | 60 |

| | |
|--|-----------|
| B. Ciertas propiedades en espacios de Sobolev | 66 |
| C. Algunos resultados de análisis armónico y algunas integrales complejas | 70 |
| Bibliografía | 80 |

Capítulo 1

Planteamiento del problema de transporte-difusión

1.1. Ecuación de transporte-difusión

Para constantes fijas $L, T, \varepsilon > 0$, y $M \neq 0$, dadas $u \in L^2(0, T)$ y $y_0 \in L^2(0, L)$, consideramos el siguiente problema de transporte-difusión.

$$y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, \quad t \in (0, T), x \in (0, L), \quad (1.1)$$

$$y(t, 0) = u(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

$$y(t, L) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.3)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in (0, L). \quad (1.4)$$

1.2. Controlabilidad uniforme a cero

En general el problema (1.1)-(1.4) se dice que es controlable, si dadas las funciones $y_0, y_1 \in L^2(0, L)$, podemos encontrar una función $u \in L^2(0, T)$ tal que la solución y del problema de Cauchy (1.1)-(1.4) satisface:

$$y(T, x) = y_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (1.5)$$

y se dice que es controlable a cero o de controlabilidad nula cuando $y_1 := 0$, es decir

$$y(T, x) = 0, \quad x \in (0, L). \quad (1.6)$$

El costo de la controlabilidad a cero de la ecuación de transporte-difusión se define como

la mejor constante $C_{cost}^\varepsilon > 0$ tal que

- para cada y_0 existe $u^\varepsilon \in U(\varepsilon, T, L, M, y_0)$ tal que $y(T, \cdot) = 0$ y $\|u^\varepsilon\| \leq C_{cost}^\varepsilon \|y_0\|$, donde $U(\varepsilon, T, L, M, y_0)$ representa el conjunto de controles para (1.1).

El concepto de control uniforme a cero en (1.1)-(1.4) fue establecido por Fattorini y Russell (ver [10]). Entonces es interesante hacernos la siguiente pregunta acerca del costo de la controlabilidad a cero de nuestro problema en cuestión.

¿Cuál es el comportamiento asintótico de C_{cost}^ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$?

1.3. Formulación del problema

Una vez planteado el problema de transporte-difusión, queremos encontrar la mejor cota para la controlabilidad uniforme a cero de (1.1)-(1.4), ya que aunque muchos han dado estimaciones de C_{cost}^ε , todavía no son óptimas (ver [11, 19]) desde el punto de vista de la entropía. Otra motivación para estudiar este problema es que F. Boyer muestra resultados computacionales muy importantes en [5] para las ecuaciones no lineales de tipo parabólico.

La motivación de estudiar la controlabilidad de (1.1), es que ε representa la viscosidad de fuga de una ecuación de transporte-difusión, la cual queremos controlar en el límite hacia cero de dicha viscosidad. Las soluciones de este problema son soluciones discontinuas, que se obtienen a través del límite de viscosidad como se puede ver en [2, 3]. Un primer ejemplo del resultado de controlabilidad de una ley de conservación no lineal en el límite de viscosidad de fuga fue dado en [12].

1.4. Ecuación de transporte de primer orden

Sean $T, L > 0$ y $M \neq 0$. Consideramos el problema de control de la ecuación de transporte uno-dimensional,

$$y_t + My_x = 0, \quad t \in (0, T), x \in (0, L), \quad (1.7)$$

$$y(t, 0) = u(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.8)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in (0, L), \quad (1.9)$$

donde $y_0 \in L^2(0, L)$ y $u \in L^2(0, T)$.

Dicho problema es de interés debido a que si en (1.1)-(1.4), hacemos $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tenemos el problema de transporte (1.7)-(1.9). Más adelante probaremos que el problema de transporte es controlable si y sólo si $T \geq L/|M|$

Para la ecuación de transporte-difusión (1.1)-(1.4), Coron y Guerrero (ver [13]) también probaron que:

- Si $T < L/M$, entonces $C_{cost}^\varepsilon \geq \exp(C \cdot \varepsilon^{-1})$, para alguna constante $C > 0$.
- Si $T \geq K \cdot L/M$, entonces $C_{cost}^\varepsilon \leq \exp(-C \cdot \varepsilon^{-1})$, donde

$$K = K(\varepsilon, T, L, M) = \sup_{\|y_0\|_{L^2(0,L)} \leq 1} \left\{ \min\{\|u\|_{L^2(0,T)} : u \in U(\varepsilon, T, L, M, y_0)\} \right\}$$

Más aún, Coron y Guerrero en [13] probaron para (1.1)-(1.4) que

- si $M > 0$, el problema es uniformemente controlable a cero, para $T > 4.3L/M$.
- si $M < 0$, el problema es uniformemente controlable a cero, para $T < 57.2L/|M|$.

Probaremos los resultados propuestos en [11], los cuales desarrollaremos aplicando métodos de análisis armónico, y haciendo ciertas precisiones para obtener los siguientes resultados

- si $M > 0$, el problema es uniformemente controlable a cero para $T > 4.2L/M$.
- si $M < 0$, el problema es uniformemente controlable a cero para $T < 6.1L/|M|$.

Las estimaciones anteriores se encuentran a partir de dos enfoques diferentes; Coron y Guerrero utilizaron una estimación de Carleman, mientras que Glass utilizó un método introducido por Russell que utiliza el análisis armónico para resolver problemas de controlabilidad (Ver [10]).

Aunque se ha avanzado en la teoría de control y en las ecuaciones diferenciales parciales, todavía no se cuenta con las herramientas suficientes para enfrentar el problema de controlabilidad uniforme a cero de la ecuación de transporte-difusión, y las cotas que se encuentran no son óptimas, es por eso necesaria una teoría más sólida que pueda abordar el problema de una forma más concreta. Cuando el problema se plantea en dimensiones arbitrarias la complejidad aumenta considerablemente, este problema se ha atacado desde el análisis funcional, el análisis armónico, teoría de operadores, sistemas dinámicos y en la actualidad también se está utilizando el análisis complejo como se puede ver en [19].

Capítulo 2

Ecuación de transporte

2.1. Ecuación lineal de transporte de primer orden

Fijamos $T, L > 0$. Consideramos la llamada ecuación de transporte

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = u(t), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde t es el tiempo, $u(t) \in \mathbb{R}$ es el control y $y(t, \cdot) : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ es el estado.

Es fácil verificar que la solución para (2.1) está dada por la función $y(t, x) = \begin{cases} u(t-x), & 0 \leq x < t \\ y_0(x-t), & 0 \leq t < x \end{cases}$, siempre que u y y_0 sean funciones diferenciables.

Problema de Cauchy bien planteado

Para $T, L > 0$, en esta sección damos sentido a la noción de solución débil de la ecuación de transporte

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = u(t), & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $y_0 \in L^2(0, L)$, $u \in L^2(0, T)$ son funciones dadas. Mostraremos que en tal sentido, el problema está bien planteado.

Primero supongamos que existe $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ que satisface (2.2). Sean $\tau \in [0, T]$,

$\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$, entonces

$$\int_0^\tau \int_0^L [\phi y_t + \phi y_x] dx dt = 0.$$

Si integramos por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi y|_0^\tau dx + \int_0^\tau \phi y|_0^L dt - \int_0^\tau \int_0^L [\phi_t + \phi_x] y dx dt &= \int_0^L [\phi(\tau, x)y(\tau, x) - \phi(0, x)y_0(x)] dx \\ &+ \int_0^\tau [\phi(t, L)y(t, L) - \phi(t, 0)u(t)] dt \\ &- \int_0^\tau \int_0^L [\phi_t + \phi_x] y dx dt = 0. \end{aligned}$$

Lo anterior motiva la definición de una solución débil de (2.2).

Definición 1 Para $T, L > 0$, consideramos $y_0 \in L^2(0, L)$ y $u \in L^2(0, T)$. Una solución débil de (2.2) es una función $y \in C^0([0, T] \times [0, L])$ tal que para cada $\tau \in [0, T]$ y para toda $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ con $\phi(t, L) = 0$ $t \in [0, \tau]$, satisface que

$$\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y dx dt = \int_0^L \phi(\tau, x)y(\tau, x) dx - \int_0^L \phi(0, x)y_0(x) dx - \int_0^\tau \phi(t, 0)u(t) dt. \quad (2.3)$$

Cabe destacar que la definición anterior motiva la siguiente observación. Si y es una solución débil de (2.2) de clase C^1 en $[0, T] \times [0, L]$, entonces se cumplirá que

- i. $y_0 \in C^1([0, L])$,
- ii. $u \in C^1([0, T])$,
- iii. $y(0, x) = y_0(x)$ para todo $x \in [0, L]$,
- iv. $y(t, 0) = u(t)$ para todo $t \in [0, T]$,
- v. $y_t(t, x) + y_x(t, x) = 0$ para todo $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$.

El siguiente resultado muestra que las soluciones de (2.2) dependen continuamente de los datos.

Teorema 1 Para $T, L > 0$, consideramos $y_0 \in L^2(0, L)$, $u \in L^2(0, T)$. Entonces (2.2) tiene una única solución débil; además dicha solución, denotada por y , satisface que

$$\|y(\tau, \cdot)\|_{L^2(0, L)} \leq \|y_0\|_{L^2(0, L)} + \|u\|_{L^2(0, T)} \quad \text{para todo } \tau \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Prueba Para la existencia, es fácil verificar que tal solución de (2.2) está dada por la función

$$y(t, x) = \begin{cases} u(t - x), & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], x < t \\ y_0(x - t), & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], x \geq t. \end{cases} \quad (2.5)$$

Para deducirla podemos utilizar el método de las características, el cual se puede encontrar en [14]. Una vez que tenemos esta solución es fácil probar la desigualdad. EL resultado general se sigue de la densidad de las funciones diferenciables en L^2 .

Forma alternativa de la prueba de la existencia: Otra forma de probar la existencia de la solución es utilizando la teoría de semigrupos de operadores lineales del apéndice A como sigue.

Caso 1: Consideramos $u \in C^2([0, T])$ con $u(0) = 0$, $y_0 \in H^1(0, L)$ con $y_0(0) = 0$. Definimos el operador lineal

$$\begin{aligned} A : D(A) \subseteq L^2(0, L) &\rightarrow L^2(0, L) \\ f &\mapsto Af = -f_x \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $D(A) := \{f \in H^1(0, L) \mid f(0) = 0\}$.

Se puede mostrar que $D(A)$ es denso en $L^2(0, L)$ y que A es un operador cerrado en el sentido de la definición A.1.

Notamos que para $f \in D(A)$,

$$\langle Af, f \rangle = - \int_0^L f f_x dx = - \frac{f^2(L)}{2} \leq 0, \quad (2.7)$$

esto implica que A es disipativo (ver A.2).

Para $f \in D(A)$, $g \in H^1(0, L)$ notamos que por integración por partes

$$\langle Af, g \rangle = - \int_0^L f_x g dx = -f(L)g(L) + \int_0^L f g_x dx. \quad (2.8)$$

Definimos el conjunto $D(A^*) := \{g \in H^1(0, L) \mid g(L) = 0\}$, entonces el operador A^* dado por $A^*g = g_x$, $g \in D(A^*)$, es el operador lineal adjunto de A . Para $g \in D(A^*)$, tenemos que

$$\langle A^*g, g \rangle = \int_0^L g g_x dx = - \frac{g^2(0)}{2} \leq 0, \quad (2.9)$$

lo cual implica que A^* es disipativo.

El teorema A.9 asegura la existencia de una función $z \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$

tal que

$$\frac{dz}{dt} = Az - u'(t), \quad \text{en } L^2(0, L), \quad (2.10)$$

$$z(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.11)$$

$$z(0, \cdot) = y_0. \quad (2.12)$$

Definimos la función $y \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ como

$$y(t, x) := z(t, x) + u(t) \quad \text{para todo } (t, x) \in [0, T] \times [0, L]. \quad (2.13)$$

Veamos que (2.13) satisface (2.3).

Fijamos $\tau \in [0, T]$ y $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$. Notamos por integración en espacios de Sobolev (ver [9]) y (2.6)

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L \phi_x(t, x)[z(t, x) + u(t)] dx dt &= - \int_0^\tau \int_0^L \phi(t, x) z_x(t, x) dx dt + \int_0^\tau \phi(t, L) z(t, L) dt \\ &+ \int_0^\tau u(t) \int_0^L \phi_x(t, x) dx \\ &= \int_0^\tau \int_0^L \phi(t, x) A(z(t)) dx dt + \int_0^\tau y(t, L) \phi(t, L) dt \\ &- \int_0^\tau u(t) \phi(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Además

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^\tau \phi_t(t, x)[z(t, x) + u(t)] dt dx &= \int_0^L \int_0^\tau \phi_t(t, x) z(t, x) dt dx + \int_0^L u(\tau) \phi(\tau, x) dx \\ &- \int_0^\tau \int_0^L \phi(t, x) u'(t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para cada $\eta \in L^2(0, L)$ por (2.10) se cumple

$$\frac{d}{dt} \langle z(t), \eta \rangle_{L^2(0, L)} = \left\langle \frac{dz}{dt}(t), \eta \right\rangle_{L^2(0, L)} = \langle A(z(t)) - u'(t), \eta \rangle_{L^2(0, L)}. \quad (2.16)$$

Ahora consideramos el conjunto de funciones

$$\mathcal{V} = \psi(t) \cdot \eta(x), \quad \text{con } \psi \in C^1([0, \tau]), \eta \in C^1([0, L]) \text{ y } \eta(L) = 0.$$

Sea $\phi(t, x) = \psi(t)\eta(x) \in \mathcal{V}$. Para la primera integral a la derecha de (2.15) por (2.16) e

integración por partes tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\tau \int_0^L \psi'(t) \eta(x) z(t, x) dx dt &= \int_0^\tau \psi'(t) \langle z(t), \eta \rangle_{L^2(0, L)} dt \\
 &= \psi(t) \langle z(t), \eta \rangle_{L^2(0, L)} \Big|_0^\tau - \int_0^\tau \psi(t) \frac{d}{dt} \langle z(t), \eta \rangle_{L^2(0, L)} dt \\
 &= \int_0^L \phi(\tau, x) z(\tau, x) dx - \int_0^L \phi(0, x) z(0, x) dx \\
 &\quad - \int_0^\tau \int_0^L \phi(t, x) [A(z(t)) - u'(t)] dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Se puede ver en [6] que \mathcal{V} es denso en el espacio $C^1([0, \tau] \times [0, L])$. Entonces por (2.12), (2.14), (2.15) y (2.17), para cada $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y dx dt &= \int_0^L \phi(\tau, x) y(\tau, x) dx - \int_0^L \phi(0, x) y_0(x) dx + \int_0^\tau \phi(t, L) y(t, L) dt \\
 &\quad - \int_0^\tau \phi(t, 0) u(t) dt.
 \end{aligned}$$

En particular si tomamos $\phi = y|_{[0, \tau] \times [0, L]}$ tenemos

$$\int_0^\tau |y(t, L)|^2 dt + \int_0^L |y(\tau, x)|^2 dx = \int_0^\tau |u(t)|^2 dt + \int_0^L |y_0(x)|^2 dx$$

y de esta última expresión se sigue (2.4).

Caso 2: Sean $y_0 \in L^2(0, L)$ y $u \in L^2(0, T)$ funciones arbitrarias. Existe una sucesión $\{y_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$ tal que $y_{0,n} \rightarrow y_0$ en $L^2(0, L)$ cuando $n \rightarrow \infty$. También existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^2([0, T])$ tal que $u_n(0) = 0$ y $u_n \rightarrow u$ en $L^2(0, T)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ procedemos como en el caso 1, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en $C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ dada por $y_n(t, x) := z_n(t, x) + u_n(t)$, donde z_n satisface

$$\frac{dz_n}{dt} = Az_n - u'_n(t), \quad \text{en } L^2(0, L), \tag{2.18}$$

$$z_n(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{2.19}$$

$$z_n(0, \cdot) = y_{0,n}, \tag{2.20}$$

además

$$\|y_n\|_{C^0([0, T]; L^2(0, L))} \leq \|u_n\|_{L^2(0, T)} + \|y_{0,n}\|_{L^2(0, L)}, \quad n \geq 1.$$

Más aún, para $n, m \in \mathbb{N}$ procedemos como en el caso anterior para obtener

$$\|y_n - y_m\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u_n - u_m\|_{L^2(0,T)} + \|y_{0,n} - y_{0,m}\|_{L^2(0,L)}.$$

Es decir $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $C^0([0, T]; L^2(0, L))$, por lo tanto existe $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ tal que $y_n \rightarrow y$ en $C^0([0, T]; L^2(0, L))$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En particular

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y_n dx dt &\rightarrow \int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y dx dt, \\ \int_0^L \phi(\tau, x) y_n(\tau, x) dx &\rightarrow \int_0^L \phi(\tau, x) y(\tau, x) dx. \end{aligned}$$

Dado que

$$\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y_n dx dt = \int_0^L \phi(\tau, x) y_n(\tau, x) dx - \int_0^L \phi(0, x) y_{0,n}(x) dx - \int_0^\tau \phi(t, 0) u_n(t) dt,$$

para toda $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ con $\phi(t, L) = 0$ para $t \in [0, \tau]$, $n \in \mathbb{N}$, se sigue que y es la solución de (2.2).

Unicidad Supongamos que y_1, y_2 son soluciones de (2.2). Notamos que $y := y_1 - y_2$ es la solución del problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{aligned} y_t + y_x &= 0, & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], \\ y(t, 0) &= 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) &= 0, & x \in (0, L). \end{aligned}$$

También observamos que si $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ con $\phi(t, L) = 0$, $t \in [0, \tau]$, entonces

$$\int_0^\tau \int_0^L [\phi_t + \phi_x] y dx dt = \int_0^L y(\tau, x) \phi(\tau, x) dx. \quad (2.21)$$

Definimos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} f_n = 0, & \text{en } [L, +\infty), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ f_n|_{(0,L)} \rightarrow y(\tau, \cdot) & \text{en } L^2(0, L) \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.22)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos $\phi_n \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ dada por

$$\phi_n = f_n(\tau + x - t), \quad (t, x) \in [0, \tau] \times [0, L].$$

Notamos que $\phi_n(\tau, L) = f_n(L) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y se satisface que

$$\phi_{nt} + \phi_{nx} = 0 \text{ en } [0, \tau] \times [0, L].$$

Así tomando $\phi := \phi_n$, en (2.21) junto con (2.22), entonces

$$\int_0^L y(\tau, x) \phi_n(\tau, x) dx = \int_0^L y(\tau, x) f_n(x) dx = 0,$$

por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L y(\tau, x) f_n(x) dx = \int_0^L y^2(\tau, x) dx = 0,$$

entonces $y(\tau, x) = 0$ para todo $x \in [0, L]$.

Controlabilidad exacta

Decimos que el sistema (2.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$, si para cualesquiera $y_0, y_1 \in L^2(0, L)$, existe una función de control $u \in L^2(0, T)$ tal que el problema de Cauchy (2.2) satisface $y(T, x) = y_1(x)$, $x \in (0, L)$.

Teorema 2 *El sistema (2.2) es controlable al tiempo $T > 0$ si y sólo si $T \geq L$.*

Prueba Necesidad: Supongamos que $T < L$, sean $y_0 \equiv 1, y_1 \equiv 0$ en $[0, L]$. Supongamos que existe $u \in L^2(0, T)$ tal que la solución y de (2.2) satisface $y(T, x) = 0$, $x \in (0, L)$. Tal solución debe estar dada por

$$y(t, x) = \begin{cases} u(t-x), & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], x < t \\ 1, & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], x \geq t \end{cases}$$

Como $T < L$ entonces $y(T, x) = 1$, para todo $x \in (T, L)$, lo cual es una contradicción.

Suficiencia: Sean $y_0, y_1 \in L^2(0, L)$ arbitrarios. Definimos la función control

$$u(t) = \begin{cases} y_1(T-t) & \text{si } t \in (T-L, T) \\ 0, & \text{si } t \in (0, T-L) \end{cases}$$

Entonces la solución y de (2.2) dada en (2.5) satisface

$$y(T, x) = u(T-x) = y_1(T - (T-x)) = y_1(x), \quad \forall x \in (0, L).$$

Controlabilidad nula

Para $T > 0$ el sistema (2.2) es controlable a cero al tiempo T si para cada $y_0 \in L^2(0, L)$ existe $u \in L^2(0, T)$ tal que la solución de (2.2) satisface que $y(T, \cdot) = 0$ en $[0, L]$.

