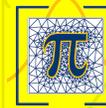




UNAH
UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE HONDURAS



Maestría en
Matemática

BOLETÍN DIVULGATIVO

SEPTIEMBRE 2019

TEMÁTICA:

- SISTEMAS DINÁMICOS
- CAMBIO CLIMÁTICO
- ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
- AUTÓMATAS CELULARES
- TEORÍA DE CONTROL

Presentación

Este documento fué desarrollado por la Coordinación de Investigación y Vinculación de la Maestría en Matemáticas de la UNAH, presenta artículos divulgativos desarrollados por profesionales del Seminario de Investigación de Ingeniería Matemática de la segunda promoción del programa, curso desarrollado durante el segundo período académico del año 2019. Se abarca una temática bastante amplia: ecuaciones diferenciales parciales, sistemas dinámicos, teoría de control, cambio climático y autómatas celulares; se desarrolló una revisión bibliográfica de trabajos pertinentes y se resumió según lo comprendido por cada autor, en algunos casos, se realizó experimentación.

El objetivo principal de desarrollar este documento es que a futuro, en base a la experiencia obtenida y después de tener varias experiencias similares, se transforme en una revista científica de Matemáticas, cuestión que requiere de mucho trabajo por parte del equipo de profesores investigadores del programa y otros colaboradores externos. Además, es una muestra de que en el programa se está desarrollando en los estudiantes un espíritu investigador, se espera que estos trabajos sean la base teórica o un experimento para el desarrollo de las tesis de grado por parte de los maestrantes.

Todas las revisiones bibliográficas y temas aquí presentados se encasillan dentro de las líneas de investigación de la UNAH, entre los temas prioritarios abarcados se encuentran: ciencia, cambio climático y vulnerabilidad, productividad, infraestructura y desarrollo territorial. Esto evidencia que el programa está sùmamente interesado en colaborar con las prioridades investigativas de la universidad y mantiene un compromiso con vincularse con la sociedad.

Septiembre del año 2019, Ciudad Universitaria

Tegucigalpa, M.D.C., Honduras

© Maestría en Matemáticas - UNAH
Edificio F1, Segundo Piso, Ciudad Universitaria
Tegucigalpa, M.D.C. Honduras.
<https://mm.unah.edu.hn/>
maestria.matematica@unah.edu.hn
Tel. 2216-3000 Ext. 100647

Contenido

1. Análisis de estabilidad del modelo Fitzhugh-Nagumo aplicado en la formación de patrones de Turing - Diana K. Meza(p. 1 - 14)
2. Métodos numéricos para la ecuación de Poisson - Vrayan S. Ayala(p. 15 - 23)
3. Breve estudio de las funciones de Green - Armando J. Ramos(p. 24 - 32)
4. Modelo de transferencia de calor en un colector solar - Oswaldo E. Cubas(p. 33 - 45)
5. Efecto de las inhomogeneidades espaciales en la sesibilidad de la concentración de carbono por actividad antropogénica - Myrian S. González(p. 46 - 56)
6. Teoría de control óptimo: una revisión - Aner N. Godoy(p. 57 - 75)
7. Criticalidad auto-organizada: el modelo BTW - Darwin E. Quiroz(p. 76 - 84)

**ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO
FITZHUGH-NAGUMO
APLICADO EN LA FORMACIÓN DE PATRONES DE TURING**

DIANA KAROLINA MEZA ZEPEDA

ABSTRACT. En este artículo se muestran los resultados del análisis de distintos trabajos, sobre el estudio de la estabilidad en puntos de equilibrio en sistemas reacción difusión del tipo FitzHugh-Nagumo (FHN), utilizado en la generación de patrones de Turing en dos dimensiones. Se muestra que la selección de los valores iniciales de las variables involucradas en dicho sistema, tienen significancia para poder obtener ciertos tipos de bifurcaciones, las cuales generan cambios en los patrones obtenidos. Mediante la aplicación de la teoría de sistemas dinámicos, es posible encontrar los puntos fijos de un sistema FHN, estos a su vez se analizan más a fondo por varios autores, para poder asegurar si la estabilidad de los mismos persiste en el tiempo, a pesar de las perturbaciones que el sistema pueda sufrir. Otro aspecto de interés es saber qué ocurre en esos puntos de equilibrio cuando se incluye en el modelo una función de crecimiento de dominio.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de los sistemas dinámicos es de suma importancia encontrar los valores de parámetros del sistema que influyan en comportamientos estables o inestables, lo que es imprescindible para hacer valoraciones sobre el mismo, puesto que la estabilidad representa la habilidad para retornar al estado de equilibrio, después de los cambios o perturbaciones temporales, según factores externos e internos. Estos conceptos referentes a la Teoría de la Estabilidad, fueron planteados inicialmente por el matemático Lyapunov, en [11] se muestran los teoremas y métodos, para el cálculo de puntos de equilibrio, en el caso de sistemas no lineales, se puede hacer la *linealización de Lyapunov*.

En algunos seres vivos es posible apreciar diferentes diseños en su piel, ese tipo de diseños llamó la atención del matemático Turing, quien los estudió y pudo conocer que los mismos se pueden obtener mediante modelación matemática, utilizando sistemas de reacción difusión, estos sistemas a su vez se pueden configurar mediante distintos modelos, uno de ellos es el modelo FitzHugh-Nagumo (FHN), este es un modelo no lineal, y con una amplia gama de aplicación en fenómenos reales.

Las ecuaciones de reacción-difusión (RDE) se han propuesto ampliamente como modelos plausibles de procesos de generación de patrones, dichos patrones

Date: Junio 24, 2019.

Key words and phrases. sistema de reacción difusión, modelo FitzHugh-Nagumo, patrones de Turing, estabilidad.

se pueden generar en dominios fijos o en dominios crecientes, en ambos casos es preciso realizar un análisis de estabilidad de las soluciones del sistema, para poder hacer predicciones de la duración o cambio en el tiempo del patrón generado. Para dominios fijos en [27] se derivan las condiciones bajo las cuales un sistema de reacción linealizado admite una estabilidad lineal con un estado estable espacialmente homogéneo en ausencia de difusión y sin embargo, se vuelve inestable bajo condiciones apropiadas en presencia de difusión para producir una variación espacial, en un estado estacionario no homogéneo. La estabilidad en el tiempo de un sistema puede depender mucho de las condiciones iniciales y del modelo que se esté utilizando, por lo que es muy importante realizar un análisis cualitativo de las soluciones del mismo, encontrando los puntos de equilibrio (atractores, repulsivos, indiferentes o cíclicos).

El objetivo de este trabajo es realizar una búsqueda de los antecedentes que se tienen sobre la estabilidad del modelo FHN aplicado en sistemas de reacción difusión, para producir patrones de Turing, tanto en dominios fijos, como en dominios crecientes. Realizar un análisis de los valores para los cuales se cumple la estabilidad del sistema, para poder obtener patrones específicos de Turing mediante métodos numéricos y computacionales que tengan una robustez amplia.

1. JUSTIFICACIÓN

Como finalidad primordial de la Maestría en Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), se plantea que el egresado sea capaz de resolver problemas que se presentan en la ciencia, y enmarcados en los ejes prioritarios de investigación de la misma universidad. Este trabajo se sitúa en el eje de investigación: *población y condiciones de vida*, específicamente en el tema prioritario correspondiente a *cultura, ciencia y educación*. En dicha maestría, la orientación en ingeniería matemática tiene sus propias líneas de investigación, dentro de las cuales este proyecto se sitúa en el *análisis de estabilidad* en la línea de *modelación matemática*. Los avances en el estudio de estos modelos, son de gran importancia ya que en un futuro se podrían realizar investigaciones en nuestro país, aplicadas en áreas como: medicina, economía, ciencias sociales, biología, etc.

El análisis de estabilidad de un sistema dinámico, es de gran interés para poder predecir qué tanto varían las soluciones, al realizar modificaciones a las condiciones iniciales o en alguna de las variables involucradas en el modelo planteado. En este caso interesa observar las variaciones que se presentan en los patrones de Turing, generados en dominios crecientes, por lo que la estabilidad se esperaría ver reflejada en la duración de un patrón, a medida que avanza en el tiempo.

Los sistemas de reacción-difusión, tienen diferentes aplicaciones, por ejemplo: describir expansiones de poblaciones biológicas [5], modelación de desarrollo de tejidos [21], desarrollo de matrices para regeneración ósea [8], sistemas caóticos [23]. Mientras que los patrones de Turing tienen aplicaciones en estudios sobre el ADN [15], redes neuronales [1], teoría de grafos [20], entre otros. Con el modelo FHN se ha logrado simular el comportamiento de las neuronas [19], además este

modelo es uno de los mejores para modelar el corazón como si se tratase de un circuito eléctrico [13].

2. ANTECEDENTES

El estudio de los patrones de Turing, surge al querer responder desde un enfoque físico y químico, la causa o causas de la formación de diseños en la piel de ciertas especies de seres vivos, lo cual desde el punto de vista de la biología, se considera que es un efecto de la teoría evolutiva, donde cada ser vivo se adapta al medio para sobrevivir. Desde esta rama de la ciencia se denomina a dichos procesos, *morfogénesis*¹. Los primeros en estudiar la morfogénesis fueron: el biólogo-matemático Thompson, quien publicó [24] donde se enuncia que algunas estructuras óseas de animales pueden ser descritas mediante transformaciones matemáticas simples; otro de los pioneros fue el matemático Turing, quien en 1952 publicó [27], donde presenta sus resultados al analizar el proceso químico que conlleva a formaciones de patrones, estos procesos los modeló utilizando los métodos matemáticos de su época. En la década de 1950 el químico y biofísico soviético Belousov, descubre las reacciones químicas oscilantes (que suelen ser un ejemplo clásico de la teoría del caos), ese tipo de reacciones no fueron muy tomadas en cuenta, ya que aparentemente contradecían la segunda ley de termodinámica; pero casi 20 años después Zhabotinsky, considerado el padre de la dinámica química no lineal, pudo explicar la secuencia de la llamada *reacción BZ*, dichas reacciones se desarrollan mediante el proceso químico llamado *difusión*² precisamente es ese proceso, el que causa que se formen los patrones en ciertas regiones [5]. Turing encontró que dichos fenómenos tienen una explicación que viene dada por reacciones químicas, las cuales pueden ser modeladas aplicando sistemas de *reacción-difusión*, estos son modelos matemáticos que describen cómo una o más sustancias distribuidas en el espacio, cambian bajo la influencia de dos procesos: *reacciones químicas locales* en las que las sustancias se transforman las unas en las otras y *difusión* que provoca que las sustancias se expandan en el espacio. El resultado de este proceso es una configuración estable en la que la composición química es no uniforme en un dominio espacial.

El modelo teórico FitzHugh-Nagumo (FHN) fue propuesto en 1961 por FitzHugh, con la colaboración del ingeniero japonés Nagumo. FHN es un prototipo de sistema excitable, lo cual fue de gran utilidad para realizar una simplificación del modelo Hodgkin-Huxley (HH) con el que se modela una membrana celular como un capacitor en paralelo a una corriente iónica; Por su trabajo (HH) obtuvieron el premio Nobel de fisiología en 1963 [13].

Granados y Larios [16] afirman que: "la importancia actual de este modelo (FHN) trasciende el ámbito de la biofísica y la neurofisiología, siendo de interés para los investigadores que necesitan comprender la amplia gama de fenómenos no lineales concomitantes al fenómeno de excitabilidad". En el trabajo inicial de Turing, no se tuvo en cuenta el efecto de crecimiento del dominio en la geometría de patrones, pero es evidente que el crecimiento es un aspecto esencial en el desarrollo de los organismos, esto lo lleva a generar cambios como intensidad de color, número de manchas y forma de las mismas. Un ejemplo de ello fue observado recientemente,

¹Proceso biológico que permite a los organismos el desarrollo sus formas [3].

²Es un proceso espontáneo por el cual las moléculas de los reactantes se esparcen en todas direcciones a causa de los choques con las moléculas del medio o solvente [3].

en el patrón de la piel del pez ángel emperador [14], como se aprecia en la Figura 1, el patrón en el pez cambia a medida este va creciendo.



FIGURE 1. Se observa el patrón en un pez joven (Izquierda), cuyo patrón cambia al superar los 8 centímetros de tamaño (Derecha). Imagen extraída de [6].

En las últimas décadas se han generado patrones de Turing mediante diferentes modelos, siendo los más utilizados el de Schnakenberg, el modelo de Glucólisis y el FHN. Los sistemas resultantes se suelen resolver mediante métodos numéricos como: *diferencias finitas* [18], *elementos finitos* [2], *Galerkin* [9] y *LDG* [10]. Para el análisis de estabilidad se toma en cuenta las diferentes variables que rigen cada modelo, ya que de las mismas dependerán las restricciones para poder obtener puntos de equilibrio estables, otra consideración es también el tipo de dominios en los cuales se pretenden generar los patrones de Turing, ya sean fijos o crecientes.

3. SISTEMA DE REACCIÓN DIFUSIÓN

La ecuación de reacción-difusión más simple, es la llamada ecuación KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov) [25], donde se analiza el cambio respecto al tiempo de una concentración(v), en el caso de una dimensión se tiene:

$$(3.1) \quad \partial_t v = D \partial_x^2 v + R(v)$$

Observe que al eliminar el término de reacción $R(v)$, se obtiene la ecuación del calor. En forma general se representa con la ecuación vectorial:

$$(3.2) \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = R(U) + D \nabla^2 U$$

Donde U representa un vector con los dos morfógenos, R expresa la cinética química entre ambos compuestos y D es una matriz diagonal con los

coeficientes de difusión D_v , D_w . El sistema de reacción difusión en dos dimensiones, se puede expresar de la siguiente forma [7]:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla^2 v = \gamma \cdot f(v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - d \nabla^2 w = \gamma \cdot g(v, w) \end{cases}$$

Donde: $f(v, w)$ y $g(v, w)$ son funciones correspondientes a los morfógenos v y w ; $\gamma = \frac{L^2}{D_v}$. Por lo que γ es proporcional al área del dominio L^2 , γ es una constante adimensional y d es el coeficiente de difusión. Teniendo como base el sistema de reacción difusión, las funciones $f(v, w)$ y $g(v, w)$, varían según el modelo que se esté utilizando (ver la sección de Antecedentes).

4. PUNTOS DE EQUILIBRIO

Los puntos del espacio de estado, de un sistema de ecuaciones diferenciales, para los cuales las derivadas respecto al tiempo de las variables involucradas, se anulan simultáneamente, constituyen los estados de equilibrio del sistema [19]. Dichos puntos de equilibrio pueden ser: *estable*, ocurre cuando las soluciones vecinas no se alejan de él; *inestable*, cuando una perturbación por muy pequeña que sea, hace que el sistema evolucione en estados muy alejados de dicho punto y se pierde el equilibrio; *asintóticamente estable*, ocurre cuando después de una perturbación, el sistema tenderá a restablecerse automáticamente [19]. Los puntos de equilibrio se clasifican en: nodos, centro, punto de silla, espiral o foco. La estabilidad de los puntos fijos está relacionada con los eigenvalores de la matriz del sistema lineal: cuando la parte real de todos es negativa, el punto fijo es asintóticamente estable, cuando es cero, es estable y cuando alguno de los eigenvalores es positivo, es inestable [11]. Para determinar comportamientos globales de una familia de soluciones periódicas que se bifurcan desde el estado estacionario, es de utilidad el siguiente lema y definición [26]:

Lema 4.1. *Dado $\pi(t) = (v(t), w(t))$, la solución de un sistema como (3.3):*

- 1) $\pi(t)$ es definida $\forall t \geq 0$, para cada $\pi(0) \in \mathbb{R}^2$.
- 2) Hay un intervalo $[I_1, I_2] \subset (-\infty, \infty)$ y un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ tal que si hay una solución periódica de (3.3), para algún I , entonces $I \in [I_1, I_2]$ y $\pi(t) \in K$, $\forall t \geq 0$.

Definición: Sea $X' = F(X)$ y supongamos que $F(x^*) = 0$, sea DF_{x^*} la matriz Jacobiana de F evaluada en x^* . Entonces, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales $Y' = DF_{x^*}Y$ se denomina el sistema linealizado cerca de x^* .

Cuando se trabaja con sistemas no lineales, se hace uso del siguiente teorema, el cual se conoce como teorema de linealización [11]:

Teorema 4.2. *Suponga que el sistema de n dimensiones $X' = F(X)$ tiene un punto de equilibrio en x^* que es hiperbólico. Entonces el flujo del sistema no lineal es conjugado con el flujo del sistema linealizado en un vecindario de x^* .*

En analogía con los sistemas lineales, se dice que un punto de equilibrio x^* de un sistema no lineal es hiperbólico si todos los valores propios de DF_{x^*} no tienen parte real cero, en dicho caso se puede utilizar el teorema anterior [11].

5. MODELO FITZHUGH-NAGUMO

El modelo de Hodgkin y Huxley (HH), que inicialmente describía el comportamiento de las células nerviosas de un calamar gigante [19], consta de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, por su complejidad matemática se dificulta demasiado el análisis, es entonces que surge el modelo FHN, con el fin de comprender de manera esencial la dinámica del fenómeno de excitabilidad de

la membrana, este nuevo modelo que consta como mínimo con dos ecuaciones diferenciales, está basado en la ecuación de Van der Pol ³. Se plantea en [19] como:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = V(v, w) = I - v(v - a)(v - 1) - w \\ \frac{dw}{dt} = W(v, w) = b(v - gw) \end{cases}$$

Siendo $I, g \geq 0$, $b > 0$ y $0 < a < 1$. Para una interpretación biofísica v es el voltaje a través de la membrana, I representa la corriente externa aplicada a la célula, w es una variable de recuperación asociada a las corrientes iónicas de la membrana, b es una constante de velocidad, $g \in \mathbb{R}^+$. Igualando a cero (5.1) se encuentran los estados o puntos de equilibrio

$$(5.2) \quad \begin{aligned} 0 &= I - v(v - a)(v - 1) - w \\ 0 &= b(v - gw) \\ w &= I - v(v - a)(v - 1) \\ w &= g^{-1}v \end{aligned}$$

Donde $W(v, w)$ representa una recta que pasa por el origen y $V(v, w)$ es un polinomio de grado tres. Como dichas curvas pueden tener hasta tres intersecciones, el número máximo de puntos de equilibrio del sistema FHN, es tres (ver Figura 2).

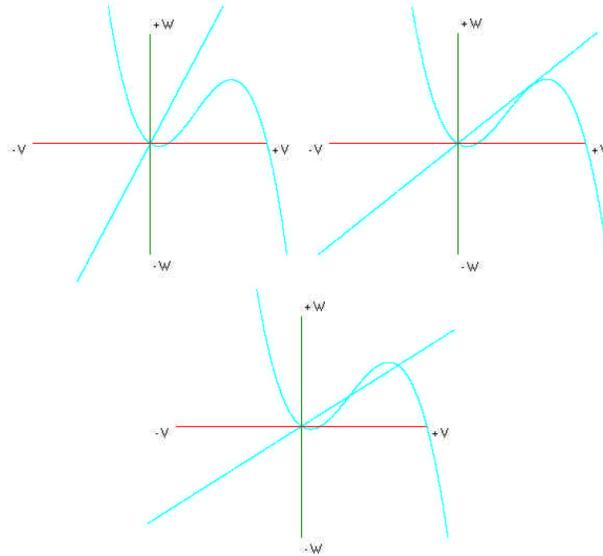


FIGURE 2. Casos de puntos de equilibrio. Imagen extraída de [19]

³Ecuación del oscilador de Van der Pol: $\frac{d^2x}{dt^2} + c(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$, donde c es un parámetro escalar del cual depende el amortiguamiento y la no linealidad.

al aplicar el teorema (4.2), la matriz de linealización A del sistema FHN evaluada alrededor del punto fijo $(v_0, w_0) = (v, w)$ es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial w} \\ \frac{\partial W}{\partial v} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v_0^2 + 2(a+1)v_0 - a & -1 \\ b & -bg \end{bmatrix}$$