Lema 1 *El sistema (2.1) es exactamente controlable al tiempo T , si y sólo si es controlable a cero al tiempo T .*

Prueba *Necesidad: Es claro.*

Suficiencia: Sean $y_0, y_1 \in L^2(0, L)$ dadas.

a) *Supongamos que existen $y_0^* \in L^2(0, L)$ y $u^* \in L^2(0, T)$ tal que la solución $y^* \in C^0([0, T]; L^2[0, L])$ del sistema*

$$\begin{cases} y_t^* + y_x^* = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y^*(t, 0) = u^*(t), & t \in (0, T), \\ y^*(0, x) = y_0^*(x), & x \in (0, L), \end{cases}$$

satisface

$$y^*(T, x) = y_1(x), x \in L(0, L)$$

b) *Por hipótesis, para la función $y_0(x) - y_0^*$ existe $\tilde{u} \in L^2(0, T)$ tal que la solución $\tilde{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ del sistema*

$$\begin{cases} \tilde{y}_t + \tilde{y}_x = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ \tilde{y}(t, 0) = \tilde{u}(t), & t \in (0, T) \\ \tilde{y}(0, x) = y_0(x) - y_0^*(x), & x \in (0, L) \end{cases}$$

satisface

$$\tilde{y}(T, x) = 0, x \in (0, L).$$

c) *Definimos $u(t) = u^*(t) + \tilde{u}(t)$, $t \in (0, T)$ y ponemos*

$$y(t, x) = y^*(t, x) + \tilde{y}(t, x), \text{ para todo } (t, x) \in (0, T) \times (0, L).$$

Es evidente que dicha función y satisface (2.2) y

$$y(T, x) = y_1(x), x \in (0, L).$$

A continuación mostramos la existencia de y_0^ y u^* . Sea $z \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ la solución del sistema*

$$z_t + z_x = 0, \quad t \in (0, T), x \in (0, L), \quad (2.23)$$

$$z(t, 0) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (2.24)$$

$$z(0, x) = y_1(L - x), x \in (0, L), \quad (2.25)$$

la cual esta dada por (ver 2.5)

$$z(t, x) = \begin{cases} 0, & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], \quad x < t \\ y_1(L - x + t), & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], \quad x \geq t \end{cases}. \quad (2.26)$$

Definimos $y_0^* \in L^2(0, L)$ y $u \in L^2(0, T)$ como sigue

$$\begin{aligned} y_0^*(x) &= z(T, L - x), \quad x \in (0, L), \\ u^*(t) &= z(T - t, L), \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Entonces se puede verificar que la solución y^* del sistema en (a) esta dada por

$$y^*(t, x) = z(T - t, L - x), \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, L).$$

Dualidad entre controlabilidad y observabilidad

Sean $T, L > 0$. Dada $u \in L^2(0, T)$, consideramos la única solución $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ para (2.2) con $y_0 \equiv 0$.

Definimos el mapeo lineal,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T : L^2(0, T) &\rightarrow L^2(0, L) \\ u &\mapsto y(T, \cdot). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tenemos el siguiente resultado.

Lema 2 *El sistema (2.1) es exactamente controlable al tiempo T si y sólo si \mathcal{F}_T es sobreyectivo.*

Prueba Necesidad: Es claro.

Suficiencia: Sean $y_0, y_1 \in L^2(0, L)$. Sea $\hat{y} \in C^0([0, T], L^2(0, L))$ la solución del problema

$$\begin{cases} \hat{y}_t + \hat{y}_x = 0, & t \in (0, T), \quad x \in (0, L) \\ \hat{y}(t, 0) = 0, & t \in (0, T) \\ \hat{y}(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Ponemos $y_2 = \hat{y}(T, \cdot)$ y $y_3 = y_1 - y_2$. Por hipótesis existe $u \in L^2(0, T)$ tal que $\mathcal{F}_T(u) = y_3$ y $\tilde{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ que satisfice

$$\begin{cases} \tilde{y}_t + \tilde{y}_x = 0, & t \in (0, T), \quad x \in (0, L) \\ \tilde{y}(t, 0) = u(t), & t \in (0, T) \\ \tilde{y}(0, x) = 0, & x \in (0, L) \end{cases}$$

y $\tilde{y}(T, x) = y_3(x)$, $x \in (0, L)$. Entonces $y(t, x) = \hat{y}(t, x) + \tilde{y}(t, x)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L) \\ y(t, 0) = u(t), & t \in (0, T) \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L) \end{cases}$$

y satisface $y(T, x) = \hat{y}(T, x) + \tilde{y}(T, x) = \hat{y}(T, x) + y_1(x) - \hat{y}(T, x) = y_1(x)$, $x \in (0, L)$.

Ahora recordamos que para una aplicación lineal y continua $\mathcal{F} : H_1 \rightarrow H_2$, con H_1 y H_2 espacios de Hilbert, se tiene que \mathcal{F} es sobreyectiva si y sólo si existe una constante $c > 0$, tal que

$$\|\mathcal{F}^*(x_2)\|_{H_1} \geq c \|x_2\|_{H_2}, \text{ para todo } x_2 \in H_2 \quad (2.28)$$

donde \mathcal{F}^* es el operador adjunto de Hilbert de \mathcal{F} .

A (2.28) se le llama la desigualdad de observabilidad al considerar el operador (2.27). Dicha ecuación está muy relacionada con el problema adjunto del sistema (2.2) como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 3 Sea $z^T \in H^1(0, L)$ tal que $z^T(L) = 0$. Sea $z \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ la solución del sistema

$$\begin{cases} z_t + z_x = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L) \\ z(t, L) = 0, & t \in (0, T) \\ z(T, x) = z^T(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (2.29)$$

Entonces

$$\mathcal{F}^*(z^T) = z(\cdot, 0). \quad (2.30)$$

Prueba Observamos que la existencia y unicidad de la solución de (2.29) se muestra de manera similar a la existencia y unicidad de la solución de (2.2).

Sea $\tilde{z} \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ la solución de

$$\begin{cases} \tilde{z}_t = A\tilde{z} & \text{en } L^2(0, L), \\ \tilde{z}(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \\ \tilde{z}(0, x) = z^T(L - x), & x \in (0, L), \end{cases}$$

entonces

$$z(t, x) = \tilde{z}(T - t, L - x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, L].$$

Sea $u \in C^2([0, T])$ con $u(0) = 0$ y $y \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ solución

del sistema

$$y_t + y_x = 0 \quad \text{en } L^2(0, L), \quad (2.31)$$

$$y(t, 0) = u(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.32)$$

$$y(0, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (2.33)$$

De (2.29), (2.31)-(2.33) e integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle z^T, \mathcal{F}_T(u) \rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L z^T(x)y(T,x)dx \\ &= \int_0^T \int_0^L (zy)_t dt dx = \int_0^T \int_0^L (z_t y + z y_t) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^L (z_{xy} + z y_x) dx dt = - \int_0^T \int_0^L (zy)_x dx dt \\ &= \int_0^T z(t,0)u(t)dt = \langle z(\cdot, 0), u \rangle_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

Dado que el conjunto $D = \{u \in C^2(0, T) : u(0) = 0\}$ es denso en $L^2(0, T)$ se concluye la prueba.

Finalmente de la desigualdad (2.28) se puede ver que el sistema (2.2) es controlable a cero si y sólo si se satisface la siguiente desigualdad de observabilidad

$$\int_0^T z(t, 0)^2 dt \geq c^2 \int_0^L z(T, x)^2 dx \quad (2.34)$$

donde z es la solución del sistema (2.29).

2.2. El método de los momentos

En esta sección el objetivo es dar una descripción del método de los momentos propuesto por H. Fattorini y D. Russell en [10].

Para $X, T \in \mathbb{R}^+$, consideramos la ecuación parabólica en $[0, T] \times [0, X]$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + q(x)y + b(x)f(t), \quad (2.35)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} A_0 y(t, 0) + B_0 \frac{\partial y}{\partial x}(t, 0) &= g_0(t), \quad A_0^2 + B_0^2 \neq 0 \\ A_1 y(t, X) + B_1 \frac{\partial y}{\partial x}(t, X) &= g_1(t), \quad A_1^2 + B_1^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $p(x) \in C^2[0, X]$, $p(x) > 0$, $x \in [0, X]$, $b \in L^2[0, X]$, $q(x) \in C[0, X]$. Las funciones f, g_0 y g_1 son interpretadas como las funciones de control y son admisibles si $f, g'_0, g'_1 \in L^2[0, T]$. Dado un estado inicial

$$y(0, x) := y_0(x) \in L^2[0, X] \quad (2.37)$$

el problema (2.35), (2.36) y (2.37) tiene solución única en el siguiente sentido:

- i) Para cada $t \in [0, T]$, $y(t, \cdot) \in L^2[0, X]$ y para $t > 0$, $\frac{\partial y}{\partial x}(t, \cdot)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, \cdot)$ existen en el sentido de distribuciones (ver [14]) y están en $L^2[0, X]$.
- ii) La función $t \rightarrow y(t, \cdot)$ definida en $[0, T]$ y con valores en $L^2[0, X]$, es continua en $[0, T]$ y es continuamente diferenciable en $(0, T]$, en ambos casos, con respecto a la norma en $L^2[0, X]$. Además (2.37) se satisface en el siguiente sentido

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|y(t, \cdot) - y_0\|_{L^2[0, X]} = 0.$$

- iii) Para cada $t \in (0, T]$ la ecuación (2.35) se satisface en casi todos los $x \in [0, X]$ a excepción de un conjunto de medida cero.
- iv) La condición (2.36) se satisface para $t \in (0, T]$.

El problema de control

Dada $y_T \in L^2[0, X]$, ¿es posible encontrar controles f, g_0 y g_1 tal que $y(t, x)$ sea la solución de (2.35)-(2.37) y que cumpla

$$y(T, x) = y_T(x), \quad x \in [0, X]? \quad (2.38)$$

A este problema se le conoce como el problema de control exacto, ya que se quiere llegar del estado inicial (2.37) al estado final (2.38).

Cuando

$$y_T \equiv 0 \quad \text{en } [0, X], \quad (2.39)$$

se le llama el problema de controlabilidad nula. Sea A el operador definido en $L^2[0, X]$ como

$$(Ay)(x) := (p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \quad (2.40)$$

con dominio $D(A)$ consistente de todas las funciones $y \in L^2[0, X]$ tal que y' y y'' existen en el sentido de distribuciones y son elementos de $L^2[0, X]$; además cumplen las condiciones iniciales $A_0y(0) + B_0y'(0) = A_1y(X) + B_1y'(X) = 0$.

Es fácil ver que A es un operador lineal auto-adjunto, es decir, $A^* = A$.

Se puede probar que A posee una sucesión de autovalores $\{-\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reales y diferentes tal que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. (ver [24])

Es más, si

$$L := \int_0^X p(x)^{-1/2} dx < \infty \quad (2.41)$$

es conocido (ver [23]) que existe una constante real α tal que

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{L^2} (n + \alpha)^2 + O(1). \quad (2.42)$$

Asociados a los autovalores existe una sucesión de funciones $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^2[0, X]$ que son ortonormales y que forman una base para $L^2[0, X]$; es decir, cada función $z \in L^2[0, X]$ se puede escribir como una serie convergente en $L^2[0, X]$, así

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \phi_n, \quad \text{donde } \zeta_n = \int_0^X z(x) \phi_n(x) dx$$

Esto nos permite escribir

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \phi_n, \quad (2.43)$$

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n, \quad (2.44)$$

$$y(t, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \phi_n, \quad (2.45)$$

$$y_T = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \phi_n, \quad (2.46)$$

con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2(t) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < \infty.$$

Se sigue que la condición (2.38) es equivalente a

$$\eta_n(T) = v_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.47)$$

Notamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$w(t, x) = \phi_n(x) e^{\lambda_n(t-T)} \quad (2.48)$$

es una solución C^∞ de la ecuación diferencial adjunta

$$w_t = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q(x)w \quad (2.49)$$

en el conjunto $D = [0, T] \times [0, X]$ con condiciones de frontera homogéneas ($g_0 = g_1 = 0$) de la forma (2.36).

Entonces dicha solución $w(t, x)$ de la ecuación adjunta, junto con la solución $y(t, x)$ de (2.35)-(2.37) satisfaciendo (2.38), debe satisfacer

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int_D \{w [y_t - (p(x)y_x)_x - q(x)y - b(x)f(t)] + y [w_t + (p(x)w_x)_x + q(x)w]\} dxdt \\ &= \int \int_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [p(x)(yw_x - wy_x)] + \frac{\partial}{\partial t} (yw) \right\} dxdt - \int \int_D b(x)w(t, x)f(t)dxdt \\ &= - \int \int_D f(t)w(t, x)b(x)dxdt + \int_0^X [y(T, x)w(T, x) - y(0, x)w(0, x)]dx \\ &\quad + \int_0^T \{p(X)[y(t, X)w_x(t, X) - w(t, X)y_x(t, X)] - p(0)[y(t, 0)w_x(t, 0) - w(t, 0)y_x(t, 0)]\}dt \end{aligned}$$

Usando (2.43)-(2.45), (2.48) y suponiendo que la solución $y(t, x)$ es de la forma (2.45) para el problema (2.35)-(2.37) en el sentido antes mencionado en i)-iv), obtenemos

$$\eta_n(T) - e^{-\lambda_n T} \mu_n = \int_0^T e^{-\lambda_n(T-t)} \beta_n f(t) dt + \int_0^T e^{-\lambda_n(T-t)} \beta_n^0 g_0(t) dt + \int_0^T e^{-\lambda_n(T-t)} \beta_n^1 g_1(t) dt$$

donde

$$\beta_n^0 = \begin{cases} -\frac{p(0)}{B_0} \phi_n(0) & \text{si } B_0 \neq 0, \\ -\frac{p(0)}{A_0} \phi_n(0) & \text{si } B_0 = 0, \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\beta_n^1 = \begin{cases} \frac{p(X)}{B_1} \phi_n(X) & \text{si } B_1 \neq 0, \\ -\frac{p(X)}{A_1} \phi_n(X) & \text{si } B_1 = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Ahora introducimos las siguientes sucesiones

$$c_n^{(1)} := \int_0^T e^{-\lambda_n t} f(T-t) dt, \quad c_n^{(2)} := \int_0^T e^{-\lambda_n t} g_0(T-t) dt, \quad c_n^{(3)} := \int_0^T e^{-\lambda_n t} g_1(T-t) dt. \quad (2.52)$$

El problema (2.35) es exactamente controlable si y sólo si $\eta_n(T) = v_n$ si y sólo si existen sucesiones $\tilde{c}_n^{(1)}$, $\tilde{c}_n^{(2)}$, $\tilde{c}_n^{(3)}$ tales que

$$v_n - e^{-\lambda_n T} \mu_n = \tilde{c}_n^{(1)} + \tilde{c}_n^{(2)} + \tilde{c}_n^{(3)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.53)$$

donde

$$\tilde{c}_n^{(1)} = \beta_n c_n^{(1)}, \quad \tilde{c}_n^{(2)} = \beta_n^0 c_n^{(2)}, \quad \tilde{c}_n^{(3)} = \beta_n^1 c_n^{(3)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.54)$$

Como consecuencia, resolver el problema de controlabilidad exacta es equivalente a encontrar una solución del siguiente problema de los momentos.

Para $T > 0$ fija, dada una sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ queremos encontrar una función $h \in L^2[0, T]$ tal que

$$\int_0^T e^{-\lambda_n t} h(t) dt = c_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.55)$$

Para resolver (2.55) notamos que si podemos construir una sucesión de funciones $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^2[0, T]$ biortogonal al conjunto de funciones $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir

$$\int_0^T \psi_n(t) e^{-\lambda_m t} dt = \delta_{nm} \quad \text{para todo } n, m \geq 1, \quad (2.56)$$

entonces el problema (2.55) tendría una solución de la forma

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(t), \quad (2.57)$$

siempre que la serie (2.57) converja en $L^2[0, T]$. Sin embargo, este problema es muy complicado ya que debemos caracterizar las sucesiones $\{c_n\}$ para las cuales converge (2.57). Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \|\psi_n\|_{L^2[0, T]} < \infty, \quad (2.58)$$

entonces la serie en (2.57) converge en $L^2[0, T]$. Así que debemos estimar $\|\psi_n\|_{L^2[0, T]}$, cuyo valor depende de la sucesión de autovalores $\{\lambda_n\}$ del operador (2.40).

En el trabajo de Fattorini y Russell se asume que los autovalores del operador (2.40) son positivos, ya que $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $n \geq 1$, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta acotada por abajo y $\lambda_n \rightarrow \infty$; así que existe $\lambda \leq 0$ tal que $\lambda_n + \lambda > 0$.

- a) Sea $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de autovalores del operador (2.40). Ponemos $E(\Lambda, T) := \overline{\text{span}}\{e^{-\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^2[0, T]$.
Entonces $E(\Lambda, T) \subset L^2[0, T]$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (2.59)$$

b) Sean $\Lambda_n := \{\lambda_m : m \neq n\}$ y $E(\Lambda_n, T) = \overline{\text{span}}\{e^{-\lambda_m t} : m \neq n\}$.

Si se cumple (2.59) entonces $E(\Lambda_n, T) \subset L^2[0, T]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Si se satisface (2.59), entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única función $r_n \in E(\Lambda_n, T)$ tal que

$$\|e^{-\lambda_n t} - r_n\|_{L^2(0, T)} = \inf\{\|e^{-\lambda_n t} - r\| : r \in E(\Lambda_n, T)\}.$$

Además $(e^{-\lambda_n t} - r_n) \perp r$ para todo $r \in E(\Lambda_n, T)$.

d) Se define la función $\psi_n(t)$ por

$$\psi_n(t) = \frac{e^{-\lambda_n t} - r_n(t)}{d_n^2(T)}, \quad t \in (0, T), \quad (2.60)$$

donde

$$d_n^2(T) = \int_0^T [e^{-\lambda_n t} - r_n(t)]^2 dt. \quad (2.61)$$

Entonces $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es el conjunto optimal biortogonal al conjunto $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ya que $e^{-\lambda_n t} - r_n \perp r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Se puede notar de (d) que

$$\|\psi_n\|_{L^2[0, T]} := d_n^{-1}(T). \quad (2.62)$$

Además Kaczmarz y Steinhaus en [22] probaron que

$$d_n^2(\infty) := \frac{1}{2\lambda_n} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j - \lambda_n}{\lambda_j + \lambda_n} \right)^2 = \frac{2}{\lambda_n} \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j} \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_j} \right)^2}, \quad (2.63)$$

donde \prod' denota el producto omitiendo el factor correspondiente a $j = n$.

f) Se puede ver que para cada $T > 0$, existe una constante $K_T > 0$ tal que

$$d_n^2(T) \geq K_T^{-2} d_n^2(\infty). \quad (2.64)$$

Combinando (2.62), (2.63) y (2.64) tenemos

$$\|\psi_n\|_{L^2[0, T]} \leq \frac{\lambda_n K_T}{2} \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_j} \right)}{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j} \right)} \quad (2.65)$$

g) Si se cumple la condición (2.41), entonces la relación en (2.42) y el lema 3.1 en [10] implican que existen constantes P_2 y Q_2 tales que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right) \leq \exp[(K^{-1/2}P_2 + o(1))\lambda_n^{1/2}], \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.66)$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right) \leq \exp[(K^{-1/2}Q_2 + o(1))\lambda_n^{1/2}], \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.67)$$

donde $K = \pi^2/L^2$ y $P_2 - Q_2 = \pi$.

De (2.66) y (2.67) se sigue que existe $\eta_1 > 0$ tal que

$$\|\psi_n\|_{L^2[0,T]} \leq \exp[(K^{-1/2}\pi + \eta_1)\lambda_n^{1/2}].$$

La condición (2.58) se satisface si $\eta \geq \eta_1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \exp[(L + \eta)\lambda_n^{1/2}] < \infty. \quad (2.68)$$

h) Retomando el problema de control se puede notar que la sucesión $\{c_n\}$ esta dada por (2.54), y es evidente que el comportamiento asintótico de $\{c_n\}$ depende del comportamiento asintótico de las sucesiones $\{\beta_n\}$, $\{\beta_n^0\}$ y $\{\beta_n^1\}$. En [23] se prueba que

$$\beta_n^0 \approx a_0 \lambda_n^{1/2}, \quad \beta_n^1 \approx a_1 \lambda_n^{1/2},$$

donde $a_0 \neq 0$ y $a_1 \neq 0$ son constantes adecuadas.

A partir de lo anterior enunciamos el resultado principal de Fattorini en [10] sobre la controlabilidad exacta de (2.35).

Teorema 3 *Un estado final (2.38) puede ser alcanzado desde un estado inicial (2.37) en el tiempo $T > 0$ por medio de los controles g_0 , g_1 y f continuamente diferenciales y acotados si existen constantes $M, \eta > 0$ tales que*

$$|v_n - e^{-\lambda_n T} \mu_n| \leq M \exp[-(L + \eta)n], \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.69)$$

Observamos que el sistema (2.35)-(2.37) es controlable a cero si se satisface que

$$e^{-\lambda_n T} |\mu_n| \leq M \exp[-(L + \eta)n] \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.70)$$

para ciertas constantes $M, \eta > 0$.

Capítulo 3

La ecuación de transporte-difusión

Fijamos las constantes $L, T > 0$, $\varepsilon > 0$ y $M \neq 0$. Consideramos la siguiente ecuación de transporte-difusión:

$$\begin{cases} y_t + My_x - \varepsilon y_{xx} = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{si } t \in (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{si } t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde ε es el parámetro de viscosidad dado. En esta sección vamos a mostrar que (3.1) tiene una solución cuando imponemos la condición

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.2)$$

con $y_0 \in L^2(0, L)$. Además mostraremos que el sistema (3.1)-(3.2) es controlable a cero al tiempo T . Es decir, para cada condición inicial $y_0 \in L^2(0, L)$ mostramos que existe un control $u \in L^2(0, T)$ tal que la solución y del sistema (3.1)-(3.2) satisface

$$y(T, x) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, L]. \quad (3.3)$$

Nuestro objetivo principal es determinar el costo del control $u(t)$ en (3.1). Cuando hacemos tender $\varepsilon \rightarrow 0^+$ en (3.1), obtenemos la ecuación de transporte (2.1), la cual es controlable al tiempo $T > L/|M|$.

3.1. Problema de Cauchy bien planteado

Ahora consideramos el siguiente problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t + My_x - \varepsilon y_{xx} = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{si } t \in (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{si } t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x) & \text{si } x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Probaremos la existencia y unicidad de la solución utilizando el teorema A.12. Para esto introducimos los operadores A , B y verificamos que satisfacen la definición A.11 y la desigualdad (A.3) para la controlabilidad.

Denotamos por $H_0^1(0, L) := \{\beta \in H^1(0, L) : \beta(0) = \beta(L) = 0\}$. Es conocido que $H_0^1(0, L)$ es un espacio de Hilbert sobre el campo real dotado con el producto interior

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{H_0^1(0, L)} = \int_0^L \alpha_x \beta_x dx. \quad (3.5)$$

Denotamos por $H^{-1}(0, L)$ el dual normado de $H_0^1(0, L)$. Dado $f \in H^{-1}(0, L)$, por el teorema de representación de Riesz existe $\alpha \in H_0^1(0, L)$ tal que

$$f(\beta) = \langle \beta, \alpha \rangle_{H_0^1(0, L)} \text{ para todo } \beta \in H_0^1(0, L).$$

Por otro lado,

$$f(\varphi) = \int_0^L \alpha_x \varphi_x dx = -\alpha_{xx}(\varphi) \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0, L). \quad (3.6)$$

Como $\overline{\mathcal{D}(0, L)} = H_0^1(0, L)$ y $\alpha_{xx} \in H^{-1}(0, L)$ se sigue que $f \equiv -\alpha_{xx}$ (ver el apéndice B). Definimos al siguiente mapeo sobreyectivo

$$\begin{array}{ccc} J : H^{-1}(0, L) & \rightarrow & H_0^1(0, L) \\ f & \mapsto & \alpha \end{array} \quad (3.7)$$

De (3.7) se cumple

$$\begin{aligned} J\alpha_{xx} &= -\alpha \text{ para todo } \alpha \in H_0^1(0, L), \\ (Jf)_{xx} &= -f \text{ para todo } f \in H^{-1}(0, L), \\ (Jf_x)_x &= -f \text{ para todo } f \in L^2(0, L). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dotamos al espacio $H^{-1}(0, L)$ con el siguiente producto escalar:

$$\langle f, g \rangle_{H^{-1}(0, L)} := \int_0^L (Jf)_x (Jg)_x dx = \langle Jf, Jg \rangle_{H_0^1(0, L)}, \quad f, g \in H^{-1}(0, L). \quad (3.9)$$

Por lo tanto, J es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert $H^{-1}(0, L)$ y $H_0^1(0, L)$.

Consideremos $f \in H^{-1}(0, L)$, $g \in L^2(0, L)$. Usando integración por partes y (3.8) tenemos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{H^{-1}(0, L)} &= \langle Jf, Jg \rangle_{H_0^1(0, L)} \\ &= \langle (Jf)_x, (Jg)_x \rangle_{L^2(0, L)} \\ &= - \langle Jf, (Jg)_{xx} \rangle_{L^2(0, L)} \\ &= \langle Jf, g \rangle_{L^2(0, L)} \end{aligned}$$

Así

$$\langle f, g \rangle_{H^{-1}(0, L)} := \int_0^L (Jf)_x (Jg)_x dx = \int_0^L (Jf)g dx, \quad \text{si } f \in H^{-1}(0, L), \quad g \in L^2(0, L). \quad (3.10)$$

Sea A el siguiente operador lineal

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset H^{-1}(0, L) &\rightarrow H^{-1}(0, L) \\ f &\mapsto \varepsilon f_{xx} - Mf_x, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $D(A) := H_0^1(0, L)$. Es conocido que A es un operador densamente definido y cerrado (ver apéndice A).

Sea $f \in D(A) \cap H^2(0, L)$ y $\alpha = Jf$, entonces por (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} \langle Af, f \rangle_{H^{-1}(0, L)} &= \int_0^L (\varepsilon f_{xx} - Mf_x) \alpha dx \\ &= \varepsilon \int_0^L \alpha_{xx} f dx + M \int_0^L \alpha_x f dx \\ &= -\varepsilon \int_0^L f^2 dx - M \int_0^L \alpha_x \alpha_{xx} dx \\ &= -\varepsilon \int_0^L f^2 dx - \frac{M}{2} [\alpha_x^2(L) - \alpha_x^2(0)]. \end{aligned}$$

Es decir

$$\langle Af, f \rangle_{H^{-1}(0, L)} = -\varepsilon \int_0^L f^2 dx - \frac{M}{2} [\alpha_x^2(L) - \alpha_x^2(0)]. \quad (3.12)$$

Si $\alpha \in D(A) \cap H^2(0, L)$, existe $\eta \in [0, L]$ tal que $\alpha_x(\eta) = 0$ debido a que $\alpha(0) = \alpha(L) = 0$, entonces la función α alcanza un máximo(mínimo) en $[0, L]$, de donde se cumple para $s \in [0, L]$

$$\alpha_x^2(s) = \begin{cases} 2 \left| \int_s^\eta \alpha_x \alpha_{xx} dx \right| & \text{si } s \in [0, \eta] \\ 2 \left| \int_\eta^s \alpha_x \alpha_{xx} dx \right| & \text{si } s \in (\eta, L]. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_x^2(s) \leq 2 \int_0^L |\alpha_x \alpha_{xx}| dx. \quad (3.13)$$

Para $a, b \geq 0$ se tiene $2ab \leq a^2 + b^2$, en particular $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 b^2$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\alpha_x^2(s) \leq \frac{\varepsilon}{|M|+1} \int_0^L f^2 dx + \frac{|M|+1}{\varepsilon} \int_0^L \alpha_x^2 dx, \quad s \in [0, L]. \quad (3.14)$$

Consideramos el caso cuando $M > 0$. Por (3.14) con $s = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \alpha_x^2(0) &\leq \frac{M}{2(M+1)} \varepsilon \int_0^L f^2 dx + \frac{M(M+1)}{2\varepsilon} \int_0^L \alpha_x^2 dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^L f^2 dx + \frac{M(M+1)}{\varepsilon} \int_0^L \alpha_x^2 dx + \frac{M}{2} \alpha_x^2(L) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle Af, f \rangle_{H^{-1}(0,L)} = -\varepsilon \int_0^L f^2 dx - \frac{M}{2} \alpha_x^2(L) + \frac{M}{2} \alpha_x^2(0) \leq \frac{M(M+1)}{\varepsilon} \int_0^L \alpha_x^2 dx = M \frac{M+1}{\varepsilon} \|f\|_{H^{-1}(0,L)}^2.$$

Cuando $M < 0$ usamos (3.14) con $s = L$ y multiplicar por $-M/2$.

Así para $M \neq 0$ tenemos

$$\langle Af, f \rangle_{H^{-1}(0,L)} \leq |M| \frac{|M|+1}{\varepsilon} \|f\|_{H^{-1}(0,L)}^2, \quad \text{para todo } f \in D(A). \quad (3.15)$$

Dado el operador identidad Id en $H^{-1}(0, L)$, definimos el operador $A_k = A - k\text{Id}$, para algún $k \in \mathbb{R}^+$. Si $k \geq |M| \frac{|M|+1}{\varepsilon}$, entonces $\langle A_k f, f \rangle_{H^{-1}(0,L)} \leq 0$, es decir, A_k es disipativo.

Ahora calculamos el operador adjunto de A . Dadas $f \in D(A) \cap H^2(0, L)$ y $g \in H^1(0, L)$ tal que $-\varepsilon g(0) + M(Jg)_x(0) = -\varepsilon g(L) + M(Jg)_x(L) = 0$, en particular $-\varepsilon g + M(Jg)_x \in H_0^1(0, L)$. Entonces por (3.10) y (B.6)

$$\begin{aligned}
 \langle Af, g \rangle_{H^{-1}(0,L)} &= \int_0^L (\varepsilon f_{xx} - M f_x) J g dx \\
 &= - \int_0^L (\varepsilon f_x - M f) (Jg)_x dx \\
 &= \int_0^L (\varepsilon f (Jg)_{xx} + M f (Jg)_x) dx \\
 &= \int_0^L (-\varepsilon g + M (Jg)_x) f dx \\
 &= \langle f, J(J^{-1}[-\varepsilon g + M (Jg)_x]) \rangle_{L^2(0,L)} \\
 &= \langle f, J^{-1}[-\varepsilon g + M (Jg)_x] \rangle_{H^{-1}(0,L)},
 \end{aligned}$$

por lo tanto $g \in D(A^*)$ y $A^*g = J^{-1}[-\varepsilon g + M (Jg)_x]$.

Para $g \in D(A^*)$, existe $h \in H^{-1}(0, L)$ tal que

$$\langle Af, g \rangle_{H^{-1}(0,L)} = \langle f, h \rangle_{H^{-1}(0,L)},$$

para toda $f \in \mathcal{D}(0, L)$.

Por (3.10)

$$\begin{aligned}
 \int_0^L f J h dx &= \int_0^L (\varepsilon f_{xx} - M f_x) J g dx \\
 &= - \int_0^L (\varepsilon f_x - M f) (Jg)_x dx \\
 &= \varepsilon \langle (Jg)_{xx}, f \rangle_{\mathcal{D}'(0,L) - \mathcal{D}(0,L)} + M \int_0^L f (Jg)_x dx \\
 &= \langle -\varepsilon g + M (Jg)_x, f \rangle_{\mathcal{D}'(0,L) - \mathcal{D}(0,L)}
 \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{D}(0, L)$, por lo tanto $-\varepsilon g + M (Jg)_x = Jh \in H_0^1(0, l)$ y el resultado se sigue de la parte anterior.

Lo anterior nos permite definir formalmente al operador adjunto de A como sigue

$$\begin{aligned}
 A^* : D(A^*) \subset H^{-1}(0, L) &\rightarrow H^{-1}(0, L) \\
 g &\mapsto J^{-1}[-\varepsilon g + M (Jg)_x],
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde $D(A^*) := \{g \in H^1(0, L) : -\varepsilon g(0) + M (Jg)_x(0) = -\varepsilon g(L) + M (Jg)_x(L) = 0\}$.

Se puede probar que A^* es densamente definido y cerrado.

Además para $f \in D(A^*) \cap H^2(0, L)$ procedemos como en (3.12) y obtenemos

$$\langle A^* f, f \rangle_{H^{-1}(0,L)} = -\varepsilon \int_0^L f^2 dx - \frac{M}{2} [\alpha_x^2(L) - \alpha_x^2(0)], \tag{3.17}$$

entonces A^* satisface la desigualdad (3.15).

Para $k \in \mathbb{R}^+$ el operador $A_k^* := A^* - k\text{Id}$ es disipativo si $k \geq |M| \frac{|M| + 1}{2}$ y es el operador adjunto de A_k . Sea $k \in \mathbb{R}^+$ que cumple todo lo anterior. Por el teorema A.8 el operador A_k es el generador infinitesimal de un semigrupo de operadores lineales fuertemente continuos denotado por $\mathcal{S}_k := \{S_k(t) : t \geq 0\}$ sobre $H^{-1}(0, L)$.

Definimos entonces la familia $\mathcal{S} = \{S(t) : t \in [0, \infty)\}$ de operadores lineales como sigue

$$\begin{aligned} S(t) : H &\rightarrow H \\ f &\mapsto S(t)f := e^{kt} S_k(t)f \end{aligned} \quad (3.18)$$

Claramente \mathcal{S} es una familia de operadores lineales fuertemente continua con generador infinitesimal A (ver apéndice A, definiciones A.5 y el teorema A.7), ya que

i) $S(0)f := S_k(0)f = f$ para todo $f \in H$, es decir $S(0) = \text{Id}$.

ii) Para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y $f \in H$ tenemos que

$$S(t_1 + t_2)f = e^{k(t_1+t_2)} S_k(t_1 + t_2)f = e^{kt_1} S_k(t_2) e^{kt_2} S_k(t_2)f = S(t_1)S(t_2)f,$$

es decir, $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, \infty)$.

iii) Dado $f \in H$. tenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f - f}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{kt} \cdot \frac{S_k(t)f - f}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{kt} - 1}{t} \cdot f = (A - k\text{Id})f + kf = Af.$$

Ahora llega el turno de definir al operador B . Como motivación para su definición consideramos $f \in H^2(0, L)$ con $f(L) = 0$ y $g \in D(A^*)$. Entonces usando (3.8), (3.9) y (B.6) tenemos

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon f_{xx} - Mf_x, g \rangle_{H^{-1}(0, L)} &= \langle \varepsilon f_{xx} - Mf_x, Jg \rangle_{L^2(0, L)} \\ &= - \langle \varepsilon f_x - Mf, (Jg)_x \rangle_{L^2(0, L)} \\ &= \varepsilon \langle f, (Jg)_{xx} \rangle_{L^2(0, L)} + \langle f, -M(Jg)_x \rangle_{L^2(0, L)} + \varepsilon f(0)(Jg(0))_x \\ &= \langle f, JA^*g \rangle_{L^2(0, L)} + \varepsilon f(0)(Jg(0))_x \\ &= \langle f, A^*g \rangle_{H^{-1}(0, L)} + \varepsilon f(0)(Jg(0))_x \end{aligned}$$

Así por (3.10) y (3.16)

$$\langle \varepsilon f_{xx} - Mf_x, g \rangle_{H^{-1}(0, L)} = \varepsilon f(0)(Jg)_x(0) + \langle (f, A^*g) \rangle_{H^{-1}(0, L)}. \quad (3.19)$$

De la definición A.11, si $y \in C^1([0, T]; H^{-1}(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^1(0, L))$ es una solución de (3.1) y si $z \in C^1([0, T]; H^{-1}) \cap C^0([0, T]; D(A))$ es una solución de $z_t = A^*z$. Ponemos

$f \equiv y(0)$, $g \equiv z(0)$ en $[0, L]$. Notamos que $f(L) = y(0, L) = 0$ y por (3.19) se cumple

$$\langle \varepsilon f_{xx} - M f_x, g \rangle_{H^{-1}(0, L)} := \varepsilon f(0)(Jg)_x(0) + \langle f, A^* g \rangle_{H^{-1}(0, L)}. \quad (3.20)$$

Sea $D(A^*)'$ el espacio dual de $D(A^*)$. Definimos el operador lineal B como sigue:

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R} &\rightarrow D(A^*)' \\ u &\mapsto T_u, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{aligned} T_u : D(A^*) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \varepsilon u(Jg)_x(0) \end{aligned}$$

Por convención $Bg := (B1)(g)$, $g \in D(A^*)$. Es claro que B es un operador lineal bien definido y continuo. El operador adjunto de B esta dado por

$$\begin{aligned} B^* : D(A^*) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \varepsilon(Jg)_x(0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ahora mostramos que se satisface (A.3).

Sean $T > 0$, $z_0 \in D(A^*)$ y $z \in C^1([0, T]; H^{-1}(0, L)) \cap C^0([0, T]; D(A))$ dada por

$$z(t) = S(t)^* z_0. \quad (3.23)$$

Sea $\varphi \in C^1([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^3(0, L))$ dada por

$$\varphi(t) := Jz(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.24)$$

Ponemos $\varphi(t, x) := \varphi(t)(x)$, $x \in (0, L)$. Entonces

$$\varphi(t, \cdot) \in H_0^1(0, L) \quad \text{y} \quad \varphi_{xx}(t, \cdot) = (Jz(t))_{xx} = -z(t, \cdot) \quad (3.25)$$

Claramente

$$\varphi_t(t) := J(z_t(t)) = J(A^* z(t)) = -\varepsilon z(t) + M(Jz(t))_x = \varepsilon \varphi_{xx}(t) + M \varphi_x(t). \quad (3.26)$$

Multiplicamos (3.26) por $-\varphi_{xx}$ y usamos (3.25) para obtener

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx = -\varepsilon \int_0^L |\varphi_{xx}(t, x)|^2 dx - \frac{M}{2} |\varphi_x(t, L)|^2 + \frac{M}{2} |\varphi_x(t, 0)|^2. \quad (3.27)$$

Usamos (3.14) con $\alpha := \varphi(t, \cdot)$, entonces para $s \in [0, L]$ se sigue que

$$|\varphi_x(t, s)|^2 \leq \frac{\varepsilon}{|M| + 1} \int_0^L |\varphi_{xx}(t, x)|^2 dx + \frac{|M| + 1}{\varepsilon} \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx. \quad (3.28)$$

Supongamos $M > 0$. De (3.27) se sigue que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \leq -2\varepsilon \int_0^L |\varphi_{xx}(t, x)|^2 dx + M |\varphi_x(t, 0)|^2$$

y utilizando (3.28) con $s = 0$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \leq -\varepsilon \int_0^L |\varphi_{xx}(t, x)|^2 dx + M \frac{M + 1}{\varepsilon} \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx$$

La desigualdad anterior es válida para $M < 0$. En (3.27) sólo consideramos el término con $\varphi_x(t, L)$ y usamos (3.28).

Por lo tanto, para $M \neq 0$,

$$\frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \leq -c_1 \int_0^L |\varphi_{xx}(t, x)|^2 dx + c_2 \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \quad (3.29)$$

con

$$c_1 := \varepsilon, \quad c_2 := |M| \frac{|M| + 1}{\varepsilon} \quad (3.30)$$

Ponemos $\eta(t) := \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx$. De (3.29) tenemos

$$\eta(\tau) - e^{c_1 \tau} \eta(0) = \int_0^\tau \frac{d}{dt} [e^{-c_2 t} \eta(t)] \leq 0 \quad \tau \in [0, T]$$

por lo tanto

$$\int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \leq e^{c_2 T} \int_0^L |\varphi_x(0, x)|^2 dx \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (3.31)$$

Si integramos (3.29) en $[0, T]$ y usamos (3.31) obtenemos

$$\int_0^T \int_0^L |\varphi_{xx}(t, x)|^2 dx \leq \frac{e^{c_2 T}}{c_1} \int_0^L |\varphi_x(0, x)|^2 dx \quad (3.32)$$

Usando (3.28) con $s = 0$, junto con (3.31) y (3.32) tenemos

$$\int_0^T |\varphi_x(t, 0)|^2 dx \leq \frac{C_T}{\varepsilon^2} \int_0^L |\varphi_x(0, x)|^2 dx \quad (3.33)$$

donde

$$C_T := \varepsilon^2 \left(\frac{\varepsilon}{c_1|M| + c_1} + T \frac{|M| + 1}{\varepsilon} \right) e^{c_2 T}. \quad (3.34)$$

Por lo tanto se satisface la condición (A.3) que es equivalente a (3.33), dado que

$$\|z_0\|_{H^{-1}(0,L)} = \|(Jz(0))_x\|_{L^2(0,L)} = \|\varphi_x(0, x)\|_{L^2(0,L)} \text{ y } B^*z(t) = \varepsilon(Jz)_x(0) = \varepsilon\varphi_x(t, 0)$$

Así, por el teorema A.12 existe una única solución para (3.1)-(3.2).