Se obtiene el sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (-3v_0^2 + 2(a+1)v_0 - a)v - w \\ \frac{dw}{dt} &= b(v - gw) \end{aligned}$$

En [19] se analizan las condiciones de existencia de un único estado de equilibrio, para lo cual indica que el parámetro b es irrelevante en el análisis, ya que ese valor no figura al hacer las ceroclinas⁴ (5.2), por lo que se realizan dos observaciones geométricas en el plano de fases:

- a) manteniendo fijo a y g , se observa que al modificar I , tiene como consecuencia la traslación de la ceroclina cúbica, en la dirección del eje w ;
- b) mantener fijo I , a , modificando g , tiene como efecto un cambio en el valor de la pendiente de la ceroclina recta. De lo anterior se obtiene la siguiente observación y proposiciones [19]:

Observación: Si se fija arbitrariamente el parámetro a en el intervalo $(0, 1)$ y se denota por c a la pendiente de la ceroclina cúbica en su punto de inflexión. Si la pendiente $(\frac{1}{g})$ de la ceroclina recta es mayor o igual a c , entonces, para todo valor del parámetro I , el sistema FHN tiene un único punto de equilibrio. Calculando el valor de la ceroclina cúbica: Se obtuvo el valor de la ceroclina cubica en $v = \frac{a+1}{3}$, el que corresponde al punto de inflexión de la misma. Calculando la pendiente de dicha ceroclina:

$$\frac{dw}{dv} \Big|_{v=\frac{a+1}{3}} = \frac{a^2 - a + 1}{3} - 4b = c$$

con lo que se afirma:

Proposición 1: Para cualquier selección de parámetros, $(a; I; b; g)$; del sistema FHN. Si se cumple la siguiente condición, entonces hay un único equilibrio.

$$(5.4) \quad \frac{1}{g} \geq \frac{a^2 - a + 1}{3} = c$$

Los parámetros del sistema FHN tienen valores que garantizan la existencia de un único punto estático, por lo que en [19] se examinan dos casos:

- 1) *Caso autónomo* ($I = 0$): analizando el sistema linealizado alrededor del punto $(0, 0)$:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -av - w \\ \frac{dw}{dt} &= b(v - gw) \end{aligned}$$

⁴Son los cruces de las curvas $W(v, w) = 0$ y $V(v, w) = 0$, determinan los puntos de equilibrio.

de donde se obtienen los eigenvalores:

$$\lambda_{1,2} = -\left(\frac{a + bg}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{(a - bg)^2 - 4b}{2}}$$

Para eigenvalores reales implica que $ga > -1$, lo cual siempre se cumple en (5.1); para eigenvalores complejos: si $(a - bg)^2 < 4b$, la parte real de los eigenvalores es menor que cero, si $a + bg > 0$, lo cual también se cumple siempre, ya que $a, b > 0$ y $g \geq 0$, por tanto se tiene:

Proposición 2: Si en el sistema de FHN existe un solo punto fijo y en ausencia de estimulación externa (i.e.: cuando $I = 0$), para todo valor de los parámetros $a; b > 0$ y $g \geq 0$, el estado de equilibrio $(v_0; w_0) = (0, 0)$ es siempre asintóticamente estable (ver Figura 3).

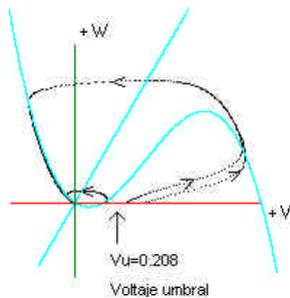


FIGURE 3. con los valores $I = 0$, $a = 0.15$, $b = 0.01$, $g = 2.5$.
Imagen extraída de [19]

2) Caso forzado ($I = constante$): el modelo FHN predice que al aumentar el valor de I , se traslada la gráfica de la ceroclina cúbica verticalmente en el sentido positivo del eje w del plano de fases, lo cual incrementa v . Si se cumple $bg \geq c$ el equilibrio es asintóticamente estable para todo I (ver Figura 4).

Pero si $bg < c$ cambia el signo de la matriz de linealización, lo cual produce un cambio en la estabilidad del equilibrio (ver Figura 5).

Para [16], las bifurcaciones del sistema FHN son dos, para lo cual se utiliza el siguiente lema:

Lema 5.1. Los equilibrios o puntos fijos de (3.1) son los puntos $(x_*, \frac{x_*}{g})$ con x_* raíz del polinomio cúbico $P_{g,I}(v) = f(v) + \frac{v}{g} - I = v^3 - (a + 1)v^2 + (a + \frac{1}{g})v - I$

Analizando las raíces del polinomio y aplicando varios teoremas [16], incluyendo el de linealización, se describen dos tipos de bifurcaciones para este sistema:

1) Bifurcación silla-nodo: se dará cuando el polinomio $P(v) = P_{g,I}(v)$ tenga dos raíces, una simple y otra de multiplicidad dos, esta última es la que hace se forme la bifurcación, por lo que se tiene:

$$(5.6) \quad P(v) = (v - \alpha)(v - \beta)^2 = v^3 - (2\beta + \alpha)v^2 + (\beta^2 + 2\alpha\beta)v - \alpha\beta^2$$

siendo α la raíz simple y β la doble; puesto que existe un equilibrio no hiperbólico [11], se tiene por tanto una bifurcación. Suponiendo que $P(v)$ se pueda factorizar

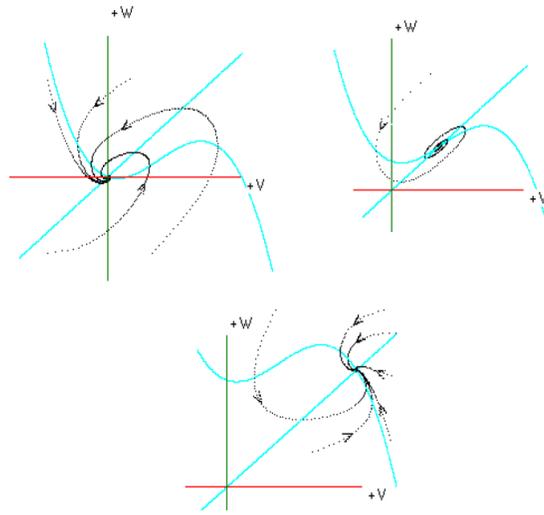


FIGURE 4. punto asintóticamente estable con: $a = 0.15, b = 0.14, g = 2.5$. Imagen extraída de [19]

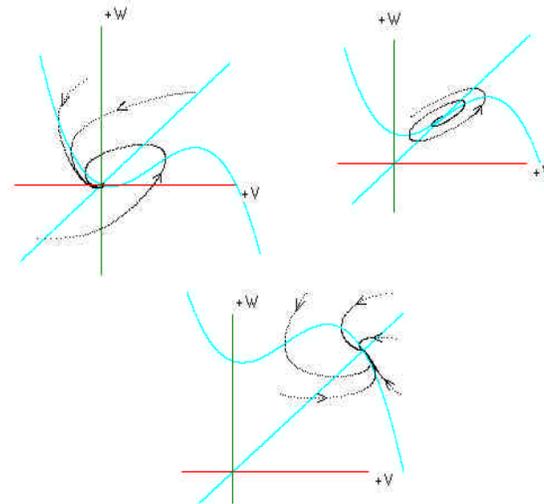


FIGURE 5. El estado de equilibrio pierde estabilidad al aumentar I con: $a = 0.15, b = 0.14, g = 2.5$. $I = 0.01$ (arriba izquierda), $I = 0.095$ (arriba derecha), $I = 0.35$ (abajo). Imagen extraída de [19]

como (5.6), deberían satisfacerse las condiciones:

a) $I = \alpha\beta^2$

b) $a + \frac{I}{g} = \beta^2 + 2\alpha\beta$

c) $a + 1 = 2\beta + \alpha$.

De a) y b) se tienen:

$$(5.7) \quad \beta = c \pm \sqrt{\frac{1}{3g_0 - \frac{1}{3g}}} = c \pm A(g)$$

Donde $g_0 = \frac{3}{a^2 - a + 1} = \frac{1}{3c^2 - 3c + 1}$; con $c = \frac{a+1}{3}$.

Lo cual muestra que $P(v)$ tendrá dos raíces reales si y solo si g está en el dominio de la función A e $I = \alpha\beta^2$, con α y β dados por (5.7).

2) Bifurcacion de Hopf: se da cuando la traza de la matriz de linealización es igual a cero:

$$(5.8) \quad -f'(v) - bg = 0$$

siempre y cuando la ecuación (5.8) tenga solución y como $f'(x) \geq f'(c)$, se tiene solución si y solo si $bg < \frac{1}{g_0} = -f'(c)$. En [16] se resuelve usando varios teoremas, y encuentra que para el polinomio cuadrático $v^2 - 2cv + c - \frac{1}{3} + \frac{bg}{3} = 0$, se obtienen las siguientes soluciones:

$\xi \pm (g) = c \pm B(g)$, las cuales existen solo si $g \leq \frac{1}{bg_0}$ para esta última expresión se define:

$J_1(g) = I_g[\xi + (g)]$ y $J_2(g) = I_g[\xi - (g)]$ para esos valores de I en el punto de equilibrio $(\xi, \frac{\xi}{g})$ la traza de linealización es cero. Si fijamos b , se tendrán dos curvas en el plano paramétrico $g - I$, con lo cual se forma la bifurcación de Hopf. En [16] se hacen las siguientes afirmaciones:

- a) Si $g_0 > \frac{1}{bg_0}$ entonces, para $\frac{1}{bg_0} < g < g_0$ fijo y variando el valor del parámetro I , no se tiene bifurcación de Hopf, ya que se tendrá un punto estable único.
- b) Si $g_0 > \frac{1}{bg_0}$ se originan otras bifurcaciones.