3.2. Problema de control nulo

Consideramos el sistema (3.1)-(3.2) el cual es controlable a cero al tiempo T debido al teorema 3 de Fattorini (ver [10]). Es decir, para cada $y_0 \in H^{-1}(0, L)$ existe $u \in L^2(0, T)$ tal que la solución y de (3.1)-(3.2) satisface $y(T, \cdot) \equiv 0$.

Ahora introducimos algunos términos que serán necesarios para el desarrollo de nuestro tema

- Para $y_0 \in H^{-1}(0, L)$ denotamos por $U(\varepsilon, T, L, M, y_0)$ al conjunto de controles $u \in L^2(0, T)$, tal que la solución de (3.4) satisface $y(T, \cdot) \equiv 0$.
- El costo de la controlabilidad nula de (3.1) esta dada por

$$C(\varepsilon, T, L, M) := \sup_{\|y_0\|_{H^{-1}(0,L)} \leq 1} \inf\{\|u\|_{L^2(0,T)} : u \in U(\varepsilon, T, L, M, y_0)\} \quad (3.35)$$

- $U(\varepsilon, T, L, M, y_0)$ es un subespacio afín cerrado de $L^2(0, T)$, así que existe el control óptimo $u_{opt} \in L^2(0, T)$ donde se alcanza el ínfimo en (3.35). La prueba de este resultado se encuentra en [13].

Estudiar el comportamiento asintótico de $C(\varepsilon, T, L, M)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ está relacionado con estudiar el sistema (2.1).

Teorema 4 *Fijamos $T, L > 0$ y $M \neq 0$. Sean $y_0 \in L^2(0, L)$, $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, T)$ tal que, para alguna $u \in L^2(0, T)$, u_n*

converge débilmente a u en $L^2(0, T)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos a $y_n \in C^0([0, T]; H^{-1}(0, L))$ la solución del problema

$$\begin{aligned} y_{nt} - \varepsilon_n y_{nxx} + M y_{nx} &= 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y_n(t, 0) &= u_n(t), & t \in (0, T), \\ y_n(t, L) &= 0, & t \in (0, T), \\ y_n(0, x) &= y_0(x), & x \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para $M > 0$, sea $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ la solución del problema

$$\begin{aligned} y_t + M y_x &= 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) &= u(t), & t \in (0, T), \\ y(0, x) &= y_0(x), & x \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para $M < 0$, sea $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ la solución del problema

$$\begin{aligned} y_t + M y_x &= 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, L) &= u(t), & t \in (0, T), \\ y(0, x) &= y_0(x), & x \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Entonces $y_n \rightarrow y$ débilmente en $L^2((0, T) \times (0, L))$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Se puede probar del teorema 2 (ahí $M = 1$) y del teorema 4 que para cada tripleta (T, L, M) con $T < L/|M|$, se satisface

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C(\varepsilon, T, L, M) = \infty. \quad (3.39)$$

Los primeros resultados para estimar el radio de convergencia de (3.39), están establecidos en [7] y [13], y son los siguientes.

Teorema 5 *Existe una constante $C_0 > 0$ tal que, para cada $\varepsilon, T, L \in \mathbb{R}^+$, se tiene que*

$$C(\varepsilon, T, L, M) \geq C_0 \frac{\varepsilon^{-1} T^{-1/2} L^{1/2}}{1 + \frac{L^{5/2} M^{5/2}}{\varepsilon^{5/2}}} \exp\left(\frac{M}{2\varepsilon}(L - TM) - \frac{\pi^2 \varepsilon T}{L^2}\right) \quad (3.40)$$

para cada $M > 0$, y

$$C(\varepsilon, T, L, M) \geq C_0 \frac{\varepsilon^{-1} T^{-1/2} L^{1/2}}{1 + \frac{L^{5/2} |M|^{5/2}}{\varepsilon^{5/2}}} \exp\left(\frac{|M|}{2\varepsilon}(2L - T|M|) - \frac{\pi^2 \varepsilon T}{L^2}\right) \quad (3.41)$$

para cada $M < 0$.

En cuanto a cotas superiores para $C(\varepsilon, T, L, M)$, en [7] se encuentran las siguientes observaciones

- Si $M > 0$ y $T > L/M$, la función de control $u \equiv 0$ lleva al sistema (3.37) desde cualquier estado inicial $y_0 \in L^2(0, L)$ hasta 0 al tiempo T (ver la forma de la solución dada por (2.5)).
- Si $M < 0$ y $T > L/|M|$, entonces la función $y(t, x)$ en el teorema 4 satisface $y(T, \cdot) = 0$ para cualquier $y_0 \in L^2(0, L)$.

Lo anterior nos lleva a suponer que para $T, L \in \mathbb{R}^+$, $M \in \mathbb{R}^*$ tal que $T > L/|M|$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C(\varepsilon, T, L, M) = 0. \quad (3.42)$$

Sin embargo a partir del teorema 2 se puede comprobar que tal resultado es falso cuando $M < 0$ y $T \in (L/|M|, 2L/|M|)$. El siguiente teorema muestra que (3.42) se cumple si $T|M|/L$ es suficientemente grande.

Teorema 6 Sean a, A, b , y B las siguientes constantes

$$a := 4.3, \quad A := 2.61, \quad b := 57.2, \quad B := 18.1 \quad (3.43)$$

Entonces existe $C_1 > 0$ tal que para cada $\varepsilon, T, L \in \mathbb{R}^+$, y para cada $M \in \mathbb{R}^*$ con

$$\frac{|M|L}{\varepsilon} \geq C_1 : \quad (3.44)$$

- Si $M > 0$ y

$$T \geq a \frac{L}{M}, \quad (3.45)$$

entonces

$$C(\varepsilon, T, L, M) \leq C_1 \varepsilon^{-3/2} L^{1/2} M \exp \left(-\frac{L^2}{2\varepsilon T} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{2TM}{3L} - 1 \right)^2 - A \right) \right). \quad (3.46)$$

- Si $M < 0$ y

$$T \geq b \frac{L}{|M|}, \quad (3.47)$$

entonces

$$C(\varepsilon, T, L, M) \leq C_1 \varepsilon^{-1} M^{1/2} \exp \left(-\frac{L^2}{2\varepsilon T} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{2T|M|}{3L} - 1 \right)^2 - B \frac{T|M|}{L} \right) \right). \quad (3.48)$$

Capítulo 4

Costo de la controlabilidad a cero utilizando análisis armónico

En este capítulo analizamos el costo de la controlabilidad uniforme a cero del sistema (3.1)-(3.2), utilizando métodos del análisis complejo de una forma original si se puede decir, ya que la prueba rigurosa de este teorema no está plasmada en ningún lugar. Dicho teorema propuesto por Glass en [11] mejora los tiempos del control propuestos por Coron y Guerrero en el teorema 6. Sin embargo, en dicho artículo no se dan detalles rigurosos de los resultados propuestos por Glass. Así que en este trabajo presentamos de forma rigurosa las pruebas de los resultados de Glass, además hacemos ciertas correcciones y proponer el lema 10, que es clave para la demostración del Teorema 7.

A continuación presentamos el teorema de controlabilidad uniforme a cero para el sistema (3.1)-(3.2).

Teorema 7 Sean $T, L > 0$ y $M \neq 0$ fijas. El sistema (3.1) es uniformemente controlable a cero, en el sentido de que existe una constante $\kappa > 0$ y una constante $C > 0$, tal que para cualquier $y_0 \in L^2(0, L)$ y cualquier $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $u \in L^2(0, T)$ tal que la solución de (3.1) satisface (3.2) y (3.3). Más aún,

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq C \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \|y_0\|_{L^2(0, L)} \quad (4.1)$$

siempre que

$$T > 4.2 \frac{L}{M} \quad \text{cuando } M > 0, \quad (4.2)$$

$$T > 6.1 \frac{L}{M} \quad \text{cuando } M < 0. \quad (4.3)$$

Es conocido que la prueba del teorema 7 es equivalente a establecer una desigualdad de observabilidad para el problema adjunto de (3.1), con las mismas constantes en (4.1), ver

[16] y [21].

El sistema adjunto está dado como sigue

$$\begin{cases} \varphi_t + \varepsilon\varphi_{xx} + M\varphi_x = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ \varphi = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times \{0, L\}, \\ \varphi(t, \cdot) = \varphi_T & \text{si } x \in (0, L). \end{cases} \quad (4.4)$$

Es suficiente mostrar que existen constantes $\kappa, C > 0$, tal que para cualquiera $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi_T \in L^2(0, L)$, se cumple

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0, L)} \leq C \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0, T)}. \quad (4.5)$$

4.1. Diagonalización del operador $-M\partial_x - \varepsilon\partial_{xx}^2$

En adelante consideramos el operador

$$P := -M\partial_x - \varepsilon\partial_{xx}^2. \quad (4.6)$$

De la identidad

$$\partial_{xx}^2 \left(e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}} u \right) = e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}} \left(\partial_{xx}^2 u + \frac{M}{\varepsilon} \partial_x u + \frac{M^2}{4\varepsilon^2} u \right), \quad (4.7)$$

se sigue que el operador P se descompone como sigue

$$P = -\varepsilon e^{\frac{-Mx}{2\varepsilon}} \circ \partial_{xx}^2 \circ e^{\frac{-Mx}{2\varepsilon}} + \frac{M^2}{4\varepsilon} \text{Id}. \quad (4.8)$$

Lo anterior implica que P es diagonalizable en $L^2((0, L); \exp\left(\frac{Mx}{\varepsilon}\right) dx)$, con vectores propios

$$e_k(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \exp\left(-\frac{M}{2\varepsilon}x\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.9)$$

y valores propios correspondientes

$$\lambda_k := \varepsilon \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \frac{M^2}{4\varepsilon}, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

En resumen, la sucesión $\{e_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2((0, L); \exp\left(\frac{Mx}{\varepsilon}\right) dx)$ dotado con producto interior

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L \exp\left(\frac{Mx}{\varepsilon}\right) u(x)v(x) dx. \quad (4.11)$$

4.2. Construcción de la familia biortogonal

La estrategia para probar el Teorema 7 está relacionada con el método de los momentos descrito en la sección 2.2 (para más detalles ver [10]). La idea es construir una familia de funciones en $L^2(0, T)$ biortogonales a la familia de exponenciales

$$t \mapsto \exp(-\lambda_k(T - t)). \quad (4.12)$$

Haciendo el cambio de variable $t \rightarrow T - t$, consideramos la familia de exponenciales

$$t \mapsto \exp(-\lambda_k t). \quad (4.13)$$

Queremos construir una familia adecuada $J_k(z)$ de funciones enteras de tipo exponencial, que satisfagan

$$J_k(-i\lambda_j) = \delta_{jk}, \quad (4.14)$$

donde δ_{jk} es la delta de Kronecker.

Usando el teorema de Paley - Wiener construiremos la familia biortogonal $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, definidas en términos de la transformada inversa de Fourier de las funciones $J_k(z)$. La familia $J_k(z)$ se construye a partir de una función entera que tiene polos simples en $\{-i\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$; dicha función se construye de forma natural utilizando un producto de Weierstrass y la multiplicamos por una función de corrección, para hacer que J_k sea de tipo exponencial con un comportamiento adecuado sobre el eje real.

Es claro que el siguiente producto infinito de Weierstrass

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2}\right) = \frac{\text{sen}(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}} \quad (4.15)$$

es una función entera con ceros simples en $\{k^2; k \in \mathbb{N}\}$. Tomando esta idea introducimos la función Φ , cuyos ceros simples son todos los elementos del conjunto $\{-i\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, es decir

$$\Phi(z) = \frac{\text{sen} \left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{iz - \frac{M^2}{4\varepsilon}} \right)}{\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{iz - \frac{M^2}{4\varepsilon}}}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.16)$$

Se puede ver que Φ es de tipo exponencial y que satisface

$$|\Phi(z)| \leq C(M, \varepsilon) \exp \left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|z|} \right) \quad \text{cuando } |z| \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

La prueba se puede ver en el apéndice C, sección 1).

Un candidato ideal para ser $J_k(z)$, sería la función

$$\frac{\Phi(z)}{\Phi'(-i\lambda_k)(z + i\lambda_k)}, \quad (4.18)$$

sin embargo, se puede probar utilizando el método de Phragmen-Lindelöf que esta función no es acotada en la línea real. Así que no podemos utilizarla directamente para construir la familia de funciones $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Debemos entonces multiplicarla por una función idónea de manera que cumpla las condiciones deseadas.

4.2.1. Multiplicador de Beurling y Malliavin

Seguimos la construcción dada en [4] (también se puede ver Koosis Capítulo X). Fijamos la constante

$$a := \frac{T}{2\pi}, \quad b := \frac{\tilde{L}}{\pi\sqrt{\varepsilon}} \quad (4.19)$$

y a las constantes

$$\tilde{L} := L + \alpha\varepsilon^{1/2} \quad y \quad \hat{L} := L + 2\alpha\varepsilon^{1/2}, \quad (4.20)$$

con α una constante real positiva independiente de ε a escoger después.

Definimos ahora a la función

$$s(t) = at - \frac{\tilde{L}}{\pi\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{t}, \quad (4.21)$$

la cual es creciente para valores de t mayores ó iguales que

$$A := \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\tilde{L}}{T} \right)^2. \quad (4.22)$$

Además $s(t) \geq 0$ para $t \geq B$, donde

$$B := 4A = \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{L}}{T} \right)^2. \quad (4.23)$$

En particular $s(B) = 0$. Consideramos la medida ν en \mathbb{R} dada por

$$\nu(A) = \int_B^\infty \chi_A(t) ds(t) \quad \text{con } A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

donde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es una σ -álgebra de Borel.

Lo anterior se denota por

$$d\nu(t) = \chi_{[B, \infty)}(t) ds(t).$$

Consideramos además la función

$$\nu(t) := \int_0^t d\nu(\eta) = \begin{cases} s(t) & \text{si } t \geq B \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < B \end{cases} \quad (4.24)$$

Dado que $s(t)$ es diferenciable en \mathbb{R}^+ tenemos

$$ds(t) = a dt - \frac{\tilde{L}}{2\pi\sqrt{2\varepsilon}} \frac{dt}{t^{1/2}}.$$

Ahora consideramos la siguiente formula integral, la cual probamos en el apéndice C sección 3. Para $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma = |x|^\gamma \pi \cot \left(\frac{\pi\gamma}{2} \right) \quad \text{con } 0 < \gamma < 2. \quad (4.25)$$

Lo anterior nos permite calcular la siguiente integral de Riemman-Stieltjes

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t) = -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Ahora introducimos los actores principales de nuestra construcción

- Para $z \in \mathbb{C}$ definimos

$$U(z) := \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d\nu(t) = \int_B^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| ds(t). \quad (4.27)$$

- Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, definimos

$$g(z) := \int_0^\infty \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d\nu(t) = \int_B^\infty \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) ds(t). \quad (4.28)$$

Claramente la función $g(z)$ está bien definida en $\mathbb{C}^+ \setminus \mathbb{R}$ cuando consideramos la rama del logaritmo $-\pi < \arg z < \pi$. De la manera usual extendemos la definición de $g(z)$ en $\mathbb{C}^- \setminus \mathbb{R}$.

Ahora discretizamos la medida $d\nu$ tomando la parte entera de $\nu(t)$ y consideramos las correspondientes funciones \tilde{U} y h .

- Para $z \in \mathbb{C}$ ponemos

$$\tilde{U}(z) := \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d[\nu(t)] = \int_B \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d[s(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \log \left| 1 - \frac{z^2}{\mu_k^2} \right|. \quad (4.29)$$

- Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ponemos

$$h(z) := \int_0^\infty \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d[\nu(t)] = \int_B \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d[s(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{\mu_k^2} \right), \quad (4.30)$$

donde $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es el conjunto de discontinuidades de la función $[\nu(t)]$, es decir, $s(\mu_k) = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Las funciones \tilde{U} y h están bien definidas y son convergentes en sus respectivos dominios [ver apéndice C, sección 4].

Claramente

$$U(z) = \operatorname{Re}(g(z)) \quad \text{y} \quad \tilde{U}(z) = \operatorname{Re}(h(z)).$$

La ventaja de \tilde{U} sobre U es que $\exp(h(z))$ es una función entera dada por

$$\exp(h(z)) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_k^2} \right). \quad (4.31)$$

Finalmente consideramos la función multiplicadora

$$f(z) := \exp(h(z - i)). \quad (4.32)$$

Ahora probaremos algunos lemas que serán útiles para obtener ciertas propiedades de f , las cuales son necesarias para construir la función J_k .

Lema 4 *Para $x \in \mathbb{R}$ tenemos que*

$$U(x) \leq -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|} + C_1 aB, \quad (4.33)$$

donde $C_1 > 0$ está dada por

$$C_1 := -\min_{x \in \mathbb{R}} \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}) \approx 2.34 < 2.35. \quad (4.34)$$

Prueba Usando (4.25) y (4.26) tenemos

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t) - \int_0^B \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t) \\ &= -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|} - \int_0^B \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t). \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $\tau = t/B$ en la última integral y notamos que $bB^{1/2} = aB$ por (4.19), para obtener

$$\int_0^B \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t) = aB \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{B^2\tau^2} \right| d(\tau - \sqrt{\tau}) \geq aB \min_{x \in \mathbb{R}} \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{\tau^2} \right| d(\tau - \sqrt{\tau}).$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ en el apéndice C.5 probamos la siguiente igualdad

$$\int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}) = -\pi \sqrt{|x|} + |x| \ln \left| \frac{|x| + 1}{|x| - 1} \right| - \sqrt{|x|} \ln \left| \frac{\sqrt{|x|} + 1}{\sqrt{|x|} - 1} \right| + 2\sqrt{|x|} \arctan(\sqrt{|x|}). \quad (4.35)$$

Por otro lado, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}) = -\frac{\pi}{2} - \ln(2) \approx -2.2639. \quad (4.36)$$

Luego utilizamos MATLAB para obtener el valor mínimo de la función en (4.35).

Lema 5 Para $\text{Im}(z) < 0$ se cumple que

$$U(z) = -\pi a \text{Im}(z) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(z)U(t)}{|z+t|^2} dt \quad (4.37)$$

Prueba Utilizamos el teorema G.1 que se encuentra en la página 47 de [15], el cual reproducimos a continuación.

- **Teorema G.1:** Sea $f(z)$ una función analítica en $\text{Im}(z) > 0$ y en \mathbb{R} . Supongamos

$$\log |f(z)| \leq \mathcal{O}(|z|),$$

para $\text{Im}(z) \geq 0$ y $|z|$ grande, y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Si $f(z)$ no tiene ceros en $\text{Im}(z) > 0$, entonces

$$\log |f(z)| = \mathcal{A} \text{Im}z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}(z) \log^+ |f(t)|}{|z-t|^2} dt,$$

donde

$$\mathcal{A} = \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y}.$$

Aplicamos el resultado anterior a la función $f_\tau(z) := \exp g(-z - i\tau)$, $\text{Im}(z) > 0$ y con $\tau > 0$ suficientemente pequeño. Por un lado tenemos

$$\log |f_\tau(z)| = U(-z - i\tau) = \int_B^\infty \log \left| 1 - \frac{(z + i\tau)^2}{t^2} \right| ds(t) \leq \int_B^\infty \log \left(1 + \frac{|z + i\tau|^2}{t^2} \right) ds(t).$$

Integramos por partes y usamos que

$$-\partial_t \log \left(1 + \frac{|z + i\tau|^2}{t^2} \right) > 0, \quad y \quad s(t) \leq at, \quad \text{para todo } t \geq B,$$

para tener

$$\begin{aligned} \log |f_\tau(z)| &\leq a \int_B^\infty -\partial_t \log \left(1 + \frac{|z + i\tau|^2}{t^2} \right) t dt = 2a \int_B^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{|z + i\tau|} \right)^2 + 1} \\ &= a\pi |z + i\tau| - 2a|z + i\tau| \arctan \left(\frac{B}{|z + i\tau|} \right). \end{aligned}$$

Entonces para $|z|$ suficientemente grande y $\tau > 0$ suficientemente pequeño tenemos

$$\log |f_\tau(z)| \leq \mathcal{O}(|z|).$$

Del lema 4 tenemos $\log^+ |f_\tau(x)| \leq C_1 a B$ para $\tau > 0$ suficientemente pequeño, por lo tanto

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log^+ |f_\tau(x)|}{1+x^2} dx \leq \int_{-\infty}^\infty \frac{C_1 a B}{1+x^2} dx = C_1 a B \pi < \infty.$$

Además

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f_\tau(iy)|}{y} \\ &= \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{U(-i(y + \tau))}{y} \\ &\leq \limsup_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{a\pi |y + \tau|}{y} - \frac{|y + \tau|}{y} \arctan \left(\frac{B}{y + \tau} \right) \right) = a\pi. \end{aligned}$$

Entonces para $\text{Im}(z) > 0$

$$U(-z - i\tau) = \pi a \text{Im}z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}(z)U(-t - i\tau)}{|z - t|^2} dt.$$

Tomando el límite cuando $\tau \rightarrow 0^+$ se obtiene el resultado.

Lema 6 Para $x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$U(x - i) \leq \pi a + C_1 a B - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|}. \quad (4.38)$$

Prueba Por los Lemas 4 y 5, tenemos

$$\begin{aligned} U(x - i) &= \pi a + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(t)}{|(x - i) + t|^2} dt = \pi a + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(t)}{1 + |x + t|^2} dt \\ &\leq \pi a + \frac{C_1 a B}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + |x + t|^2} - \frac{\tilde{L}}{\pi \sqrt{2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1 + |x + t|^2} dt. \end{aligned}$$

Claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + |x + t|^2} = \pi.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1 + |x + t|^2} dt &= \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{-t}}{1 + (x + t)^2} dt + \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{1 + |x + t|^2} dt \\ &= \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2 + 1} - 2x}} + \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}} \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado el método del residuo en el cálculo de las últimas integrales (ver apéndice C sección 7). Observamos que se cumple

$$\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2 + 1} - 2x}} + \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}} \right) \geq \pi \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$-\frac{\tilde{L}}{\pi \sqrt{2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1 + |x + t|^2} dt \leq -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|},$$

de donde se sigue el resultado.

Lema 7 Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\tilde{U}(z) - U(z) = \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d([\nu](t) - \nu(t)) \leq \log \left(\frac{\max(|x|, |y|)}{2|y|} + \frac{|y|}{2 \max(|x|, |y|)} \right) \quad (4.39)$$

Prueba La prueba del lema se encuentra en [15], vol. II, pág. 162.

Lema 8 Denotamos por

$$G(y) := \int_0^1 \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) d(t - \sqrt{t}), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.40)$$

Se satisfacen las siguientes identidades para $y \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) dt = \pi|y|, \quad (4.41)$$

$$\int_0^\infty \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) d\sqrt{t} = \pi\sqrt{2|y|}, \quad (4.42)$$

$$\int_0^B \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) ds(t) = aBG \left(\frac{y}{B} \right). \quad (4.43)$$

Además la función $G(y)$ es estrictamente decreciente en \mathbb{R}^+ .

Prueba Para obtener las fórmulas (4.41) y (4.42) sólo se utiliza integración por partes. Para mostrar (4.43) hacemos el cambio de variable $\tau = t/B$ y usando que $bB^{1/2} = aB$, obtenemos

$$\int_0^B \log \left| 1 + \frac{y^2}{t^2} \right| ds(t) = aB \int_0^1 \log \left| 1 + \frac{(y/B)^2}{\tau^2} \right| d(\tau - \sqrt{\tau}) = aBG \left(\frac{y}{B} \right).$$

Finalmente

$$G'(y) = -2y \int_0^1 \frac{1}{t^2 + y^2} d(\sqrt{t} - t) < 0, \quad y \in \mathbb{R}^+,$$

puesto que $\sqrt{t} - t > 0$, para $t \in (0, 1)$.

Lema 9 Para todo $y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\int_B^\infty \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) d[s(t)] \geq \int_B^\infty \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) ds(t) - \log \left(1 + \frac{y^2}{B^2} \right). \quad (4.44)$$

Prueba Utilizando integración por partes y recordando que $s(B) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_B^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) d([s(t)] - s(t)) &= \int_B^\infty \partial_t \left[\log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) \right] (s(t) - [s(t)]) dt \\ &\geq \int_B^\infty \partial_t \left[\log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) \right] dt = -\log\left(1 + \frac{y^2}{B^2}\right). \end{aligned}$$

La desigualdad se cumple debido a que $0 \leq s(t) - [s(t)] \leq 1$ y $\partial_t \left[\log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) \right] \leq 0$, $t \geq B$, de donde se sigue el resultado.

Proposición 1 La función \tilde{U} dada en (4.29) satisface las siguientes propiedades

$$\tilde{U}(x - i) \leq -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|} + aBC_1 + \log^+(|x|) + \pi a, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.45)$$

$$\tilde{U}(iy) \geq \pi a|y| - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|y|} - \log\left(1 + \frac{y^2}{B^2}\right) - aBG\left(\frac{y}{B}\right) \quad y \in \mathbb{R}^-. \quad (4.46)$$

Prueba Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$A(x) := \frac{\max(|x|, 1)}{2} + \frac{1}{2 \max(|x|, 1)} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{|x|}{2} + \frac{1}{2|x|}, & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \leq \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Entonces $\log(A(x)) \leq \log^+(|x|)$ y por los lemas 6 y 7 se sigue el resultado, ya que $\tilde{U}(x-i) \leq U(x-i) + \log A(x)$.

Usamos el lema 9 con $y \in \mathbb{R}^-$ para obtener

$$\tilde{U}(iy) = \int_B^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) d[s(t)] \geq \int_B^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) ds(t) - \log\left(1 + \frac{y^2}{B^2}\right).$$

Por el lema 8, tenemos

$$\begin{aligned} \int_B^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) ds(t) &= \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) ds(t) - \int_0^B \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) ds(t) \\ &= a \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) dt - \frac{\tilde{L}}{\pi\sqrt{2\varepsilon}} \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) d\sqrt{t} - aBG\left(\frac{y}{B}\right) \\ &= \pi a|y| - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|y|} - aBG\left(\frac{y}{B}\right), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

Lema 10 Para $\text{Im}(z) > 0$ y $\alpha \geq \sqrt{2}$ se satisface

$$\tilde{U}(z - i) \leq a\pi|z| - \frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|z|} + aBC_1 + \pi a.$$

Prueba Mostraremos que $\tilde{U}(z - i)$ satisface las condiciones del teorema G.1 de la página 48. En este caso nuestra función es $f(z) = \exp(h(z - i))$, y se cumple $\log |f(z)| = \tilde{U}(z - i)$.

- Por (4.45) y la integral (C.2) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ f(x)}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{U}(x - i)}{1+x^2} dx \leq \left(-\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} dx + (aBC_1 + a\pi)\pi \\ &\leq \sqrt{2} \left(-\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} + 1 \right) \pi + \pi(aBC_1 + a\pi). \end{aligned}$$

- Calculamos ahora el valor de \mathcal{A} , donde

$$\mathcal{A} = \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y} = \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\tilde{U}(i(y - 1))}{y}.$$

Por el lema 7 y la prueba del lema 5 obtenemos

$$\frac{\tilde{U}(i(y - 1))}{y} \leq \frac{U(i(y - 1))}{y} \leq \frac{a\pi(y - 1)}{y} - \frac{2a(y - 1)}{y} \arctan \left(\frac{B}{y - 1} \right) \text{ entonces } \mathcal{A} \leq a\pi.$$

- Que \tilde{U} es analítica en $\text{Im}(z) > 0$ se debe a (4.31) (ver el apéndice C sección 4),

por lo tanto, para $\text{Im}(z) > 0$ tenemos

$$\tilde{U}(z - i) = a\pi \text{Im}(z) + \frac{\text{Im}(z)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{U}(t - i)}{|z - t|^2} dt.$$

Utilizando (4.45), (C.2) y (4.19) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{U}(t - i)}{|z - t|^2} dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-b + 1)\sqrt{|t|} + aBC_1 + a\pi}{(t - x)^2 + y^2} dt \\ &\leq (-b + 1) \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{|z| + x}} + \frac{1}{\sqrt{|z| - x}} \right) + \frac{\pi}{|y|} (aBC_1 + a\pi), \end{aligned}$$

donde $z = x + iy$.

Por (4.20) y $\alpha \geq \sqrt{2}$ tenemos

$$-b + 1 = -\frac{L + \alpha\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon}} + 1 = -\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} + \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \leq -\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Además

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{|z|+x}} + \frac{1}{\sqrt{|z|-x}} \right) \geq \frac{\pi\sqrt{|z|}}{|y|},$$

Por lo tanto

$$\frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{U}(t-i)}{|z-t|^2} dt \leq -\frac{L\sqrt{|z|}}{\sqrt{2\varepsilon}} + (aBC_1 + a\pi),$$

de donde se sigue el resultado.

Procedemos a la construcción de la familia biortogonal ψ_k .

Para cada $k \in \mathbb{N}$ introducimos la función

$$\tilde{J}_k(z) := \frac{\Phi(z)}{\Phi'(-i\lambda_k)(z+i\lambda_k)} \frac{f(z)}{f(-i\lambda_k)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.47)$$

donde $\Phi(z)$ y $f(z)$ están dadas por (4.16) y (4.32) respectivamente. El siguiente resultado presenta propiedades cualitativas y cuantitativas de \tilde{J}_k .

Proposición 2 Para cada $k \in \mathbb{N}$ la función \tilde{J}_k es una función entera de tipo exponencial πa . Más aún, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño e independiente de k se satisface

$$|\tilde{J}_k(x)| \leq Ck^2 \exp \left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2) \frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon} - \frac{T}{2}\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k} \right) (1+|x|)^{-3/2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.48)$$

donde

$$C_2 := -G(2) \approx 1.97 > 1.95. \quad (4.49)$$

Prueba Notamos que \tilde{J}_k es una función entera dado que Φ sólo tiene ceros de primer orden en $-i\lambda_k$ y f es una función entera con $f(-i\lambda_k) \neq 0$. A partir de (4.17) y el lema 10 se sigue que \tilde{J}_k es de tipo exponencial $\pi a = \frac{T}{2}$.

Procedemos a mostrar (4.48). De (4.16) y C1 del apéndice C tenemos

$$|\Phi(x)| \leq \frac{\exp \left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|} + \frac{L|M|}{2\varepsilon} \right)}{L\varepsilon^{-1/2} \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De (4.45) obtenemos

$$\begin{aligned} |\Phi(x) \exp(\tilde{U}(x-i))| &\leq \frac{\exp \left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} - \frac{\tilde{L}-L}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|} + aBC_1 + \log^+(|x|) + \pi a \right)}{L\varepsilon^{-1/2} \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4}} \\ &\leq e^{\pi a} \frac{\exp \left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + aBC_1 \right)}{L\varepsilon^{-1/2} \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4}}, \end{aligned}$$

donde hemos usados

$$\log^+(|x|) - \frac{\tilde{L} - L}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{|x|} \leq 0 \text{ si } \alpha \geq \sqrt{2}.$$

Por otro lado,

$$|\Phi'(-i\lambda_k)| = \frac{L^2}{2\varepsilon k^2 \pi^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dado que la función $\tilde{U}(iy)$ es decreciente en \mathbb{R}^- tenemos

$$|f(-i\lambda_k)| = \exp(\tilde{U}(-i(1 + \lambda_k))) \geq \exp(\tilde{U}(-i\lambda_k)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

De (4.46) se sigue que

$$|f(-i\lambda_k)| \geq \exp\left(\pi a \lambda_k - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} - \log\left(1 + \frac{\lambda_k^2}{B^2}\right) - aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right)\right).$$

Si $\alpha \geq 6^{1/4}T - L$ entonces $B^2 \geq 24$, por lo tanto $\log(1 + y^2/B^2) \leq \log(1 + y^2/4) \leq \sqrt{|y|}$, así que

$$-\frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} - \log\left(1 + \frac{\lambda_k}{B^2}\right) \geq -\left(1 + \frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \sqrt{\lambda_k} \geq -\frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Obteniendo que

$$|f(-i\lambda_k)| \geq \exp\left(\pi a \lambda_k - \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} - aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right)\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$|\tilde{J}_k(x)| \leq e^{\pi a} \frac{2\varepsilon^{3/2} k^2 \pi^2 \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + aBC_1 - \pi a \lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} + aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right)\right)}{L^2 |x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2}|^{1/4} |x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.50)$$

Ahora fijamos $\alpha \geq \max\{\sqrt{2}, 6^{1/4}T - L\}$. Como $T|M| > 4L$ consideramos $0 < \varepsilon^{1/2} < (T|M| - 4L)/\alpha$.

Dado que $\lambda_k \geq M^2/4\varepsilon$, de (4.23) obtenemos

$$\frac{\lambda_k}{B} \geq \frac{1}{8} \left(\frac{T|M|}{\tilde{L}}\right)^2 \geq 2.$$

Por lo tanto, $G\left(\frac{\lambda_k}{B}\right) \leq G(2) := -C_2$, ya que G es decreciente. Entonces

$$aBC_1 + aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right) \leq aB(C_1 - C_2) = \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon}.$$

Por último, aplicando (C.3) a (4.50) tenemos

$$|\tilde{J}_k(x)| \leq Ck^2 \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon} - \frac{T}{2}\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right)(1 + |x|)^{-3/2},$$

donde $C = 2\pi^2 e^{\pi a} L^{-2}$.

Dado que \tilde{J}_k es una función entera de tipo exponencial $\pi a := T/2$, por el teorema de Paley-Wiener \tilde{J}_k es la extensión analítica de una función $\tilde{\eta} \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[-T/2, T/2]$. Consideramos la siguiente función

$$J_k(z) := \frac{\exp(-i\frac{T}{2}z)}{\exp(-\frac{T}{2}\lambda_k)} \tilde{J}_k(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.51)$$

que es la extensión analítica de la transformada de Fourier de la función

$$\eta_k(x) := \frac{\tilde{\eta}_k(x - T/2)}{\exp(-\frac{T}{2}\lambda_k)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

cuyo soporte está en $[0, T]$.

De (4.48) y (4.51) tenemos la estimación en \mathbb{R} ,

$$|J_k(x)| \leq Ck^2 \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon} + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right)(1 + |x|)^{-3/2}. \quad (4.52)$$

Claramente

$$\int_0^T \eta_k(t) \exp(-\lambda_j t) dt = J_k(-i\lambda_j) = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \quad (4.53)$$

Por la identidad de Parseval y (4.52) obtenemos

$$\|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ck^2 \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon} + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right), \quad (4.54)$$

donde $C = 8\pi^2 e^{\pi a} L^{-2}$.

Finalmente ponemos $\psi_k(t) := \eta_k(T - t)$, entonces ψ_k satisface (4.54) para $k \in \mathbb{N}$ y además

$$\int_0^T \psi_k(t) \exp(-\lambda_j(T - t)) dt = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \quad (4.55)$$

4.2.2. Las cotas para T

Proposición 3 *Existe $\kappa_1 > 0$, tal que*

$$\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{L^2}{T\varepsilon} - T\lambda_k + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k} \leq -\kappa_1\lambda_k \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.56)$$

siempre que $M > 0$ y

$$T > \frac{L}{|M|}c_+ \quad \text{donde } c_+ = 2 + \sqrt{4 + \frac{4}{\pi}(C_1 - C_2)} < 4.2. \quad (4.57)$$

Existe $\kappa_2 > 0$ tal que

$$\frac{L|M|}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{L^2}{T\varepsilon} - T\lambda_k + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k} \leq -\kappa_2\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.58)$$

siempre que $M < 0$ y

$$T > \frac{L}{|M|}c_- \quad \text{donde } c_- = 3 + \sqrt{9 + \frac{4}{\pi}(C_1 - C_2)} < 6.1. \quad (4.59)$$

Prueba *La función $r(x) = -Tx + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{x}$ es decreciente en $[L^2/(4\varepsilon T^2), \infty)$, y $\lambda_k \geq \frac{M^2}{4\varepsilon} \geq \frac{1}{4\varepsilon} \frac{L^2}{T^2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ ya que $T|M| > 4L$, entonces*

$$r(\lambda_k) \leq r\left(\frac{M^2}{4\varepsilon}\right), \quad k \geq 0. \quad (4.60)$$

Ponemos $P(X) = -\frac{M^2}{4}X^2 + L|M|X + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)L^2$, cuyas raíces están dadas por $X = \frac{L}{|M|} \left[2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{\pi}(C_1 - C_2)} \right]$. Consideramos $T > \frac{L}{|M|}c_+$, entonces

$$-\frac{M^2}{4}T^2 + L|M|T + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)L^2 < 0.$$

De esta última desigualdad obtenemos

$$r \left(\frac{M^2}{4\varepsilon} \right) + \frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2) \frac{L^2}{T\varepsilon} < 0,$$

y por (4.60) concluimos

$$\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2) \frac{L^2}{T\varepsilon} - T\lambda_k + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} < 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.61)$$

Como la condición $T|M| > Lc_+$ es abierta, existe $\kappa_1 > 0$ tal que la desigualdad anterior es válida para $T - \kappa_1$ en vez de T , de donde se sigue el resultado.

Para probar (4.58) y (4.59), procedemos de manera similar donde consideramos al polinomio

$$Q(X) = -\frac{M^2}{4}X^2 + \frac{3L|M|}{2}X + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)L^2.$$

4.2.3. Desigualdad de observabilidad

Consideramos la solución φ de (4.4) y escribimos a φ_T en términos de la base (4.9), es decir,

$$\varphi_T = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \quad (4.62)$$

entonces

$$\varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-\lambda_j(T-t)) e_j(x). \quad (4.63)$$

Así, de (4.9) tenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, 0) = \frac{\pi\sqrt{2}}{L^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j j \exp(-\lambda_j(T-t))$$

Multiplicando por ψ_k e integrando en $[0, T]$ tenemos

$$\sqrt{2} \frac{\pi k}{L^{3/2}} c_k = \int_0^T \partial_x \varphi(t, 0) \psi_k(t) dt, \quad (4.64)$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(0, T)$ se sigue que

$$|c_k| \leq \frac{L^{3/2}}{\sqrt{2\pi k}} \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0, T)} \|\psi_k\|_{L^2(0, T)}. \quad (4.65)$$

De (4.63) tenemos

$$\varphi(0, x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-\lambda_j T) e_j(x), \quad (4.66)$$

Por lo tanto

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq C \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \exp(-\lambda_k T) \|e_k\|_{L^2(0,L)} \|\psi_k\|_{L^2(0,T)}. \quad (4.67)$$

Consideramos por separado los casos $M > 0$ y $M < 0$.

Caso 1: Sea $M > 0$. De (4.9) se tiene

$$\|e_k\|_{L^2(0,L)} \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por (4.54), (4.56) y (4.67) obtenemos

$$\begin{aligned} & \|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \\ & \leq C \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon} - T\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right) \\ & \leq C \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2}\lambda_k\right) \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2}\lambda_k + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2 - L^2}{T\varepsilon} + \frac{\hat{L} - L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right). \end{aligned}$$

No es difícil mostrar que existe una constante $\hat{C} > 0$ e independiente de ε tal que

$$-\frac{\kappa_1}{2}\lambda_k + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2 - L^2}{T\varepsilon} + \frac{\hat{L} - L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k} \leq \hat{C} - \frac{\kappa_1}{3}\lambda_k \leq \hat{C} - \frac{\kappa_1}{3} \frac{M^2}{4\varepsilon}.$$

Así

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq C \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2}\lambda_k\right) \exp\left(\hat{C} - \frac{\kappa_1 M^2}{12\varepsilon}\right).$$

Dado que $e^{-x} < 1/x^2$ para $x > 0$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(-\frac{\kappa_1}{2}\lambda_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa_1\pi^2}{2L^2}k^2\right) \leq \frac{4L^4}{\varepsilon^2\kappa_1^2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{4L^4}{\varepsilon^2\kappa_1^2\pi^4} \hat{A}. \quad (4.68)$$

Por lo tanto

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{C(T, L, M)}{\varepsilon^2} \exp\left(\frac{-\kappa}{\varepsilon}\right) \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}.$$

así queda probado el teorema 7 cuando $M > 0$.