El sistema FHN en forma generalizada se expresa de la siguiente forma en [28]:

$$(5.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = v(1-v)(v-a) - w + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = b(v-w) + D_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases}$$

Dándole significados aplicados en los sistemas de reacción difusión, se tiene que: v representa el morfógeno activador y w el morfógeno inhibidor, a corresponde al umbral de excitación o cambio, b es la relación del tiempo, D_v y D_w son los coeficientes de difusión. Para este sistema, en [28] se encontró soluciones analíticas exactas en forma de ondas viajeras. Se encuentra una bifurcación *Ising-Bloch* la cual afecta la velocidad de la onda, donde el parámetro de control es la relación de las escalas de tiempo b , de w a v , el cual persiste cuando la fuerza de la no linealidad w se toma como parámetro de bifurcación. La bifurcación *Ising-Bloch* determina las propiedades excitables del sistema y la propagación es lo que conduce a la formación de patrones complejos, cuando se estudia este sistema en dos dimensiones.

6. FHN EN PATRONES DE TURING

En cuanto al estudio del modelo FHN para formación de patrones de Turing, [12] utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \tau_1 \frac{\partial v}{\partial t} = d_1 \Delta v + v(v-a)(1-v) - w + I \\ \tau_2 \frac{\partial w}{\partial t} = d_2 \Delta w + v - bw + bv \end{cases}$$

El sistema tiene una estructura gradiente con lo cual:

$$\left[\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{f(v,w)}{\tau_1} \right) \right] = - \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g(v,w)}{\tau_2} \right) \right]$$

Separando en funciones se tiene : $f_1(v) = v(v-a)(1-v)$; $f_2(w) = -w + I$; $g_1(v) = v$; $g_2(w) = -bw + bv$.

Se considera la biestabilidad cúbica no lineal, y se fijan los parámetros $a = \frac{2}{25}$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = \frac{7}{10}$; pero no se especifican los puntos de equilibrio y estabilidad de Hopf, aunque se obtienen condiciones similares a las calculadas en [7], para (6.1). Concluyendo que para el modelo FHN los patrones de Turing se producen de dos formas: forma de puntos cuando la energía de Lyapunov funcional del sistema tiene un mínimo global único y forma de laberinto en caso contrario [17].

Para que se puedan formar patrones de Turing es necesario que se cumplan las condiciones de inestabilidad Turing-Hopf [2], las cuales en [12] para un sistema del tipo FHN se indica que para que ese tipo de inestabilidad se dé, se requieren las siguientes condiciones:

- i) $\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial w} < 0$
- ii) $\frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial w} - \frac{\partial f_2}{\partial w} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} > 0$
- iii) $d_2 \frac{\partial f_1}{\partial v} + d_1 \frac{\partial g_2}{\partial w} > 0$
- iv) $(d_2 \frac{\partial f_1}{\partial v} + d_1 \frac{\partial g_2}{\partial w}) > 4d_1 d_2 (\frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial w} - \frac{\partial f_2}{\partial w} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v})$

Se muestran en [12], patrones de Turing en los cuales se puede apreciar que la variación de algunos parámetros, conduce a bifurcaciones, mismas que se observan en el cambio de color y forma de los patrones generados.

Los patrones de Turing, se vuelven aún más interesantes, cuando en el modelo que se trabaja, se utiliza una función de crecimiento, como se estudió en [22], que se trabajó un sistema monótono de reacción difusión, se explican diferentes tipos de dominios (plano, esférico y cónico) de crecimiento en el tiempo. Se utiliza el siguiente sistema:

$$(6.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_s v - 2kv + f(v, w) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta_s w - 2kw + g(v, w) \end{cases}$$

Donde:

$f(v, w) = av(1 - r_1 w^2) + w(1 - r_2 v)$; $g(v, w) = bw(1 + \frac{ar_1}{b} vw) + v(\gamma + r_2 w)$; r_1 , r_2 miden la fuerza de las interacciones de tercer y segundo orden respectivamente. Se detallan las siguientes opciones para la función de crecimiento de dominio, las

cuales se definen así:

- a. $\rho = 1$ (sin crecimiento), este caso es útil como punto de referencia para identificar o comparar los efectos en el patrón de Turing al agregar una función de crecimiento.
- b. $\rho = 1 + bt$ (crecimiento lineal), donde $b > 0$, esta función probablemente no tenga mucho sentido en aspectos biológicos, es tan simple que al igual que el caso (a) se puede usar como caso base.
- c. $\rho = e^{kt}$; $k > 0$ (crecimiento exponencial), esta función es más razonable, ya que muchos tejidos tienen crecimiento exponencial en las primeras fases.
- d. $\rho = \frac{e^{kt}}{1 + \frac{1}{m}(e^{kt}-1)}$; donde $k > 0$ y $m > 1$, se observa que $\rho(0) = 1$ y $\rho \rightarrow \frac{1}{m} > 1$ cuando $t \rightarrow \infty$, este caso es inicialmente aproximadamente exponencial y saturado finalmente, en la aplicación a fenómenos biológicos es bastante razonable .

Con las funciones anteriores, en [12] se da una idea de como trabajar sistemas de ecuaciones diferenciales, para generar patrones de Turing con funciones en dominios crecientes.

7. CONCLUSIONES

Para generar patrones de Turing, se requiere de la implementación tanto de métodos numéricos como de un software robusto, mismos que no podrán generar los resultados esperados, sin antes realizar un análisis cualitativo del sistema que se utiliza, para ello es de gran importancia, el calculo de los puntos de equilibrio, para considerar intervalos para valores de las variables involucradas, lo cual permitirá saber cuando se pueden generar patrones de Turing, que además sean persistentes en el tiempo y cuando cambian a nuevas formas; cambios que también están relacionados con funciones de crecimiento de dominio que se agreguen al modelo. En las aplicaciones del modelo FHN dicho análisis permite incluso saber que cantidad de morfógenos y en cuanto tiempo se produce algún patrón en específico (si se aplica en situaciones de reacción de mezclas), en el estudio de excitación de neuronas, es de utilidad para saber cuanta energía externa se puede aplicar a la misma para producir cambios. Los puntos de equilibrio en sistemas del tipo FHN para dominios crecientes han sido poco estudiados, además se han realizado escasos experimentos para generar patrones de Turing, usando los mismos, por lo que se vuelve dicho análisis un interés para realizar en posteriores trabajos; también será de interés incluir el estudio del efecto de las bifurcaciones o equilibrios estables en soluciones periódicas para el sistema del tipo FHN.

REFERENCES

1. Acevedo, Eder and Serna, Alexei and Serna, Edgar. *Principios y características de las redes neuronales artificiales*. Desarrollo e Innovación en Ingeniería.173.2017
2. A González, Libardo, Juan C Vanegas, and Diego A Garzón. "Formación de patrones en sistemas de reacción-difusión en dominios crecientes." *Revista Internacional de Métodos*

- Numéricos 25.2 (2009): 145-161.
3. Castillo Medina, Jorge Antonio. Morfogénesis en superficies dinámicas. 2015.
 4. Carrillo, Humberto, and Fernando A. Ongay. "On the firing maps of a general class of forced integrate and fire neurons." *Mathematical biosciences* 172.1 (2001): 33-53.
 5. Durán, Aldo Ledesma. *Patrones de turing en sistemas biológicos*. 2012. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.
 6. Fordivers.(2019).Pez angel emperador. fordivers.com/es/fauna/especie/pez-angel-emperador/.html
 7. Garzón, Alvarado, Diego Alexander and Ramírez-Martínez, Angélica María and Duque-Daza, Carlos Alberto and others. *Patrones de Turing sobre esferas con crecimiento continuo*. Revista EIA. 2013. Fondo Editorial EIA.
 8. Garzón, D. Simulación de procesos de reacción-difusión: Aplicación a la morfogénesis del tejido óseo. Tesis de Doctorado (Biomecánica Computacional). Universidad de Zaragoza, 2007.
 9. Gómez, H., et al. "Un nuevo enfoque para el tratamiento de los términos difusivos en la ecuación de convección-difusión en el método de Galerkin discontinuo." *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería* 23.4 (2007): 343-362.
 10. Henríquez, Iván. *Aplicaciones del Método LDG a sistemas químicos Y biológicos con estructuras de Turing*. 2013. Universidad de Puerto Rico, Recinto universitario Mayagüez.
 11. Hirsch, Morris W., Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
 12. Karasözen, Bülent and Küç, İkseyhan, Tuğba and Uzunca, Murat. *Structure preserving integration and model order reduction of skew-gradient reaction-diffusion systems*. *Annals of Operations Research*. 258.1. 79-106. 2017. Springer.
 13. Keener, James P and Sneyd, James. *Mathematical physiology*. 1. 1998. Springer.
 14. Kondo, Shigeru; Asai, Rihito. A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish *Pomacanthus*. *Nature*, 1995, vol. 376, no 6543, p. 765.
 15. Lahoz-Beltra, Rafael. *Alan Turing y los orígenes de la investigación multidisciplinar*. Encuentros Multidisciplinares. 2013. Universidad Autónoma de Madrid. Fundación General
 16. Larios, Fernando Ongay, and Máximo Augusto Agüero Granados. "Bifurcaciones del Sistema de FitzHugh-Nagumo (FHN)." *CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva* 17.3 (2010): 295-306.
 17. Marquez-Lago TT, Padilla P (2014) A selection criterion for patterns in reaction diffusion systems. *Theoretical Biology and Medical Modelling* 11:7, DOI 10.1186/1742-4682-11-7
 18. Mickens, Ronald E. "Exact solutions to a finite-difference model of a nonlinear reaction-advection equation: Implications for numerical analysis." *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 5.4 (1989): 313-325.
 19. Montoya, Carolina Barriga and Calvet, Humberto Carrillo and Ledesma, Antonio Carrillo. *Análisis y Simulación con INTEGRA del Modelo de FitzHugh-Nagumo para una*

Neurona. Aportaciones Matemáticas, 2003, no 32, p. 31-49.

20. Nakao, Hiroya and Mikhailov, Alexander S. *Turing patterns in network-organized activator inhibitor systems*. Nature Physics.6.7.544.2010.Nature Publishing Group.
21. Palacios, Lucila Araceli Montero. *Métodos físico-químicos de caracterización de las fibras de polilactida*.2012.Universidad Politècnica de Catalunya (UPC).
22. Plaza, Ramón G and Sanchez-Garduno, Faustino and Padilla, Pablo and Barrio, Rafael A and Maini, Philip K. *The effect of growth and curvature on pattern formation*. Journal of Dynamics and Differential Equations.16.4.1093–1121.2004.Springer.
23. Solé, Ricard and Manrubia, Susanna C.2. *Orden y caos en sistemas complejos*. 2001.Univ. Politèc. de Catalunya
24. Thompson, J. Arthur. On growth and form. Nature, 1917, vol. 100, no 2498, p. 21.
25. Trespalacios-Julio, Jessica P. Soluciones explícitas para ecuaciones de reacción difusión no autónomas usando sistemas de Ermakov y Riccati. Diss. 2014.
26. Troy, William C. "Bifurcation phenomena in FitzHugh's nerve conduction equations." Journal of mathematical analysis and applications 54.3 (1976): 678-690.
27. Turing, Alan Mathison. The chemical basis of morphogenesis. Bulletin of mathematical biology, 1990, vol. 52, no 1-2, p. 153-197.
28. Zemskov, E. P., and I. R. Epstein. "Wave propagation in a FitzHugh-Nagumo-type model with modified excitability." Physical Review E 82.2 (2010): 026207.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
E-mail address: dkmeza@unah.hn

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA ECUACIÓN DE POISSON

VRAYAN STEVEN AYALA MUNGUIA

RESUMEN

Muchos problemas matemáticos y físicos tales como conducción de calor en un medio continuo, flujo de un fluido ideal irrotacional, flujo de un fluido a través de un medio poroso, pequeñas deformaciones de una membrana bajo carga lateral, entre otros, involucran la resolución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, como ser la ecuación de Poisson. Adicionalmente, las ecuaciones a resolver pueden no tener una solución explícita y tener alta dimensionalidad. El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades de éste tipo de ecuaciones, así como los métodos numéricos y estrategias de implementación para la solución de las mismas. Se presenta la importancia de esta área de estudio así como los antecedentes históricos de los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. Se estudian aspectos teóricos de la ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica, método de elemento finito, mallas convexas y su solución numérica en diferentes geometrías.

Palabras clave: Ecuaciones elípticas, métodos numéricos, ecuación de Poisson.

1. INTRODUCCIÓN

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) aparecen muy frecuentemente en modelos que pretenden explicar un fenómeno físico. El creciente desarrollo de herramientas computacionales, permite resolver problemas que anteriormente no eran tratables. Sin embargo, aún existen muchas limitantes que impiden obtener soluciones precisas. En problemas como dinámica de partículas o elastostática, se presentan ecuaciones diferenciales elípticas. Es de mucha importancia estudiar este tipo de ecuaciones e identificar esquemas computacionales para aproximar soluciones de forma numérica. Actualmente los métodos que se utilizan en términos generales son: Diferencias Finitas, Elementos Finitos y Volumen Finito, entre otros. En cualquier proceso de investigación es necesario seguir diversos pasos, todos ellos fundamentales para abordar cualquier problema. Uno de ellos es el estado del arte, el propósito de este trabajo es determinar la forma como ha sido tratado el tema, como se encuentra el avance de su conocimiento en el momento de realizar una investigación y cuales son las tendencias existentes en ese momento. El análisis del estado del arte es un proceso de la investigación documental que permite el estudio del conocimiento acumulado escrito dentro de una área específica; su finalidad es dar cuenta del sentido del material documental sometido a análisis, con el fin de revisar de manera detallada y cuidadosa los documentos que tratan sobre el tema específico [1].

Date: 11 de septiembre de 2019.

Key words and phrases. Ecuaciones elípticas, métodos numéricos, ecuación de Poisson.

2. JUSTIFICACIÓN

En la actualidad las ecuaciones diferenciales parciales tienen varias aplicaciones en distintas ramas de la ciencia tales como física, química, biología, ingeniería, etc. En el mundo real existen fenómenos físicos, económicos, biológicos, etc, que son modelados a través de ecuaciones diferenciales parciales y para encontrarles solución existen métodos analíticos tales como separación de variables, series de Fourier, ecuaciones integrales, etc; los cuales permiten encontrar soluciones numéricas a dichas ecuaciones [2]. Algunas veces las ecuaciones diferenciales que ayudan a modelar los distintos fenómenos en estas ciencias, como por ejemplo la conducción del calor en un medio continuo, flujo de un fluido ideal irrotacional, flujo de un fluido a través de un medio poroso, pequeñas deformaciones de una membrana bajo carga lateral, entre otros, son difíciles o imposibles de resolver por los métodos analíticos; es por ello que se tiene que buscar algunos métodos numéricos para encontrar una solución aproximada a dichas ecuaciones. Para establecer una descripción cuantitativa de un problema físico, en primer lugar, es necesario plantear un sistema de ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales) válidas en cierta región o dominio y sujetas a determinadas condiciones iniciales y de contorno. En segundo lugar, se necesita resolver el sistema planteado; las mayores dificultades surgen en esta instancia, ya que sólo las ecuaciones más simples pueden ser resueltas en forma exacta [3]. Con el propósito de salvar estas dificultades, es necesario replantear el problema matemático dándole una forma puramente algebraica que involucre solamente operaciones básicas. Para lograr este objetivo, el problema continuo debe ser discretizado, entiéndase como tal el procedimiento en el que se reemplazan los infinitos puntos en los que se necesita conocer la función incógnita por un número finito de ellos, dando lugar a un número finito de parámetros desconocidos. Este proceso conlleva, en general a un cierto grado de aproximación.

La Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH) presenta prioridades de investigación que tienen que ser atendidas institucionalmente en los próximos años mediante trabajos de investigación, actualmente existen trece temas prioritarios que han sido agrupados en cuatro ejes de investigación. Este trabajo sigue la línea de investigación del eje número tres de la UNAH población y condiciones de vida, este eje de investigación está conformado por cuatro temas prioritarios de investigación, enmarcándose en el tema número ocho: cultura, ciencia y educación, en este tema se presta atención a las investigaciones relacionadas con la educación, la ciencia y la cultura como elementos cohesionadores que contribuyen a la creación y expansión de conocimiento [4].

La línea de investigación que sigue el programa de Maestría en Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras se encasilla dentro de los temas prioritarios de la universidad. Cabe mencionar que la universidad incluye dentro de sus temas prioritarios los siguientes: cultura, ciencia y educación; dado que la Maestría en Matemáticas es de carácter científico, de manera general todos los temas se pueden encasillar dentro del tema prioritario de la ciencia. Este trabajo sigue la línea de investigación número uno da la orientación en matemáticas aplicadas. Métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, las ecuaciones diferenciales aparecen en todas las áreas científicas, por ello podemos encasillar estas líneas de investigación dentro de los temas prioritarios: infraestructura y desarrollo

territorial, productividad y competitividad, ciencia, cambio climático y vulnerabilidad, desarrollo energético [5].

3. ANTECEDENTES

La primera referencia histórica del análisis numérico para ecuaciones diferenciales la encontramos en el uso de diferencias finitas [6]. Sir Thomas Harriot (1560-1621) inventó el cálculo de las diferencias finitas, y Henry Briggs (1556-1630) lo aplicó en el cálculo de logaritmos. Posteriormente el método fue redescubierto por Leibniz alrededor de 1672. En 1768 apareció el método poligonal de Euler [7], la idea de usar ecuaciones en diferencias para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales. La demostración de convergencia de dicho método fue dada por Cauchy alrededor de 1840. Lo anterior es una muestra del hecho que primero aparecieron los algoritmos de cálculo, pero que no fue hasta mucho después cuando se dio prioridad al análisis de convergencia y estabilidad de los mismos. La primera aplicación computacional de las diferencias finitas para ecuaciones diferenciales bi-dimensionales se debe probablemente a Runge en el año 1908 [6]. Él estudió la solución numérica para la ecuación de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = c$ donde c es una constante. Aproximadamente al mismo tiempo, en Inglaterra, Richardson también trabajó en la misma línea [7]. El artículo que presentó en 1910 fue el primer trabajo en la aplicación de métodos iterativos para la solución de problemas de equilibrio mediante diferencias finitas. Más tarde, en 1918, Liebmann sugirió un método iterativo mejorado para la aproximación en diferencias finitas de la ecuación de Laplace. Hoy en día, el nombre de Liebmann se asocia a cualquier método de iteración por pasos en el que se sigue una secuencia fija de cálculo. El estudio de los errores en el método de las diferencias finitas llegó más tarde, en 1928, con el famoso artículo de Courant, Friedrichs y Levy, considerado por algunos como el nacimiento de la moderna teoría de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [8]. Aún hoy, es un área de investigación de gran interés.

Uno de los métodos más utilizados y actuales para la resolución de EDP, es el método de los elementos finitos. Sin embargo, este método se basa en uno todavía mucho más antiguo, el llamado método de los residuos ponderados, del que reconocemos la primera referencia histórica en Gauss ya en el año 1795. Posteriormente aparecieron los trabajos de Galerkin en 1915 o Biezeno-Koch en 1923 [7]. Los métodos numéricos que se utilizan en la actualidad para la solución de ecuaciones diferenciales tienen su origen en la segunda mitad del siglo XIX. A finales del siglo pasado Carl David Tolmé Runge (1856-1927) presentó métodos específicos para obtener mejores aproximaciones que las que ofrecía el método de Euler. Pocos años después fueron perfeccionados por Wilhelm Martin Kutta y por Heun, por lo que se conocen como métodos de Runge-Kutta, y pueden considerarse como los más populares de entre los métodos denominados de un paso [9]. También en este período hacen aparición los métodos multipaso que constituyen el otro gran grupo de métodos utilizados. Se puede decir que el análisis numérico moderno comienza con el trabajo en 1947 de John von Neumann y Herman Goldstine, "Numerical Inverting of Matrices of High Order" (Bulletin of the AMS, Nov. 1947). Es uno de los primeros trabajos para estudiar error de redondeo e incluir la discusión de lo que hoy se llama computación científica. En esta década de 1940 a 1950 aparición de los ordenadores hace posible la realización de grandes cálculos a un coste económico

y de tiempo razonables, no se generaliza su uso. Supone un cambio radical, pues es a partir de ese momento cuando el análisis numérico nace como disciplina autónoma, desarrollándose enormemente en la segunda mitad del siglo XX, en estrecha conexión con la evolución tecnológica de los ordenadores [6]. Antes de los ordenadores eran necesarios meses y meses de trabajo para resolver una única ecuación diferencial con su valor inicial, con un trabajo tedioso, por lo que sólo se resolvían aquellas que se precisaban para su aplicación.