Caso 2: Sea $M < 0$. De (4.9) tenemos

$$\|e_k\|_{L^2(0,L)} \leq \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Usando (4.54), (4.58) y (4.67) tenemos

$$\begin{aligned} & \|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \\ & \leq C \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(\frac{L|M|}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2}{T\varepsilon} - T\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right) \\ & \leq C \|\partial_x \varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp\left(-\frac{\kappa_2}{2}\lambda_k\right) \exp\left(-\frac{\kappa_2}{2}\lambda_k + \frac{1}{\pi}(C_1 - C_2)\frac{\tilde{L}^2 - L^2}{T\varepsilon} + \frac{\hat{L} - L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda_k}\right), \end{aligned}$$

y procedemos como en el caso anterior para obtener el resultado.

Capítulo 5

Un límite relativo de la ecuación de transporte-difusión 1D

En este capítulo damos una prueba detallada del principal resultado que se conoce acerca de una cota inferior para el costo de control a cero del problema (3.1)-(3.3) cuando la rapidez $M < 0$. Esta cota es propuesta por Lissy en [19]. La idea central es similar a la del método de los momentos (ver [10]).

5.1. Resultado principal

Fijamos $M < 0$. Recordamos que existe el control óptimo $u \in L^2(0, T)$ que controla uniformemente a cero al sistema (3.4), al tiempo $T > 0$. Es decir, existe la constante óptima $C = C(T; L; M; \varepsilon) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2((0,T);\mathbb{R})} \leq C \|y_0\|_{H^{-1}(0,L)} \quad \text{para todo } y_0 \in H^{-1}(0, L). \quad (5.1)$$

Teorema 8 *Para cada $T, L, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $M < 0$ fijas, existe una constante $\tilde{E} > 0$ tal que la constante C en (5.1) satisface*

$$C \geq \tilde{E} \left(\frac{|M|^3 L^3 + \varepsilon^3}{\varepsilon^3 L^3} \right)^{1/2} \frac{L^2}{2\pi\varepsilon\sqrt{T} \left(1 + \frac{(L|M)^2}{8(\pi\varepsilon)^2} \right)^2} \exp \left(\frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{|M|^2 T}{4\varepsilon} - \frac{\pi^2 \varepsilon T}{L^2} \right). \quad (5.2)$$

Cuando $T < \frac{2\sqrt{2}L}{|M|}$ tenemos que $C = C(T; L; M; \varepsilon)$ explota cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observamos que en el caso de la rapidez positiva no se pueden aplicar las mismas ideas para encontrar una mejor cota que las que se dieron en el capítulo 4.

Prueba Consideramos el operador A definido en (3.11) y notamos que sus autovalores están dados por

$$\mu_k = -\varepsilon \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \frac{M^2}{4\varepsilon}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

con funciones propias correspondientes

$$e_k(x) = \exp\left(\frac{M}{2\varepsilon}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Para el sistema (3.4) en el capítulo 4 estudiamos el sistema adjunto (4.4) y en la sección 4.1.1 al operador P , cuyas funciones propias están dadas en (4.9) con autovalores correspondientes dados en (4.10).

Así para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k(t, x) := \exp\left(-\frac{M}{2\varepsilon}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \exp(\lambda_k t), \quad (5.5)$$

es solución de

$$\begin{cases} \varphi_t + \varepsilon \varphi_{xx} + M \varphi_x = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ \varphi = 0 & \text{si } (t, x) \in (0, T) \times \{0, L\}. \end{cases}$$

Sea $y_0(x)$ la primer eigenfunción de A , es decir

$$y_0(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{Mx}{2\varepsilon}\right), \quad x \in (0, L). \quad (5.6)$$

Ahora estimamos la norma en $H^{-1}(0, L)$. Sea $z \in H_0^1(0, L)$ tal que $z := J(y_0)$, puesto que recordemos que J esta dada en (3.7) y es sobreyectivo, entonces.

$$z_{xx}(x) = -y_0(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{Mx}{2\varepsilon}\right) = -\frac{\exp\left(\left(\frac{i\pi}{L} + \frac{M}{2\varepsilon}\right)x\right)}{2i} + \frac{\exp\left(\left(-\frac{i\pi}{L} + \frac{M}{2\varepsilon}\right)x\right)}{2i}.$$

Por lo tanto,

$$z(x) = -\frac{1}{2i \left(\frac{i\pi}{L} + \frac{M}{2\varepsilon}\right)^2} \exp\left(\left(\frac{i\pi}{L} + \frac{M}{2\varepsilon}\right)x\right) + \frac{1}{2i \left(\frac{i\pi}{L} - \frac{M}{2\varepsilon}\right)^2} \exp\left(-\left(\frac{i\pi}{L} - \frac{M}{2\varepsilon}\right)x\right) + bx + a,$$

donde

$$\begin{cases} a = \frac{\pi|M|}{\varepsilon L} \frac{1}{\left(\frac{M^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{L^2}\right)^2}, \\ b = \frac{\pi M}{\varepsilon L^2} \cdot \frac{1 + \exp\left(\frac{ML}{2\varepsilon}\right)}{\left(\frac{M^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{L^2}\right)^2} = -\frac{a}{L} \left(1 + \exp\left(\frac{ML}{2\varepsilon}\right)\right) \end{cases} \quad (5.7)$$

Sean

$$d := \frac{\pi}{L}, \quad y \quad f := -\frac{M}{2\varepsilon}, \quad (5.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} & \|y_0\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \\ &= \int_0^L z(x)y_0(x)dx \\ &= \int_0^L \left[-\frac{e^{(id-f)x}}{2i(id-f)^2} + \frac{e^{-(id+f)x}}{2i(id+f)^2} + bx + a \right] \left[\frac{e^{(id-f)x}}{2i} - \frac{e^{-(id+f)x}}{2i} \right] dx \\ &= (1 - e^{-2fL}) \frac{f(f^2 - 3d^2)}{4(f^2 + d^2)^3} + \frac{(e^{-2fL} - 1)(f^2 - d^2)}{4f(f^2 + d^2)^2} + 2b \frac{(1 + e^{-fL})fd}{(f^2 + d^2)^2} + a(1 - e^{-fL}) \frac{(1 + e^{-fL})d}{f^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Consideramos $0 \leq e^{-x} \leq 1$ para $x \geq 0$ y desde que $b \leq 0$, y por (5.8) entonces

$$\|y_0\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \leq \frac{2\varepsilon^3|M|^3L^6}{(M^2L^2 + 4\varepsilon^2\pi^2)^3} + \frac{8\varepsilon^5\pi^2L^2}{|M|(M^2L^2 + 4\varepsilon^2\pi^2)^2} + \frac{64\varepsilon^5\pi^2|M|L^4}{(M^2L^2 + 4\varepsilon^2\pi^2)^3}$$

Dado que $0 < \varepsilon \leq 1$ tenemos

$$\|y_0\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \leq \frac{2M^4L^4 + 8M^2L^2\pi^2 + 32\pi^4 + 64\pi^2M^2L^2}{L|M|} \cdot \frac{\varepsilon^3L^3}{(M^2L^2 + 4\varepsilon^2\pi^2)^3}.$$

Notamos que

$$|M|^3L^3 + \varepsilon^3 \leq (M^2L^2 + \varepsilon^2)^3 \leq (M^2L^2 + 4\varepsilon^2\pi^2)^3,$$

entonces existe una constante $E = E(M, L) > 0$ tal que

$$\|y_0\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \leq E \frac{\varepsilon^3L^3}{|M|^3L^3 + \varepsilon^3}. \quad (5.9)$$

Así utilizando (5.1) tenemos

$$\|u(t)\| \leq E \cdot C(T; L; M; \varepsilon) \left(\frac{\varepsilon^3L^3}{|M|^3L^3 + \varepsilon^3} \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ ponemos

$$z_k(t) := J^{-1}(\varphi_k(t, \cdot)). \quad (5.11)$$

Como $\varphi_k(t, \cdot) \in H^3(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ entonces $z_k(t) \in L^2(0, L)$ para $t \in [0, T]$.

Usamos (3.22) y (A.8) con $\tau = T$, para obtener

$$-\langle y_0, z_k(0) \rangle_{H^{-1}(0, L)} = \int_0^T u(t) B^* z_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} -\langle y_0, z_k \rangle_{H^{-1}(0, L)} &= \int_0^L y_0(x) J(J^{-1}\varphi_k(0, x)) dx \\ &= -\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por (3.22)

$$\begin{aligned} \int_0^T u(t) B^* z_k(t) dt &= \int_0^T u(t) \varepsilon J(z_k(t))_x(0) dt \\ &= \int_0^T u(t) \varepsilon \varphi_{kx}(t, 0) dt \\ &= \frac{k\pi\varepsilon}{L} \int_0^T u(t) e^{\lambda_k t} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{k\pi\varepsilon}{L} \int_0^T u(t) e^{\lambda_k t} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Definimos la función

$$\nu(z) := \int_{-T/2}^{T/2} u\left(t + \frac{T}{2}\right) e^{-izt} dt. \quad (5.13)$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = t + T/2$ y usando (5.12) tenemos

$$\begin{aligned} \nu(i\lambda_k) &= e^{-\lambda_k \frac{T}{2}} \int_0^T u(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau \\ &= -\frac{L}{k\pi\varepsilon} e^{-\lambda_k \frac{T}{2}} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Así,

$$\nu(i\lambda_1) = -\frac{L^2}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{\pi^2\varepsilon T}{2L^2} - \frac{M^2 T}{8\varepsilon}\right), \quad (5.14)$$

$$\nu(i\lambda_k) = 0, \quad k \geq 2. \quad (5.15)$$

Dado que $|e^{-izt}| \leq e^{\operatorname{Im}(z)t}$ entonces

$$|\nu(z)| \leq \exp\left(\frac{\operatorname{Im}(z)T}{2}\right) \int_{-T/2}^{T/2} \left|u\left(t + \frac{T}{2}\right)\right| dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Por el cambio de variable $\tau = t + T/2$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (5.1) tenemos

$$\begin{aligned} |\nu(z)| &\leq \exp\left(\frac{\operatorname{Im}(z)T}{2}\right) \int_0^T |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \exp\left(\frac{\operatorname{Im}(z)T}{2}\right) \sqrt{T} \|u\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq C\sqrt{T} \exp\left(\frac{\operatorname{Im}(z)T}{2}\right) \|y_0\|_{H^{-1}(0,L)}. \end{aligned}$$

Por (5.9) tenemos

$$|\nu(z)| \leq E \cdot C\sqrt{T} \left(\frac{\varepsilon^3 L^3}{|M|^3 L^3 + \varepsilon^3}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\operatorname{Im}(z)T}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.16)$$

Por lo tanto ν es una función entera de tipo exponencial $T/2$.

Definimos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(\zeta) := \nu\left(\frac{\zeta}{4\varepsilon}\right) \quad (5.17)$$

y consideramos $b_k := i4\varepsilon\lambda_k$, $k \geq 1$. Por (5.16) es claro que f es de tipo exponencial y

$$|f(\zeta)| \leq E \cdot C\sqrt{T} \left(\frac{\varepsilon^3 L^3}{|M|^3 L^3 + \varepsilon^3}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\operatorname{Im}(\zeta)T}{8\varepsilon}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (5.18)$$

Ahora enunciamos el siguiente resultado sobre la descomposición de una función de tipo exponencial, para aplicarlo a nuestra función f , el cual se puede encontrar en [15] tomo 1, pág. 56.

- Teorema:** Dada $\zeta = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y $g(\zeta)$ una función entera de tipo exponencial tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |g(x)|}{1+x^2} < \infty, \quad (5.19)$$

sea $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ el conjunto de ceros de g en $\operatorname{Im}\zeta > 0$ y supongamos

$$A := \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |g(iy)|}{y} < \infty, \quad (5.20)$$

entonces

$$\log |g(\zeta)| = A \operatorname{Im} \zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \log \left| \frac{1 - \zeta/\alpha_j}{1 - \zeta/\bar{\alpha}_j} \right| + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \zeta \log |g(t)|}{|\zeta - t|^2} dt.$$

Entonces por (5.18) tenemos $\log^+ |f(x)| \leq D$, por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1 + x^2} \leq D\pi$$

donde

$$D = \log^+ \left(E \cdot C\sqrt{T} \left(\frac{\varepsilon^3 L^3}{|M|^3 L^3 + \varepsilon^3} \right)^{1/2} \right).$$

Notamos que $b_k \in \{iy : f(iy) = 0, \text{ con } y > 0\}$, $k \geq 2$, y por (5.18) obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y}, \\ A &\leq \limsup_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{D}{y} + \frac{T}{8\varepsilon} \right) = \frac{T}{8\varepsilon}. \end{aligned}$$

Así que podemos escribir a $\log |f|$ de la siguiente manera

$$\log |f(\zeta)| = A \operatorname{Im}(\zeta) + \sum_{j=1}^{\infty} \log \left| \frac{1 - \zeta/\alpha_j}{1 - \zeta/\bar{\alpha}_j} \right| + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\zeta) \log |f(t)|}{|\zeta - t|^2} dt.$$

Tomamos $\zeta = b_1$ y notamos que $\operatorname{Im}(b_1) = |b_1|$, entonces

$$\log |f(b_1)| = \sum_{j=1}^{\infty} \log \left(\frac{|b_1 - \alpha_j|}{|b_1 - \bar{\alpha}_j|} \right) + \frac{T}{8\varepsilon} |b_1| + \frac{|b_1|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |f(t)|}{t^2 + |b_1|^2} dt. \quad (5.21)$$

Estimamos cada uno de los términos a la derecha de (5.21) comenzando con la serie y mostrando que es convergente. Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se puede probar que se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|} \leq 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) \geq 0. \quad (5.22)$$

Entonces cada cero en el semiplano superior diferente de los ceros del conjunto $\{b_k\}$ se puede remover de la serie, así obtenemos

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{|b_1 - \alpha_k|}{|b_1 - \bar{\alpha}_k|} \right) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \log \left(\frac{|b_1 - b_k|}{|b_1 - \bar{b}_k|} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \log \left(\frac{4\varepsilon^2 \pi^2 (k^2 - 1)}{2M^2 L^2 + 4\varepsilon^2 \pi^2 (k^2 + 1)} \right) \quad (5.23)$$

De las desigualdades

$$4\varepsilon^2\pi^2(k^2 - 1) \leq 4\varepsilon^2\pi^2k^2 \quad \text{y} \quad M^2L^2/2 + 4\varepsilon^2\pi^2k^2 \leq 2M^2L^2 + 4\varepsilon^2\pi^2(k^2 + 1),$$

$$S \leq \sum_{k=2}^{\infty} \log \left(\frac{4\varepsilon^2\pi^2k^2}{M^2L^2/2 + 4\varepsilon^2\pi^2k^2} \right). \quad (5.24)$$

Cuando $a, b \in \mathbb{R}^+$ función $h(x) := \frac{b + ax^2}{ax^2} = 1 + \frac{b}{ax^2} > 1$, h es decreciente, positiva y continua en \mathbb{R}^+ , entonces por el criterio de la integral sabemos que

$$\int_2^{\infty} \log(h(x))dx \quad \text{converge si y sólo si} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \log(h(k)) \quad \text{converge.}$$

Más aún, sabemos que

$$\int_2^{\infty} \log(h(x))dx \leq \sum_{k=2}^{\infty} \log(h(k)).$$

Ponemos $a = 4\varepsilon^2\pi^2$, $b = M^2L^2/2$, entonces

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{4\varepsilon^2\pi^2k^2}{M^2L^2/2 + 4\varepsilon^2\pi^2k^2} \right) \leq \int_2^{\infty} \log \left(\frac{4\varepsilon^2\pi^2x^2}{M^2L^2/2 + 4\varepsilon^2\pi^2x^2} \right) dx \\ &= \frac{|M|L}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_{\frac{2\sqrt{2\varepsilon\pi}}{|M|L}}^{\infty} \log \left(\frac{u^2}{1 + u^2} \right) du, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde hicimos el cambio de variable $u = \frac{\sqrt{2\varepsilon\pi}}{|M|L}x$.

Por integración partes tenemos

$$\begin{aligned} \frac{|M|L}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_{\frac{2\sqrt{2\varepsilon\pi}}{|M|L}}^{\infty} \log \left(\frac{u^2}{1 + u^2} \right) du &= \frac{|M|L}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} \left(u \log \left(\frac{u^2}{1 + u^2} \right) - 2 \tan^{-1}(u) \right) \Big|_{\frac{2\sqrt{2\varepsilon\pi}}{|M|L}}^{\infty} \\ &= -\frac{|M|L}{\sqrt{2\varepsilon}} - 2 \log \left(\frac{8\varepsilon^2\pi^2/M^2L^2}{1 + 8\varepsilon^2\pi^2/M^2L^2} \right) + 2 \frac{|M|L}{\varepsilon\pi\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2\varepsilon\pi}}{|M|L} \right) \end{aligned}$$

Dado que $\tan^{-1}(x)/x \leq 1$ para $x > 0$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log \left(\frac{|b_1 - \alpha_j|}{|b_1 - \bar{\alpha}_j|} \right) \leq -\frac{|M|L}{\sqrt{2\varepsilon}} + 2 \log \left(1 + \frac{M^2L^2}{8\varepsilon^2\pi^2} \right) + 4. \quad (5.26)$$

Ahora estimamos la integral del lado derecho de (5.21), entonces

$$\frac{|b_1|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |f(t)|}{t^2 + |b_1|^2} dt \leq \log \left(E \cdot C\sqrt{T} \left(\frac{\varepsilon^3 L^3}{|M|^3 L^3 + \varepsilon^3} \right)^{1/2} \right). \quad (5.27)$$

por último en (5.21) usamos (5.26) y (5.27) y obtenemos

$$\begin{aligned} & \log \left(\frac{L^2}{2\pi\varepsilon} \right) - \frac{\pi^2\varepsilon T}{2L^2} - \frac{M^2 T}{8\varepsilon} \\ & \leq -\frac{|M|L}{\sqrt{2}\varepsilon} + 2 \log \left(1 + \frac{M^2 L^2}{8\varepsilon^2 \pi^2} \right) + 4 + \log \left(E \cdot C\sqrt{T} \left(\frac{\varepsilon^3 L^3}{|M|^3 L^3 + \varepsilon^3} \right)^{1/2} \right) + \frac{TM^2}{8\varepsilon} + \frac{\varepsilon\pi^2 T}{2L^2}. \end{aligned}$$

Así finalmente tomando la exponencial a ambos lados y despejando se deduce (5.2) donde $\tilde{E} := \frac{e^4}{E}$.

Conclusiones

A continuación presentamos las conclusiones más relevantes de este trabajo de tesis.

- Se ha desarrollado la prueba del teorema 7 de forma rigurosa proponiendo el lema 10 y utilizando herramientas del análisis complejo.
- Las cotas dadas en los capítulos 4 y 5 para la controlabilidad uniforme a cero del sistema (3.1)-(3.2) son las mejores cotas que hasta el momento se conocen y estas se podrían mejorar en un trabajo futuro como motivación para los lectores.
- Para el caso $M > 0$ la mejor cota que se conoce esta dada por el teorema 7, ya que todavía no se ha podido emular un resultado parecido al del teorema 8, debido a que no se puede acotar la norma de y_0 en $H^{-1}(0, L)$ cuando $M > 0$.

Apéndice A

Semigrupos de operadores lineales

En este apéndice mostramos algunos resultados clásicos de semigrupos de operadores lineales que sirven de apoyo a este trabajo. Cabe mencionar que omitimos las pruebas pues no es el objetivo de la tesis ahondar en este campo, es decir, solo hacemos uso de los resultados que se necesitan para aplicarlos a las ecuaciones diferenciales.