El primer estudio riguroso de la teoría matemática encerrada en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales se debe a Dahlquist que escribió su tesis, ya mayor, en el año 1956, siendo publicada en 1959 [2]. Es el primero en escribir una teoría que explique conceptos como estabilidad o el orden alcanzable. Sólo escribió seis o siete artículos, pero que son de una importancia excepcional. Para obtener el orden del método en los métodos de Runge-Kutta es preciso realizar desarrollos de Taylor. El neozelandés Butcher mediante problemas combinatorios y la utilización de la teoría de grafos obtuvo fórmulas con las que era posible calcularlo sin necesidad de realizar los desarrollos de Taylor. En la práctica los métodos que actualmente se utilizan son los códigos o librerías digitales, en los que están programados, los métodos de Adams para cada paso y cada orden, o los métodos de Runge-Kutta de pares encajados. El propio código estima el error y elige el orden que más se adecue, e incluso toma los valores del paso mayores o menores según sea más conveniente [3]. Son por tanto una variedad de métodos que se combinan. Por último, describiendo muy brevemente el estado actual, hoy se trabaja en métodos específicos para resolver distintas clases de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, los sistemas hamiltonianos, para acercar la teoría numérica a la teoría analítica, los sistemas dinámicos y la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, con un mayor contenido geométrico, utilizando los grupos de Lie. Aunque el análisis numérico tiene una historia más larga y más rica, el análisis numérico moderno, como se usa hoy en día, se caracteriza por la unión de la computadora programable, el análisis matemático y la necesidad de resolver grandes problemas complejos y con diversas aplicaciones. Por esto el análisis numérico y la computación científica se desarrollaron de forma rápida y en muchos frentes. El enfoque actual del área está centrado en el álgebra lineal numérica, los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales e integrales, métodos de aproximación de funciones y el impacto de estos desarrollos en la ciencia y la tecnología [10]. De particular interés actual es el impacto de los paquetes de software de matemáticas.

4. ECUACIÓN DE POISSON

Los problemas en física e ingeniería muchas veces consisten en resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera y quizás también con condiciones iniciales. Uno de tales problemas es el llamado problema de contorno de Poisson [11]

$$(4.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad}(u)) &= f(x), x \in \Omega \subseteq R^n \\ u &= 0, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $a(x)$ y $f(x)$ son funciones discontinuas. El significado físico de los términos que intervienen en esta ecuación dependen del área particular en la cual ésta se

aplica. En la física matemática se estudian las propiedades generales de la ecuación de Poisson junto con problemas de contorno asociados. Los autores de textos en matemática usualmente presentan una derivación de la ecuación a partir de un determinado problema físico, por ejemplo mecánico o eléctrico, pero luego realizan desarrollos matemáticos desvinculando a la ecuación de su planteo físico. Aunque ocasionalmente estos autores pueden establecer que determinados resultados matemáticos están vinculados con el sistema físico original, raramente proporcionan una imagen concreta tal que explique los resultados matemáticos correspondientes y simultáneamente provea una adecuada intuición sobre el comportamiento real del sistema [14]. Cabe destacar que dicha visión intuitiva es difícil de lograr en ciertas áreas. No obstante, en mecánica la ecuación de Poisson describe el equilibrio estático de una membrana, esta ecuación gobierna la deflexión u de la membrana sometida a tensiones internas caracterizadas por el parámetro bajo la acción de la carga F . Desde el punto de vista matemático la membrana es considerada como un dominio D del plano y en consecuencia, cada uno de sus puntos es descrito mediante el par de coordenadas cartesianas (x, y) . Mediante un adecuado cambio de variables se puede lograr que sea $a = 1$. Obviamente en este caso la ecuación se reduce a

$$(4.2) \quad \Delta u = -F$$

En las primeras etapas de la matemática clásica se estudió el caso particular de la ecuación de Poisson con $F = 0$, la cual se conoce como ecuación de Laplace. Para esta ecuación fueron formulados los denominados problemas de Dirichlet y Neumann. En el problema de Dirichlet se suponen dados, los valores de la deflexión transversal u a lo largo del contorno B del dominio D y esto conduce a una condición de contorno de la forma

$$(4.3) \quad u|_B = \varphi$$

En cambio, en el problema de Neumann se suponen conocidos los valores de la derivada de u respecto de la normal a lo largo del contorno, esto es

$$(4.4) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_B = f$$

5. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Las EDP son mucho más complejas que las EDO y aunque existen algunos métodos de resolución analítica como los anteriores, para aplicarlos las EDP deben tener una estructura y condiciones concretas. Para la mayoría de EDP no se pueden aplicar tales métodos, no existiendo a día de hoy solución analítica para las mismas. Los métodos de resolución numéricos más habituales de ecuaciones en derivadas parciales están basados en la aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas, ya sean progresivas, regresivas o centrales y la discretización del problema, con el fin de establecer un sistema de ecuaciones ordinarias, implícitas o explícitas, y resolverlos mediante otras técnicas numéricas como el método de Jacobi, Gauss-Seidel o sobrerrelajación, descritos en [15]. Existen métodos no basados en diferencias finitas para la resolución de EDP, como el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual podría clasificarse como el método equivalente al de Rayleigh-Ritz para la resolución de problemas de contorno en EDO. El MEF tiene una complejidad muy superior a la de los métodos basados en diferencias finitas,

pero presenta la ventaja de que se pueden manejar de manera relativamente sencilla las condiciones de frontera [16]. Los problemas físicos reales, con frecuencia tienen condiciones de frontera que incluyen derivadas y fronteras de forma irregular. Esta clase de condiciones resultan difíciles de manejar con métodos de diferencias finitas puesto que las condiciones de frontera con derivadas implican una aproximación mediante un cociente de diferencias en los puntos de la red y las formas irregulares de frontera dificultan la colocación de los puntos de la red. En el MEF se resuelven estos inconvenientes mediante la inclusión de las condiciones de frontera como integrales en una funcional que se minimiza.

Los problemas como (4.1) han sido resueltos con el método de diferencias finitas (MDF). El método de diferencias finitas imagina el dominio como una malla de puntos, proporcionando una aproximación discreta de la solución. Si bien este método es muy fácil de aprender y aplicar para obtener la solución de problemas con geometrías simples, cuando la geometría es irregular o cuando presenta una especificación inusual en las condiciones de frontera, la aplicación de diferencias finitas resulta engorrosa [12]. A diferencia del método de diferencias finitas, el método de elementos finitos (MEF) supone que el dominio está constituido por muchas regiones pequeñas o elementos interconectados. Puesto que estos elementos pueden ser colocados de diversas maneras, pueden ser usados para representar formas excesivamente complejas, Lara [13], utiliza elementos finitos triangulares con tres nodos y un grado de libertad por nodo para hallar las cargas hidráulicas del acuífero del Valle de Moche, Trujillo, genera un programa propio que implementa mallas tipo Delaunay. Cascón [12] utiliza elementos finitos adaptativos (MEFA) como un algoritmo para resolver una ecuación diferencial basada en la iteración, en un bucle del tipo: resolver, estimar, marcar, refinar.

Para estudiar el comportamiento numérico de la solución del problema de contorno de Poisson (4.1) se ha utilizado el método de los elementos finitos con mallas tipo triángulo con tres nodos y un grado de libertad por nodo. Se ha utilizado mallas tipo adaptativa sobre las regiones donde la función $a(x)$ es discontinua y se ha generado un programa en computadora que implementa el método de los elementos finitos. De las simulaciones numéricas en [11] se ha podido observar que la solución $u(x)$ presenta valores muy grandes sobre la región donde la función $a(x)$ es discontinua, llegando a determinar que el comportamiento de la solución es afectada por la discontinuidad de $a(x)$ y no de la función externa $f(x)$. En aplicaciones concretas, es importante calcular soluciones aproximadas con un grado de precisión donde el principal obstáculo es la dimensión infinita del espacio de Hilbert V . Muchas veces, sin embargo, V puede ser escrito como la unión de subespacios finito dimensionales, así que, en principio, esto puede ser razonable para obtener soluciones aproximadas por la ecuación de proyección $a(u, v) = l(v)$ sobre los espacios $V_N \subset V$. En principio, cuanto mayor sea la dimensión del subespacio, mejor debería ser el grado de aproximación. El método de Galerkin proporciona una forma sistemática de obtener aproximaciones finito dimensionales convergente de problemas variacionales [11].

El método de los elementos finitos es uno de los métodos más empleados en el mundo entero tanto en las ciencias de la ingeniería como en el área de los problemas

tecnológicos. El mismo es esencialmente el método de Ritz con una base de funciones de aproximación especialmente diseñada [20]. Se trata de un procedimiento mediante el cual un dominio dado es representado como una colección de dominios simples denominados elementos finitos. De esta forma es posible construir de manera sistemática las funciones de aproximación necesarias para la resolución del problema en cada elemento.

6. PROBLEMAS EN DOMINIOS IRREGULARES

La ecuación de Poisson puede estar definida en geometrías dadas como en una esfera de dimensión dos [17]. Sea S_n la esfera unitaria en R^{n+1} de estructura interna Riemanniana. El problema de Dirichlet sobre S_n consiste en resolver

$$(6.1) \quad -\Delta_{s_n} u = f \text{ sobre } S_n$$

donde Δ_{s_n} es el operador de Laplace-Beltrami con respecto a la estructura Riemanniana de la esfera S_n . Diremos así mismo que, (6.1) es la ecuación de Poisson en S_n . De modo explícito, el operador Δ_{s_n} para una función u diferenciable en una vecindad de S_n se calcula así determinando el gradiente en R^{n+1} , que luego se proyecta sobre el espacio tangente al punto $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_n$ [17]. En seguida habiendo prolongado el campo así obtenido a un abierto que contiene la esfera de modo que siga siendo tangente a las esferas interiores y exteriores, tomando su divergencia, la que da en los puntos de la esfera S_n el valor del operador de Laplace-Beltrami en la función u . El objetivo es buscar soluciones aproximadas a la ecuación (6.1) mediante dos métodos. El primero es el método de elementos finitos de Galerkin y el segundo el método de Fourier fundado en la teoría de los valores propios del operador de Laplace-Beltrami. En cada uno de los casos se desarrollan los fundamentos teóricos y se construyen el software apropiado para la solución del problema.