Dada un operador lineal continuo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ planteamos el siguiente sistema para $t \geq 0$, con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un vector inicial dado

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \\x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Es conocido que al ser A un operador acotado la solución del problema anterior es de la forma $x(t) = e^{tA}x_0$, donde $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ es convergente para $t \geq 0$.

Ahora ¿qué pasa si A es un operador lineal no acotado definido en un subespacio de un espacio de Hilbert H (ya que el caso acotado en H es similar cuando consideramos el espacio $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$) ¿será que la solución es parecida a la dada para el caso acotado? estudiamos a los operadores lineales densamente definidos, cerrados y disipativos, ya que estos generan semigrupos de operadores fuertemente continuos, los cuales son la herramienta idónea para cuando tenemos operadores no acotados asociados a un sistema de ecuaciones diferenciales.

Sea H un espacio de Hilbert complejo con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $A : H \rightarrow H$ un operador lineal con dominio $D(A) \subseteq H$, tal que A es densamente definido, es decir, $D(A)$ es denso en H .

Definición A1 El operador lineal $A : H \rightarrow H$ es cerrado si el conjunto $\{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ es un subconjunto cerrado en $H \times H$.

Definición A2 El operador lineal A es disipativo si

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \text{para todo } x \in D(A).$$

Definición A3 El adjunto A^* del operador lineal A es un operador lineal dado por

$$\begin{aligned} A^* : D(A^*) \subseteq H &\rightarrow H \\ y &\mapsto A^*y \end{aligned}$$

donde $D(A^*)$ es el conjunto de todos los $y \in H$ tales que el mapeo

$$\begin{aligned} D(A) \subseteq H &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \langle Ax, y \rangle \end{aligned}$$

es continuo; es decir, existe una constante $C > 0$ dependiente de y que satisface $|\langle Ax, y \rangle| \leq C \|x\|$ para todo $x \in D(A)$. Para cada $y \in D(A^*)$, A^*y es el único elemento de H que cumple $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ para todo $x \in D(A)$.

Definición A4 Un conjunto S no vacío con una operación binaria cerrada $*$ es llamado un semigrupo, si la operación binaria es asociativa, es decir, para $x, y, z \in S$ se cumple que $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Un ejemplo sencillo sería el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con la operación usual de multiplicación de matrices.

Definición A5 Una familia uni-paramétrica $\mathcal{S} = \{S(t) : H \rightarrow H \mid t \in [0, \infty)\}$ de operadores lineales continuos es un semigrupo de operadores continuos sobre H si

i) $S(0) = \operatorname{Id}$, donde $\operatorname{Id} : H \rightarrow H$ es el operador identidad en H .

ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$, $t_1, t_2 \in (0, \infty)$.

iii) Además decimos que \mathcal{S} es un \mathcal{C}_0 -semigrupo o un semigrupo de operadores lineales fuertemente continuos sobre H si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x \quad \text{para todo } x \in H.$$

Denotamos por $\mathcal{L}(H)$ al espacio de operadores lineales continuos en H dotado con la norma de operador $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)}$.

Teorema A.6 Sea $\{S(t) : H \rightarrow H \mid t \in [0, \infty)\}$ una familia de operadores lineales fuertemente continua, entonces existe $C > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Ce^{\lambda t} \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Teorema A.7 Sea $\mathcal{S} = \{S(t) : H \rightarrow H \mid t \in [0, \infty)\}$ un \mathcal{C}_0 -semigrupo. Entonces el generador infinitesimal de \mathcal{S} es un operador lineal $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ densamente definido y cerrado, tal que

$$D(A) := \left\{ x \in H : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \text{ y } Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A).$$

Si ponemos $x(t) = S(t)x_0$ con $x_0 \in H$, entonces $x(t) \in C([0, \infty); H)$; más aún, si $x_0 \in D(A)$ entonces $x \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H)$ y satisface

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(x(t)), \quad t \in [0, \infty), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Además el conjunto de operadores adjuntos $\{S(t)^* \mid t \in [0, \infty)\}$ de \mathcal{S} es un \mathcal{C}_0 -semigrupo con generador infinitesimal A^* , donde A^* es el adjunto de A .

Notamos que el teorema anterior nos dice que si tenemos un \mathcal{C}_0 -semigrupo y calculamos su operador infinitesimal, entonces el semigrupo proporciona la solución del sistema (A.1). En la práctica, por lo general nos dan el sistema asociado con el operador A , entonces nos preguntamos si existe un \mathcal{C}_0 -semigrupo cuyo generador infinitesimal coincida con A . En este sentido el teorema de *Hille – Yosida* nos dice cuando un operador lineal A es el generador infinitesimal de un \mathcal{C}_0 -semigrupo. Nos enfocaremos en el resultado de Lumer-Phillips para operadores densamente definidos, cerrados y disipativos que mencionamos a continuación.

Teorema A.8 Sea A un operador densamente definido y cerrado, tal que tanto A como A^* son disipativos. Entonces A es el generador infinitesimal de un \mathcal{C}_0 -semigrupo y para cada $x_0 \in D(A)$, existe una única (solución) $x \in C^1([0, \infty); H) \cap C^0([0, \infty); D(A))$ tal que

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t), \quad t \in [0, \infty), \\ x(0) &= x_0 \quad . \end{aligned}$$

además $\|x(t)\| \leq \|x_0\|$ para todo $t \in [0, \infty)$ y $\left\| \frac{dx}{dt}(t) \right\| = \|Ax(t)\| \leq \|Ax_0\|$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Ahora enunciaremos un resultado que resuelve el problema de Cauchy no homogéneo ([8]).

Teorema A.9: Sea A un operador lineal densamente definido y cerrado. Si A y A^* son disipativos, entonces para cada $x_0 \in D(A)$, $T \in [0, \infty)$, y $f \in C^1([0, T]; H)$, existe una única (solución) $x \in C^1([0, T]; H) \cap C^0([0, T]; D(A))$ del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

dada por

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Al espacio de Hilbert U dotado con el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$, lo llamaremos el espacio de controles, es decir, $u \in L^2((0, T); U)$ será una función de control para cierto problema de Cauchy definido más adelante.

Para el operador adjunto A^* de A , dotamos a $D(A^*)$ con el producto interior

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{D(A^*)} := \langle z_1, z_2 \rangle_H + \langle A^*z_1, A^*z_2 \rangle_H, \quad \text{con } z_1, z_2 \in D(A^*).$$

Entonces $D(A^*)$ con este producto es espacio de Hilbert e induce la norma

$$\|z\|_{D(A^*)} := \|z\|_H + \|A^*z\|_H.$$

Sea $D(A^*)'$ el espacio dual normado de $D(A^*)$ con espacio pivote H , es decir, $D(A^*) \subset H \subset D(A^*)'$. Consideramos el operador lineal $B : U \rightarrow D(A^*)$ que satisface las siguientes condiciones

(a) Existe una constante $C > 0$, tal que

$$|(Bu)z| \leq C \|u\|_U \|z\|_{D(A^*)} \quad \text{para todo } u \in U, z \in D(A^*). \quad (\text{A.2})$$

(b) Para todo $T > 0$ existe $C_T > 0$ tal que se cumple la siguiente condición de regularidad

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*z\|_U^2 \leq C_T \|z\|_H^2 \quad \text{para todo } z \in D(A^*), \quad (\text{A.3})$$

donde $B^* : D(A^*) \rightarrow U$ es el operador adjunto de B , es decir,

$$\langle Bu, g \rangle = \langle u, B^*g \rangle, \quad g \in D(A^*), u \in U. \quad (\text{A.4})$$

(c) Dado que $S^*(t), t \in [0, \infty)$ es una familia de semigrupos fuertemente continua se puede probar que (A.3) es equivalente a la existencia de algún $T > 0$ y una constante $C_T > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*z\|_U^2 \leq C_T \|z\|_H \quad \text{para todo } z \in D(A^*). \quad (\text{A.5})$$

Definición A.10 Para $T > 0$, $y_0 \in H$, y $u \in L^2((0, T); U)$ consideramos el siguiente problema de Cauchy para los operadores A y B ,

$$\dot{y} = Ay + Bu(t), \quad t \in (0, T), \quad (\text{A.6})$$

$$y(0) = y_0. \quad (\text{A.7})$$

Ahora presentamos la motivación para la definición de solución del sistema (A.6)-(A.7). Sea $\tau \in [0, T]$ y $\phi : [0, T] \rightarrow H$ una función diferenciable, si tomamos el productor interior en H de (A.6) con ϕ e integramos sobre $[0, \tau]$ tenemos

$$\langle y(\tau), \phi(\tau) \rangle_H - \langle y_0, \phi(0) \rangle_H - \int_0^\tau \langle y(t), \dot{\phi}(t) + A^*\phi(t) \rangle_H dt = \int_0^\tau \langle u(t), B^*\phi(t) \rangle_U dt$$

Ponemos $\phi(t) := S(\tau - t)^*z_T$ para cada $z_T \in H$. Es claro que $\dot{\phi}(t) + A^*\phi(t) = 0$. Entonces definimos la solución del problema de Cauchy (A.6)-(A.7) como sigue.

Definición A.11 Sean $T > 0$, $y_0 \in H$ y $u \in L^2((0, T); U)$. Una solución para el problema de Cauchy (A.6)-(A.7) es una función $y \in C^0([0, T]; H)$ tal que

$$\langle y(\tau), \phi(\tau) \rangle_H - \langle y_0, \phi(0) \rangle_H = \int_0^\tau \langle u(t), B^*S(\tau - t)z_T \rangle_U dt \quad (\text{A.8})$$

para cualesquiera $\tau \in [0, T]$, $z_T \in H$.

Por la propiedad de regularidad del operador B , el lado derecho de la igualdad (A.8) esta bien definido.

Teorema A.12 Fijamos $T > 0$. Para cualesquiera $y_0 \in H$ y $u \in L^2((0, T); U)$, el problema de Cauchy (A.6)-(A.7) tiene una única solución y . Más aún, existe una constante $C =$

$C(T) > 0$, independiente de y_0 y u , tal que

$$\|y(\tau)\|_H \leq C \left[\|y_0\|_H + \|u\|_{L^2((0,T);U)} \right] \quad \text{para todo } \tau \in [0, T] \quad (\text{A.9})$$

Para el sistema (A.6) el concepto de control es el siguiente:

Dadas $y_0, y_1 \in H$, decimos que (A.6) es controlable desde el estado inicial y_0 al estado final y_1 si existe un control $u \in L^2((0, T); U)$ tal que la solución y del sistema (A.6)-(A.7) satisface $y(T) = y_1$. Además se dice que es controlable a cero si $y(T) = 0$.

Teorema A.13 Fijamos $T > 0$. El sistema (A.6) es controlable a cero al tiempo T si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*z\|_U^2 dt \geq c \|S(T)^*z\|_H. \quad (\text{A.10})$$

Para mayores detalles la prueba de los resultados anteriores se pueden encontrar en [8, 18, 20].

Apéndice B

Ciertas propiedades en espacios de Sobolev

En esta sección consideramos al intervalo $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $a < b$, y fijamos $1 \leq p \leq \infty$. Sea $\mathcal{D}(I) := \{\phi \in C^\infty(I) : \text{supp}\phi \subseteq I\} = C_c^\infty(I)$, es decir, consideramos a las funciones de clase C^∞ de soporte compacto en I . A este conjunto también se le conoce como conjunto de funciones de prueba. Por analogía, para $k \in \mathbb{N}$ se define $C_c^k(I) = \{\phi \in C^k(I) : \text{supp}\phi \subseteq I\}$.

El espacio $W^{1,p}(I)$

Definimos al espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ como aquel conjunto de funciones $u \in L^p(I)$ tal que existe $g \in L^p(I)$ que satisface

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)dx = - \int_a^b g(x)\phi(x)dx \text{ para toda } \phi(x) \in C_c^1(I). \quad (\text{B.1})$$

A la función g se le llama la derivada débil de u , además se puede mostrar que g es la única función con la propiedad anterior. Cuando $p = 2$, ponemos

$$H^1(I) := W^{1,2}(I). \quad (\text{B.2})$$

La motivación de la definición anterior es que si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ y $\phi \in C_c^1(I)$, entonces existe $K = [c, d] \subseteq I$ tal que $\text{supp}\phi \subseteq K$, así que por la fórmula de integración por partes se tiene

$$\int_a^b u(x)\phi'(x)dx = u(x)\phi(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)\phi(x)dx = - \int_a^b u'(x)\phi(x)dx.$$

por lo tanto $g \equiv u'$ (aquí u' es la derivada en el sentido usual).

Se tienen las siguientes propiedades de los espacios de Sobolev

P.1) $W^{1,p}(I)$ es un subespacio vectorial de $L^p(I)$.

P.2) Si $u, v \in W^{1,p}(I)$, entonces $(cu + v)' = cu' + v'$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

P.3) $W^{1,p}$ es un espacio de Banach dotado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}.$$

P.4) $H^1(I)$ es un espacio de Hilbert dotado con el producto interior

$$\langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)}, \quad (\text{B.3})$$

el cual induce la norma

$$\|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}. \quad (\text{B.4})$$

P.5) Los espacios $W^{1,p}$ son separables para $1 \leq p < \infty$ y son reflexivos para $1 < p < \infty$.

P.6) Si $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $W^{1,p}(I)$ convergente a $u \in L^p(I)$ y además $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también converge en $L^p(I)$, entonces $u \in W^{1,p}(I)$ y $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a u con la norma dada para $W^{1,p}(I)$.

P.7) Si $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces existe $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\{u_n|_I\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a u en $W^{1,p}(I)$.

Lema B.1: Existe una constante $C > 0$ que sólo depende de $|I|$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)},$$

para todo $u \in W^{1,p}(I)$ y para todo $1 \leq p \leq \infty$. Es decir $W^{1,p}(I) \subseteq L^\infty(I)$.

Teorema de la derivada producto y la formula de integración por partes B.2:

Dadas $u, v \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ fijo. Entonces $uv \in W^{1,p}(I)$ y

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (\text{B.5})$$

Además se verifica la fórmula de integración por partes

$$\int_c^d u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)|_c^d - \int_c^d u(x)v'(x)dx \text{ para todo } c, d \in [a, b]. \quad (\text{B.6})$$

Prueba.

Consideramos primero el caso $1 \leq p < \infty$. Por el lema B.1 $u \in L^\infty(I)$, así que $uv \in L^p(I)$. Ahora por la propiedad P.7 existen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que $u_n|_I \rightarrow u, v_n|_I \rightarrow v$ en $W^{1,p}(I)$. Así tenemos que $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ en $L^\infty(I)$, por lo tanto $u_n v_n \rightarrow uv$ cuando $n \rightarrow \infty$ tanto en $L^\infty(I)$ como en $L^p(I)$.

Entonces

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \rightarrow u' v + u v' \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

en $L^p(I)$ y por P.6 se obtiene que $uv \in W^{1,p}(I)$. Para (B.6) sólo integramos (B.5).

En el caso $p = \infty$ podemos encontrar una prueba detallada en [6, 17].

El espacio $W_0^{1,p}(I)$

Para $1 \leq p < \infty$. Se define a $W_0^{1,p}$ como la cerradura de $C_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$.

En particular

$$H_0^1(I) := W_0^{1,2}(I). \tag{B.7}$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de estos espacios.

- $W_0^{1,p}(I)$ con la norma inducida por $W^{1,p}$ es un espacio de Banach separable y es reflexivo para $1 < p < \infty$.
- $H_0^1(I)$ es un espacio de Hilbert separable.
- $\overline{\mathcal{D}(I)} = W_0^{1,p}(I)$.
- Si $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$ entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$.
- Si $u \in W^{1,p}(I)$ entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si $u \equiv 0$ sobre ∂I .

Lema B.3: Si I es acotado, existe $C > 0$ que depende sólo de $|I|$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p(I)} \text{ para todo } u \in W_0^p(I). \tag{B.8}$$

Prueba Fijamos $u \in \mathcal{D}(I), x \in (a, b)$ y $q = p/(p - 1)$. Entonces

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(\tau) d\tau \right| \leq (x - a)^{1/q} \|u'\|_{L^p(I)}$$

por lo tanto

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq \frac{b - a}{p^{1/p}} \|u'\|_{L^p(I)}.$$

El Lema B.3 nos indica que la norma inducida por $W^{1,p}(I)$ para el subespacio $W_0^{1,p}(I)$ es equivalente a la norma

$$\|u\|_* = \|u'\|_{L^p(I)} \quad \text{para } u \in W_0^p(I). \quad (\text{B.9})$$

Así $H_0^1(I)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle u', v' \rangle_{L^2(I)}, \quad (\text{B.10})$$

el cual induce una norma equivalente a la norma heredada como subespacio de $H^1(I)$.

El espacio dual de $H_0^1(I)$.

Denotamos al espacio dual de $H_0^1(I)$ como $H^{-1}(I)$ y tenemos las siguientes inclusiones

$$H_0^1(I) \subset L^2(I) \subset H^{-1}(I).$$

Se puede ver que cada $f \in L^2(I)$ induce una distribución identificada por la misma f como sigue

$$f(\alpha) := \langle f, \alpha \rangle_{L^2(I)} = \int_a^b f(x)\alpha(x)dx \quad \text{para todo } \alpha \in L^2(I),$$

es decir, $L^2(I) \subset \mathcal{D}'(I)$. Además en el conjunto de distribuciones se cumple la siguiente propiedad

$$\langle g, \alpha_x \rangle = -\langle g_x, \alpha \rangle \quad \text{para todo } g \in \mathcal{D}'(I), \alpha \in \mathcal{D}(I).$$

Además al ser $\mathcal{D}(I)$ denso en $H_0^1(I)$ se puede probar que

$$\langle g, \alpha_x \rangle = -\langle g_x, \alpha \rangle \quad \text{para todo } g \in \mathcal{D}'(I), \alpha \in H_0^1(I). \quad (\text{B.11})$$

Por el teorema de representación de Riesz para $f \in H^{-1}(I)$ existe un único $\alpha \in H_0^1(I)$ tal que

$$f(\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_{H_0^1(I)} \quad \text{para todo } \beta \in H_0^1(I).$$

Además al pensar a α como una distribución, para $\beta \in H_0^1(I)$ utilizando (B.10) y (B.11) tenemos

$$f(\beta) = \langle \alpha_x, \beta_x \rangle_{L^2(I)} = -\langle \alpha_{xx}, \beta \rangle = -\alpha_{xx}(\beta),$$

esto último nos permite identificar de manera única a f con $-\alpha_{xx}$.

Todos los resultados se encuentran en [6] y [17].

Apéndice C

Algunos resultados de análisis armónico y algunas integrales complejas

C.1) La función $\Phi(z)$ es de tipo exponencial.

Para $w \in \mathbb{C}$ se cumple

$$|\operatorname{sen}(w)|^2 = \cosh^2(\operatorname{Im}(w)) - \cos^2(\operatorname{Re}(w)) \leq \exp(2|\operatorname{Im}(w)|). \quad (\text{C.1})$$

Si $\operatorname{Re}(w) > 0$, ponemos $w = re^{i\theta}$ con $r = |w|$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces $w^{1/2} = \pm r^{1/2}e^{i\theta/2}$, por lo tanto

$$|\operatorname{Im}(w^{1/2})| = r^{1/2} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |w|^{1/2}.$$

De (C.1) se tiene

$$|\operatorname{sen} w^{1/2}| \leq \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |w|^{1/2} \right).$$

Aplicamos lo anterior a $w = \frac{L^2}{\varepsilon} \left(iz - \frac{M^2}{4\varepsilon} \right)$ con $\operatorname{Im}(z) < 0$, así que

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{iz - \frac{M^2}{4\varepsilon}} \right) \right| &\leq \exp \left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(|z| + \frac{M^2}{4\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{L|M|}{2\sqrt{2\varepsilon}} \right) \exp \left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|z|} \right). \end{aligned}$$

De manera similar se prueba la desigualdad anterior con $\operatorname{Im}(z) > 0$. Para $\varepsilon > 0$ se sigue que

$$|\Phi(z)| \leq C(M, \varepsilon) \exp \left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|z|} \right) \text{ cuando } |z| \rightarrow \infty$$

ya que $\left| iz - \frac{M^2}{4\varepsilon} \right|^{1/2} \rightarrow \infty$ cuando $|z| \rightarrow \infty$.

C.2 Cálculo del valor principal de la integral $\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{u-1} du$ con $0 < a < 1$.

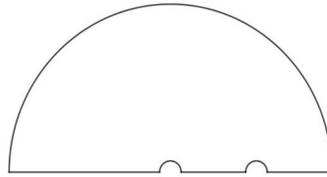
Observamos

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{u-1} du = \int_0^\infty u^a R(u) du, \text{ donde } R(u) = \frac{1}{u(u-1)}.$$

Notamos que $R(u)$ tiene polos simples en 0 y 1, entonces podemos seguir [1]. Comenzamos con el cambio de variable $u = t^2$ el cual transforma a la integral en

$$2 \int_0^\infty t^{2a+1} R(t^2) dt.$$

Para la función z^{2a} escogemos la rama donde el argumento vive entre $-\pi a$ y $3\pi a$; la función está bien definida y es analítica en la región que se obtiene de omitir el eje imaginario negativo lo cual nos permite aplicar el teorema de los residuos a la función $z^{2a+1} R(z^2)$ en la región semicircular centrada en el origen que rodea a los puntos $z = 0$ y $z = 1$.



Se puede probar que la integral sobre los semicírculos tienden a cero cuando el radio del semicírculo grande tiende a ∞ y los radios de los semicírculos pequeños tienden a cero.

Entonces tenemos

$$\int_{-\infty}^\infty z^{2a+1} R(z^2) dz = \int_0^\infty (z^{2a+1} + (-z)^{2a+1}) R(z^2) dz,$$

no obstante, $(-z)^{2a} = e^{2i\pi a} z^{2a}$, entonces

$$(1 - e^{2i\pi a}) \int_0^\infty z^{2a+1} R(z^2) dz = \int_{-\infty}^\infty z^{2a+1} R(z^2) dz$$

Para la integral de la derecha se requiere determinar los residuos de $z^{2a+1} R(z^2)$ en el semiplano superior complejo. Estos son los mismos que los residuos de $z^a R(z)$ en todo el plano complejo, es decir,

$$(1 - e^{2i\pi a}) \int_0^\infty z^{2a+1} R(z^2) dz = \frac{i\pi}{2} (1 + e^{2i\pi a}),$$

de donde obtenemos que

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{u-1} du = -\pi \cot(a\pi).$$

C.3 La formula integral (4.25).

Para $x \in \mathbb{R}$ probamos la siguiente fórmula integral:

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma = |x|^\gamma \pi \cot \left(\frac{\pi\gamma}{2} \right) \quad \text{para } 0 < \gamma < 2.$$

Fijamos $x > 0$, para $t > 0$ tenemos

$$\left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| < 1 \quad \text{si y sólo si } t > \frac{x}{\sqrt{2}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma &= \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma + \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma \\ &= I(x) + J(x). \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) dt^\gamma = t^\gamma \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) \Big|_{t=0}^{t=x/\sqrt{2}} + \int_0^{x/\sqrt{2}} \frac{t^{\gamma-1}}{x^2 - t^2} dt \\ &\leq \frac{2}{x^2} \int_0^{x/\sqrt{2}} t^{\gamma-1} dt = \gamma^{-1} 2^{1-\gamma/2} x^{\gamma-2}, \end{aligned}$$

donde usamos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\gamma \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) = 0$ cuando $\gamma > 0$, $x > 0$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} -J(x) &= - \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^x \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) dt^\gamma - \int_x^\infty \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) dt^\gamma \\ &= \int_{x/\sqrt{2}}^x \log \left(\frac{t^2}{x^2 - t^2} \right) \gamma t^{\gamma-1} dt + \int_x^\infty \log \left(\frac{t^2}{t^2 - x^2} \right) \gamma t^{\gamma-1} dt \\ &\leq 2C_\gamma(x) \int_{x/\sqrt{2}}^x \frac{t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + \int_x^{2x} \log \left(\frac{t^2}{t^2 - x^2} \right) \gamma t^{\gamma-1} dt + \int_{2x}^\infty \log \left(\frac{t^2}{t^2 - x^2} \right) \gamma t^{\gamma-1} dt \\ &\leq \sqrt{2}C_\gamma(x)x + 2\sqrt{3}D_\gamma(x)x - (2x)^\gamma \log(4/3) + 2x^2 \int_{2x}^\infty \frac{t^{\gamma-1}}{t^2 - x^2} dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado integración por partes,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\gamma \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\gamma} \frac{t^\gamma}{t^2 - x^2} = 0,$$

con $C_\gamma(x) = \gamma x^{\gamma-1} \max\{2^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}, 1\}$, $D_\gamma(x) = \gamma x^{\gamma-1} \max\{2^{\gamma-1}, 1\}$.

Ahora calculamos **su valor principal** para el caso $x > 0$.

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{x-\varepsilon} \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma + \int_{x+\varepsilon}^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma \right).$$

Aplicando integración por partes a la primera integral del lado derecho tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{x-\varepsilon} \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma &= t^\gamma \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) \Big|_0^{x-\varepsilon} - \int_0^{x-\varepsilon} \frac{2x^2 t^{-3}}{1 - \frac{x^2}{t^2}} t^\gamma dt \\ &= t^\gamma \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) \Big|_0^{x-\varepsilon} + |x|^\gamma \int_{\frac{x^2}{(x-\varepsilon)^2}}^\infty \frac{u^{-\gamma/2}}{u-1} du. \end{aligned}$$

De manera análoga tenemos

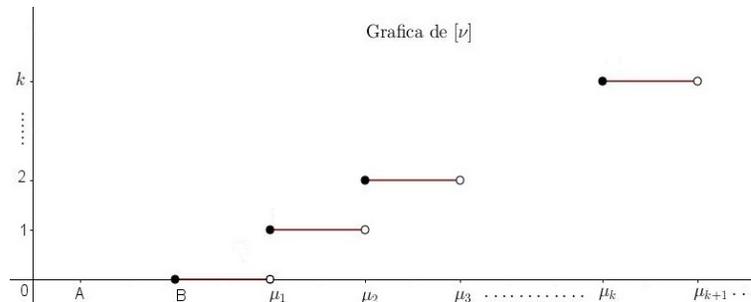
$$\int_{x+\varepsilon}^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt = \lim_{A \rightarrow \infty} t^\gamma \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) \Big|_{x+\varepsilon}^A + |x|^\gamma \int_0^{\frac{x^2}{(x+\varepsilon)^2}} \frac{u^{-\gamma/2}}{u-1} du.$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^\gamma \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) - \lim_{t \rightarrow 0} t^\gamma \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log \frac{\left(\frac{x^2}{(x-\varepsilon)^2} - 1 \right)^{(x-\varepsilon)^\gamma}}{\left(1 - \frac{x^2}{(x+\varepsilon)^2} \right)^{(x+\varepsilon)^\gamma}} \\ &+ |x|^\gamma \int_0^\infty \frac{u^{-\gamma/2}}{u-1} du \\ &= |x|^\gamma \int_0^\infty \frac{u^{-\gamma/2}}{u-1} du = |x|^\gamma \pi \cot \left(\frac{\pi\gamma}{2} \right) \text{ con } 0 < \gamma < 2 \end{aligned}$$

C.4 Discretización de la medida $d\nu$ y la convergencia de las series que definen a las funciones $\tilde{U}(z)$ y $h(z)$.

Dada la medida ν en $[B, \infty)$ definida en (4.24), consideramos su parte entera $[\nu(t)]$. Notamos que existe una única sucesión $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $s(\mu_k) = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que la gráfica de $[\nu(t)]$ en el intervalo $[B, \infty)$ se ve como la gráfica de abajo; es obvio que dichos valores μ_k existen ya que $s(B) = 0$, s es continua, es creciente en $[A, \infty)$ y $B = 4A$.



Para mostrar la convergencia de las series que definen a las funciones $\tilde{U}(z)$ y $h(z)$, utilizamos los siguientes resultados.

Lema 1 Si $g(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y para $c \in (a, b)$ consideramos

a la función escalón $F(x) = \begin{cases} m & \text{si } a \leq x < c \\ n & \text{si } c \leq x < b. \end{cases}$

Entonces

$$\int_a^b g(x) dF(x) = (n - m)g(c).$$

Prueba Consideramos una partición finita del intervalo $[a, b]$,

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

y tomamos para dicha partición los valores $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ en la definición de suma de Riemann-Stieltjes respecto la partición P .

Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k-1} < c \leq x_k$, así que

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ n - m & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^n g(c_j)[F(x_j) - F(x_{j-1})] = (n - m)g(c_k), \quad \text{con } c_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Tomando $\|P\| \rightarrow 0$, es claro que $c_k \rightarrow c$ y por la continuidad de g se cumple que $g(c_k) \rightarrow g(c)$, es decir,

$$\int_a^b g(x) dF(x) = (n - m)g(c).$$

Lema 2 Sea $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + a_k)$ converge absolutamente si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

Prueba Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente, entonces $|a_k| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, es decir, para $0 < \delta < 1$ existe $k_0 \in \mathbb{N} \ni |a_k| < \delta$ para todo $k \geq k_0$.

Además sabemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1 + z)}{z} = 1,$$

es decir, para $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que si $|z| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{\log(1+z)}{z} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$(1 - \varepsilon)|z| < |\log(1+z)| < (1 + \varepsilon)|z|.$$

Ponemos $z = a_k$ y sumando desde $k = k_0$ hasta infinito, obtenemos

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |\log(1+a_k)| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|,$$

y notamos que ambas series son convergentes por hipótesis. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\log(1+a_k)| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |\log(1+a_k)| + (1 + \varepsilon)A < \infty.$$

Ahora consideremos a la función

$$h(z) = \int_0^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d[\nu(t)], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Aplicando el lema 1 y observando la gráfica de $[\nu(t)]$ tenemos

$$h(z) = \int_0^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d[\nu(t)] = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_B^A \log \left(1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d[s(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{\mu_k^2} \right).$$

Como $s(\mu_k) = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $a\mu_k \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, así

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} \leq a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq a^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Por el lema 2 la función $h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{\mu_k^2} \right)$ es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{\mu_k^2} \leq a^2 \frac{\pi^2}{6} |z|^2 < \infty, \quad z \in \mathbb{C}.$$

C.5 La formula integral (4.35).

Primero consideraremos el caso cuando $x > 1$, entonces

$$\int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}) = \int_0^1 \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) dt - \int_0^1 \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) d\sqrt{t}.$$

Integramos por partes en la primer integral de la derecha y hacemos el cambio de variable $u^2 = x^2/t^2$ para obtener

$$\int_0^1 \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) dt = t \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) \Big|_{t=0}^{t=1} - x \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \Big|_x^\infty = \log(x^2 - 1) + x \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$

ya que, por la regla de L'Hospital se cumple

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \lim_{u \rightarrow \infty} \log \left| \frac{1/u + 1}{1/u - 1} \right| = 0.$$

En la segunda integral de la derecha integramos por partes y hacemos el cambio de variable $u^4 = x^2/t^2$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) d\sqrt{t} &= t \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) \Big|_{t=0}^{t=1} - \sqrt{x} [\log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - 2 \arctan(u)] \Big|_{u=\sqrt{x}}^\infty \\ &= \log(x^2 - 1) + \pi\sqrt{x} + \sqrt{x} \log \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - 2\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto (4.35) se cumple para $|x| > 1$.

Consideramos $0 < x < 1$ y notamos que la función $\log |1 - x^2/t^2|$ presenta discontinuidad en $t = x$. Es suficiente calcular el valor principal de la integral, puesto que esta es convergente (la convergencia es similar a (4.25)). Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{x-\varepsilon} \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) dt \right] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{x-\varepsilon} \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) d\sqrt{t} + \int_{x+\varepsilon}^1 \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) d\sqrt{t} \right]. \end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{x-\varepsilon} \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) dt \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\log(1 - x^2) + \log \left[\frac{\left(\frac{x^2}{(x-\varepsilon)^2} - 1 \right)^{x-\varepsilon}}{\left(1 - \frac{x^2}{(x+\varepsilon)^2} \right)^{x+\varepsilon}} \right] + x \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + x \log \left| \frac{2x-\varepsilon}{2x+\varepsilon} \right| \right] \\ &= \log(1 - x^2) + x \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right|. \end{aligned}$$

De igual forma tenemos

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{x-\varepsilon} \log \left(\frac{x^2}{t^2} - 1 \right) d\sqrt{t} + \int_{x+\varepsilon}^1 \log \left(1 - \frac{x^2}{t^2} \right) d\sqrt{t} \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\log(1-x^2) + \log \left[\frac{\left(\frac{x^2}{(x-\varepsilon)^2} - 1 \right)^{\sqrt{x-\varepsilon}}}{\left(1 - \frac{x^2}{(x+\varepsilon)^2} \right)^{\sqrt{x+\varepsilon}}} \right] + \sqrt{x} \log \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| - \sqrt{x} \log \left| \frac{(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x-\varepsilon} + \sqrt{x})^2} \right| \right] \\
 &+ \pi\sqrt{x} - 2 \arctan(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{x-\varepsilon}} \right) + 2\sqrt{x} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{x+\varepsilon}} \right) \\
 &= \log(1-x^2) + \pi\sqrt{x} + \sqrt{x} \log \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| - 2\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x}).
 \end{aligned}$$

Por lo que (4.35) se cumple para $|x| < 1$.

C.6 Para $x, y \in \mathbb{R}$ calculamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{(t-x)^2 + y^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(t-x)^2 + y^2} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{-t}}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Realizamos los cálculos sólo para la primer integral de la derecha con $x, y > 0$. Consideramos el cambio de variable $u = \sqrt{t}$. Entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(t-x)^2 + y^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{2u^2}{(u^2-x)^2 + y^2} du.$$

Puesto que el integrando de la integral resultante es par basta con encontrar el valor principal de Cauchy, ya que si este existe entonces la integral converge a dicho valor.

Encontramos las raíces de la función de variable compleja

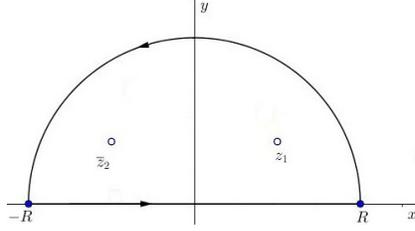
$$f(z) = \frac{2z^2}{(z^2-x)^2 + y^2} = \frac{2z^2}{(z^2-x-iy)(z^2-x+iy)} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}.$$

Si $z^2 = x + iy$, ponemos $z^2 = re^{i\theta} = r[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$ y $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ para obtener que las raíces de $z^2 = x + iy$ están dadas por

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{|z|+x} + i\sqrt{|z|-x} \right] \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{|z|+x} + i\sqrt{|z|-x} \right],$$

tomando los conjugados de z_1 y z_2 se tiene que \bar{z}_1 y \bar{z}_2 son las raíces de $z^2 = x - iy$.

Para el cálculo de la integral consideramos el siguiente contorno semicircular definido por $|z| = R$ con $R > 0$ suficientemente grande para que en el interior estén z_1 y \bar{z}_2



Entonces

$$\int_{-R}^R \frac{\sqrt{t}}{(t-x)^2 + y^2} dt + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z)].$$

Tenemos que

- $\text{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_1)(z_1 - \bar{z}_2)} = \frac{z_1}{2i\sqrt{|z_1 - x|}\sqrt{|z_1 + x|}}.$
- $\text{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{2\bar{z}_2^2}{(\bar{z}_2 - z_1)(\bar{z}_2 - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)} = -\frac{\bar{z}_2}{2i\sqrt{|z_2 - x|}\sqrt{|z_2 + x|}}.$

Sabemos que $|z| = R$ en C_R y $(|z|^2 - |x|)^2 - y^2 \leq |(z^2 - x)^2 + y^2|$, entonces

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{2R^2}{(R^2 - |x|)^2 - y^2} \pi R = \frac{2R^3 \pi}{R^4 - 2R^2|x| + |x|^2 - y^2}.$$

Tomando $R \rightarrow \infty$, la integral en el contorno C_R tiende a cero, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(t-x)^2 + y^2} dt = 2\pi i [\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z)] = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\sqrt{|z_1 - x|}}.$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{|z_1 - x|}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

De manera análoga se puede probar que

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{-t}}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{|z_2 + x|}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{|z_1 + x|}} + \frac{1}{\sqrt{|z_2 - x|}} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.2})$$

Tomamos $y = 1$ y x por $-x$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1 + |x + t|^2} dt = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2 + 1} - 2x}} + \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta última expresión nos es de utilidad en el Lema 6 del capítulo 4.

C.7 Desigualdad para (4.49)

Para $M \neq 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \frac{M^2}{4}$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \leq \delta$ tenemos

$$|x^2 + 1|^{1/4} \leq \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4} \quad \text{y} \quad |x^2 + 1|^{1/2} \leq |x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}.$$

De lo anterior se sigue

$$(x^2 + 1)^{3/4} \leq \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4} |x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}.$$

Tenemos que $(x^2 + 1)^{3/4} \leq (|x| + 1)^{3/2}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(x^2 + 1)^{3/4}}{(|x| + 1)^{3/2}} \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Para $x \geq 0$ definimos $f(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/4}}{(x + 1)^{3/2}}$ entonces $f'(x) = \frac{3(x - 1)}{2(x + 1)^{5/2}(x^2 + 1)^{1/4}}$. Notamos que $f(x)$ alcanza su valor mínimo en $x = 1$, es decir, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2^{3/4}}$.

Tomamos $\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces

$$\varepsilon^{3/2}(|x| + 1)^{3/2} \leq |x^2 + 1|^{3/4}.$$

Finalmente si $\varepsilon = \min\{\delta, 1/\sqrt{2}\}$ obtenemos

$$\frac{\varepsilon^{3/2}}{\left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4} |x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}} \leq \frac{1}{(|x| + 1)^{3/2}}. \tag{C.3}$$

Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1979.
- [2] F. Ancona y G. M. Coclite. On the attainable set for temple class system with boundary controls. *SIAM J Control Optim.*, 43(6):2166–2190, 2005.
- [3] F. Ancona y A. Marson. On the boundary control of systems of conservation laws. *SIAM J. Control Optim.*, 36(1):290–312, 1998.
- [4] A Beurling y P Malliavin. On Fourier transforms of measures with compact support. 107:291–309, 1962.
- [5] F. Boyer. In the penalised hum approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems. *ESAIM: Proceedings*, 41:pp. 15–58, 2013. 44 pages.
- [6] H. Brezis. *Analisis funcional, Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial Sa, 2007.
- [7] J.M. Coron. *Control and Nonlinearity*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2007.
- [8] R. F. Curtain, A. J. Pritchard (eds.). *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 8. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1978.
- [9] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [10] H. O. Fattorini y D. L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 43(4):272–292.

-
- [11] O. Glass. A complex-analytic approach to the problem of uniform controllability of a transport equation in the vanishing viscosity limit. 2010.
- [12] O. Glass y S. Guerrero. On the uniform controllability of the burgers equation. *SIAM J. Control Optim.*, 46(4):1211–1238, 2007.
- [13] J.M. Coron, S. Guerrero. Singular optimal control: A linear 1-d parabolic-hyperbolic example, asymptot. *Asymptot*, 44(3,4):237–257, 2005.
- [14] F. John. *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1991.
- [15] P. Koosis. *The Logarithmic Integral, vols I, II*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.12. Cambridge University Press, 1988.
- [16] J. L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1,2, ..*, tomo 8 de *Recherches en mathématiques appliquées*. Masson, 1988.
- [17] R. Dautray, J. L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 2: Functional and Variational Methods*. Springer, 2000.
- [18] R. Dautray, J. L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 5 Evolution Problems I*. Springer, 2000.
- [19] P. Lissy. Explicit lower bounds for the cost of fast controls for some 1-d parabolic or dispersive equations, and a new lower bound concerning the uniform controllability of the 1-d transport–diffusion equation. *Journal of Differential Equations*, 15 November 2015.
- [20] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to PDEs*, tomo 44. 1983.
- [21] D. L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions. *SIAM Review*, 20(4):639–739, 1978.
- [22] S. Kaczmarz, H. Steinhaus. *Theorie der Orthogonalreihen*, tomo IV de *Monografie Matematyczne*. Warsaw-Lwow, 1935.
- [23] F.G. Tricomi. *Equazioni differenziali*. Einaudi, Torino, 1953.
- [24] N. J. Dunford, J. T. Schwartz, W. G. Bade, y R. G. Bartle. *Linear operators*, tomo Part 2 de *Pure and applied mathematics 7*. Interscience Publishers, 1963.