Recientemente, con el objeto de ser usadas para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales en dominios de forma irregular empleando diferencias finitas, se han propuesto varios métodos variacionales eficientes y robustos para generar mallas estructuradas, convexas y suaves que funcionan bien en dichas regiones. Para esas mallas, se han desarrollado también algunos esquemas de los cuales destaca la facilidad computacional que implica el usar una estructura lógicamente rectangular [18]. Este hecho los convierte en una alternativa de interés a los métodos de elementos finitos que emplean mallas no estructuradas, pues estas últimas tienen el inconveniente de que su programación requiere con frecuencia de una estructura de datos compleja. Sin embargo, hay que reconocer que dado que la triangulación de Delaunay se conoce de tiempo atrás, los métodos de elemento finito tienen la ventaja de que se ha estudiado el problema en muchos contextos y existe abundante literatura que describe como ensamblar eficientemente sistemas para aproximar la solución de una gran variedad de ecuaciones [19]. Así, surge de manera natural la pregunta de que tan competitivos son los elementos y/o diferencias finitos en las mallas estructuradas generadas variacionalmente en regiones muy irregulares y que con frecuencia tienen elementos elongados para obtener una solución numérica en forma computacionalmente sencilla empleando mallas estructuradas y al mismo tiempo con precisión razonable empleando elementos finitos.

Como se puede ver en los experimentos en [19], es posible generar aproximaciones numéricas con buena precisión empleando mallas estructurales convexas generadas por métodos variacionales. Esto presenta una mejora al compararlo con modelos que se basan en dominios rectangulares, los cuales son una aproximación pobre a ciertos dominios de problemas reales.

7. CONCLUSIONES

1. Es necesario estudiar más a fondo los problemas a resolver para que le sea factible a una computadora poder dar buenas aproximaciones a las soluciones que se desean. De lo contrario a pesar del gran poder que tienen actualmente no serán solubles sin el análisis apropiado, es por ello que se debe hacer un esfuerzo por entender el marco teórico en el que viven los problemas que queremos resolver, así como de las capacidades reales que tiene la computadora, con el fin de obtener soluciones útiles que nos acerquen más a una mejor comprensión.
2. Es indispensable comprender el fundamento teórico de los esquemas de solución numérica, así como hacer un análisis previo de las EDP's a resolver contribuye a elegir adecuadamente el método numérico a utilizar.
3. En las soluciones numéricas que se han obtenido con el método de elementos finitos para el problema de contorno de Poisson con coeficientes discontinuos, la discontinuidad del coeficiente $a(x)$ sobre ciertas regiones del dominio, afecta el comportamiento de la solución numérica produciendo valores muy variantes.
4. Dado que las implementaciones se basan en mallas rectangulares, su implementación puede efectuarse de una forma muy sencilla; en contraste, para aplicarse eficientemente, las implementaciones que se basan en mallas no estructuradas requieren una estructura de datos mucho más complicada.
5. Es posible aproximar la solución de una ecuación diferencial de Poisson en una esfera tanto por el método de Galerkin como el método de Fourier. Los logros en teoría más notables son una fórmula para calcular el producto interno de los gradientes de funciones nodales lo que hace posible independizarse de una parametrización de la superficie y nos permite calcular de forma precisa los elementos de la matriz que resultan en el problema de Galerkin cuya utilidad se extendiera al caso de una ecuación de Poisson no lineal.

REFERENCIAS

1. Rojas, S. (2007), El Estado del Arte como estrategia de la formación en la investigación. En: Revista Studiosita, 2(3) 5-10. Bogotá. Universidad Católica de Colombia.
2. Pao, C.V., Wang Y. (2012) Numerical methods for fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics, 292 (2016) 447468 doi: 10.1016/j.cam.
3. Antonietti, P., Verani, M., Zikatanov, L., (2015), A two-level method for mimetic finite difference discretizations of elliptic problems. Computers and Mathematics with Applications. doi: 10.1016/j.camwa.
4. (2014), Prioridades de investigación UNAH 2015-2019 ejes y temas prioritarios.
5. (2019), Líneas de Investigación de la Maestría en Matemáticas.
6. Ahn, J., Kang, S., Kwon, Y., (2009), A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. Mathematical and Computer Modelling, 51 (2010) 247-255. doi: 10.1016/j.mcm.2009.08.012.

7. Zapata, M., U., Itz, R. (2017). High-order implicit finite difference schemes for the two-dimensional Poisson equation, *Applied Mathematics and Computation*, 309 (2017) 222244. doi: 10.1016/j.amc.
8. Ahn, J., Kang, S., Kwon, Y., (2009), A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 (2010) 247-255. doi: 10.1016/j.mcm.2009.08.012.
9. Gosse, L., (2017). Dirichlet-to-Neumann mappings and finite-differences for anisotropic diffusion. *Computers and Fluids*, 156 (2017) 5865. doi: 10.101. 2017.
10. Lapidus, L., Pinder, G., (1999) Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, Ed. Wiley Interscience Publication, New York
11. MARIA Cotrina, M., Lara, L., Rubio, O. (2015) Elemento finito adaptativo en la solución de la ecuación de Poisson con coeficientes discontinuos. Vol. 02(01): 1-19 (2015) ISSN: 2411-1783 (versión electrónica)
12. Cascón, C., Kreuzer, K.(2009) Método de Elementos Finitos Adaptativo: Convergencia y Optimalidad, Univ. de Salamanca, Univ. Augsburg, Univ. Maryland.
13. Lara, L.(2009) Método del elemento finito para un acuífero confinado, Tesis de Doctorado, Biblioteca de Posgrado UNT.
14. Leonid, P., Grossi, R.(2003) La Ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica, *Rev. Int. Met. Num. Calc. Dis. Ing.*,19,3: 383-394.
15. Burden, R. L., Faires, J. D. (1998) *Análisis Numérico*, Madrid, España: International Thompson Editores.
16. Moysi, A. (2017) Nuevo método numérico de resolución de ecuaciones elípticas en derivadas parciales.
17. Mejmissani, N. (2006) Solución numérica de la ecuación de Poisson en la esfera S_2 mediante los métodos de Galerkin y de Fourier.
18. Chávez, A., Cortés, A., Tinoco, J. (2002) A direct finite difference scheme for solving PDEs over general two dimensional regions. *Applied Numerical Mathematics*. 40:219-233
19. Domínguez, M., Equihua, M., Mendoza, S. (2010) Solución de ecuaciones diferenciales elípticas en regiones planas irregulares usando mallas convexas generadas por métodos variacionales empleando elementos finitos. *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 26: 187-194.
20. Zienkiewicz, O., Taylor, R. (2000) *The finite element method*, 5a edición, Butterworth-Heinemann, Vol. I, II, III.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS, TEGUCIGALPA MDC
Current address: Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Tegucigalpa MDC
E-mail address: vrayanayala@gmail.com

BREVE ESTUDIO DE LAS FUNCIONES DE GREEN

ARMANDO JOSÉ RAMOS PLANAS

ABSTRACT. Este artículo es una revisión bibliográfica de algunas aplicaciones de la ecuación del calor no homogénea en estado no estacionario, en estos casos esta condición particular para efectos de problemas aplicados se conoce como fuente, esta puede ser una función o una constante distinta de cero, en estos problemas los autores hicieron uso de técnicas analíticas, siendo el método de las Funciones de Green (FG) la técnica mas usada para la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas. Se explica de manera breve algunos problemas de transferencia de calor que fueron abordados por los autores, teniendo así un panorama general de las funciones de Green y las aplicaciones en problemas de ciencias e ingeniería en el estudio del fenómeno de transferencia de calor.

INTRODUCCIÓN

El fenómeno de transferencia de calor es uno de los mas estudiados debido a que tiene muchas aplicaciones en diferentes campos de las ciencias, de manera general este es representado mediante una Ecuación Diferencial Parcial (EDP). Debido a la gran cantidad de problemas en los cuales esta ecuación puede ser aplicada para obtener un modelo exacto o una aproximación numérica, pueden presentarse problemas con distintas geometrías y dimensiones al igual que una infinidad de condiciones iniciales y de frontera, siendo estos factores determinantes para saber el nivel de dificultad de un problema.

En el presente trabajo se hace un enfoque a la ecuación del calor no homogénea, el término no homogéneo significa que la EDP está igualada a una función o una constante diferente de cero, para resolver este tipo de problemas se usará el método de las Funciones de Green (FG) el cual es el método analítico usado para resolver problemas de EDP no homogéneos.

1. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo se enfoca en el estudio de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), debido a que son una rama muy importante de las matemáticas y a su uso para explicar fenómenos naturales, sociales y económicos, estos de manera cuantitativa pueden ser representados por EDP, por ello resolver problemas que los expliquen se reduce a resolver una o varias EDP, la importancia de las FG se encuentra en que proporcionan un método para resolver EDP no homogéneas de manera analítica.

Sabiendo la importancia que tienen las EDP para poder describir problemas aplicados a la realidad y ante los desafíos que enfrenta Honduras, la Universidad

Key words and phrases. Funciones de Green, Transferencia de calor, Fuente.

Nacional Autónoma de Honduras (UNAH) como parte de su responsabilidad de vinculación con la sociedad actualmente ha desarrollado diferentes líneas de investigación, siendo algunas de ellas: población y condiciones de vida, ambiente, biodiversidad y desarrollo, los problemas representados en estas líneas de investigación son fenómenos naturales, sociales y económicos.

La Maestría en Matemáticas con Orientación en Ingeniería Matemática siendo parte de la UNAH tiene entre sus líneas de investigación las siguientes áreas: Modelación Matemática y Métodos Numéricos para resolver Ecuaciones Diferenciales, este trabajo se enmarca dentro de estas líneas.

2. ANTECEDENTES

De [6] se hace un resumen del desarrollo histórico de las FG aplicadas a las ecuaciones más importantes:

En 1828 Green (1793-1841) publicó un ensayo llamado “Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism”. En este trabajo Green buscó determinar el potencial eléctrico a través de un vacío limitado por conductores con potenciales específicos, en la notación usada actualmente se puede decir que examinó las soluciones de $\nabla^2 u = -f$, dentro de un volumen V que satisface ciertas condiciones de frontera a través de la superficie S . Para resolver este problema Green primero considero un caso donde la fuente es una carga puntual.

2.1. Ecuación de Potencial. Después de un corto período de tiempo de la publicación de Green en el continente europeo el matemático alemán y pedagogo Neumann (1832-1925) desarrolló el concepto de Funciones de Green (FG) como una aplicación para el problema de potencial en dos dimensiones (en contraste con la aplicación de tres dimensiones) de la ecuación de potencial. Usando coordenadas elípticas el rederivó la fórmula integral de Poisson y desarrolló una expansión de eigenfunciones para la FG en dos dimensiones. En 1875 Meutzer (1849-1914) extendió el trabajo de Neumann en particular obtuvo la FG para una región dentro de una elipse y un círculo. Finalmente en su libro “On the Logarithmic Potential”, A Harnack (1851-1888) dió las FG para un círculo y un rectángulo. Todos estos autores usaron la técnica que sería una de las fundamentales en la construcción de FG llamada expansión por eigenfunciones.

2.2. Ecuación del Calor. Uno de los primeros que abordó el problema fue William Thompson (Lord Kelvin) (1824-1907), en su solución de la ecuación del calor en una dimensión con condiciones iniciales y de frontera homogéneas usando integrales de Fourier, en 1887 Hobson (1856-1933) generalizó el método de Kelvin para dos y tres dimensiones, en 1892 Bryan (1864-1928) escribió la solución como la suma de dos partes las cuales fueron un término fuente más una solución homogénea, así la solución total satisface las condiciones de frontera. A mediados de 1920, Doetsch (1892-1977) escribió una serie de artículos en transferencia de calor, en particular consideró el problema de conducción de calor en una dimensión con condiciones iniciales y de frontera no homogéneas. El aspecto revolucionario de Doetsch fue el enfoque del uso de la transformada de Laplace. En 1932 Goldstein (1903-1989) mostró como la Transformada de Laplace puede ser usada para resolver muchos problemas de conducción de calor cuya derivación hasta ese momento había sido muy difícil.

2.3. Ecuación de Helmholtz. El origen de esta ecuación viene del estudio de vibraciones forzadas en estado estacionario gobernado por la ecuación de ondas, la aplicación más famosa es la difracción de ondas de luz acústicas y ondas de luz visible [6], las FG involucrando la ecuación de Helmholtz iniciaron con el trabajo teórico de Helmholtz (1821-1894) durante sus estudios de acústica. A inicios del siglo XX se realizaron muchos estudios de la ecuación de Helmholtz, el primero fue realizado en 1912 por A. Sommerfeld (1868-1951) el cual abordaba el tema de las FG para regiones con y sin fronteras.

2.4. Ecuación de la Onda. Al poco tiempo de la publicación de Green, las FG fueron usadas para resolver la ecuación de la onda. En 1860 Riemann (1826-1866) aplicó el método de las FG para integrar la ecuación hiperbólica que describe la propagación de las ondas de sonido. En 1882 Kirchhoff (1824-1887) tenía claro que la resolución de la ecuación de ondas involucraba una función que se llama actualmente Delta de Dirac. A inicios del siglo XX se vió un desarrollo de la transformada de Laplace para resolver la ecuación de la onda en adición a métodos previamente conocidos como el de la transformada de Fourier. En 1914 Bromwich (1875-1929) demostró como las transformadas de Laplace pueden ser usadas para resolver la ecuación de la onda por medio de la eliminación de la variable temporal, dejando un problema de condiciones de frontera.

2.5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). La aplicación de las FG para EDO inició en 1894 con Burkhardt (1861-1914), se preguntó si se podían usar las FG para:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x), \quad a < x < b$$

En 1903 Bocher (1867-1918) dió las propiedades de la FG para una ecuación homogénea lineal de orden n , en 1911 Bocher dió la justificación matemática en su tratado de EDO probando que existe una FG para una EDO de orden n y que esta función es única, mas adelante probó que la FG es simétrica $g(x | \xi) = g(\xi | x)$. En 1910 Sommerfeld (1868-1915) examinó la solución de un oscilador armónico simple en un intervalo $0 < x < L$ cuando las condiciones de frontera son $g(0 | \xi) = g(L | \xi) = 0$.

3. FUNCIONES DE GREEN

Nomenclatura	
$T(x,y,z,t)$ Función temperatura	$g(x,y,z,t)$ Función fuente
L_x Dominio en la dirección x	L_y Dominio en la dirección y
L_z Dominio en la dirección z	t tiempo
$G(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$ Función de Green	$\delta()$ Delta de Dirac
<i>Símbolos griegos</i>	(x,y,z) Coordenadas en los ejes
α Difusividad térmica	λ Conductividad térmica

Definición 3.1. [6] Una Función de Green es una solución básica de una ecuación diferencial específica con condiciones de frontera homogéneas, para la transferencia de calor en estado no estacionario. Una Función de Green describe la distribución de temperatura causada por un impulso instantáneo de calor.

De [7] se enuncian las siguientes definiciones y propiedades necesarias para el cálculo de las FG.

Definición 3.2. Llamada también función de impulso unitario, juega un papel central en el método de las FG, en este apartado se definirán sus propiedades mas importantes.

Se define la función Delta de Dirac para dos dimensiones de la siguiente manera:

$$(3.1) \quad \delta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$$

Generalizando la función Delta de Dirac para n dimensiones:

$$(3.2) \quad \delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1)\delta(x_2), \dots, \delta(x_n)$$

La derivada de la función escalón unitario es igual a la función Delta de Dirac:

$$(3.3) \quad \frac{dH(t - \tau)}{dt} = \delta(t - \tau)$$

La transformada de Laplace de la función Delta de Dirac es:

$$(3.4) \quad \mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = e^{-s\tau}$$

3.1. Algunas Generalidades de las Funciones de Green. De se considera una EDP no homogénea de la forma :

$$(3.5) \quad L_x u(x) = f(x)$$

Donde $x = (x, y, z)$ es un vector de tres o más dimensiones, L_x es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes $u(x)$ y $f(x)$ una función. La FG satisface la ecuación:

$$(3.6) \quad L_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

Donde $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ multiplicando (3.6) por $f(\xi)$ y haciendo la integración sobre la variable espacial siendo $dV = d\xi d\eta d\zeta$.

$$(3.7) \quad \int_V L_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_V \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x)$$

$$(3.8) \quad L_x \left[\int_V G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right] = f(x)$$

Haciendo la comparación con (3.5) se concluye que

$$(3.9) \quad u(x) = \int_V G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

La ecuación (3.9) es aplicable para cualquier número finito de componentes, en consecuencia el método de las FG puede ser aplicable a cualquier EDP lineal con coeficientes constantes no homogénea.

3.2. Aplicación a la ecuación del calor. [7] Considere la ecuación tridimensional del calor con una fuente:

$$(3.10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u + g(x, y, z) = 0$$

donde $g(x, y, z) \neq 0$ y $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace en tres dimensiones.

[6] Para resolver el problema se definen las condiciones:

- (1) Dirichlet, en el fenómeno de transferencia de calor determina la temperatura en la frontera.
- (2) Neumann, determina el flujo de calor.
- (3) Condición inicial, la temperatura en la que se encuentra el sistema al momento de estudiarlo.

Estas condiciones generalmente son las más comunes en problemas de transferencia de calor.

De (3.6) se transforma (3.10) dando como resultado:

$$(3.11) \quad \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - r_0)\delta(t - \tau)$$

[7] Donde r_0 denota la posición de la fuente, se necesita que la FG satisfaga la forma homogénea de la ecuación (3.10), lo que implica que la FG va a satisfacer las condiciones de Dirichlet homogéneas o no homogéneas.

3.3. Función de Green con condiciones de frontera infinitas. Se aborda el caso más simple para un problema de la ecuación del calor con coordenadas cartesianas en una dimensión, representada por:

$$(3.12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(x, t)$$

donde α es la difusividad térmica con condiciones de frontera: $-\infty < x < \infty$ y condición inicial $u(x, 0) = 0$. Para cumplir con los objetivos de este trabajo se realizó parcialmente el cálculo de la FG para este problema. De (3.11) la FG de la ecuación (3.12) viene dada por:

$$(3.13) \quad \frac{\partial G}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad -\infty < x, \xi < \infty$$

Con condición inicial $G(x, t, \xi, \tau) = 0$.

Se comienza por calcular la transformada de Laplace para (3.13) con respecto a t llegando a la siguiente ecuación:

$$(3.14) \quad sG - \alpha^2 \frac{dG}{dx^2} = -\delta(x - \xi)e^{-s\tau}$$

Calculando la transformada de Laplace se obtiene una EDO cuya única variable es la espacial, debido a que se está trabajando en un dominio infinito, se calcula la transformada de Fourier de (3.14)

$$(3.15) \quad sG + \alpha^2 k^2 G = e^{-i\xi k} e^{-\tau s}$$

Haciendo arreglos algebraicos se obtiene:

$$(3.16) \quad \frac{s}{\alpha^2} G + k^2 G = \frac{e^{-i\xi k} e^{-\tau s}}{\alpha^2}$$

Sea $q^2 = \frac{s}{\alpha^2}$ agrupando terminos se llega a la siguiente expresión

$$(3.17) \quad (q^2 + k^2)G(k, s|\xi, \tau) = \frac{e^{-i\xi k} e^{-\tau s}}{\alpha^2}$$

Despejando para $G(k, s | \xi, \tau)$

$$(3.18) \quad G(k, s|\xi, \tau) = \frac{e^{-i\xi k} e^{-\tau s}}{q^2 + k^2}$$

De [5] [6], la transformada inversa de Fourier de (3.18) para la variable espacial se llega a la siguiente integral:

$$(3.19) \quad G(x, s|\xi, \tau) = \frac{e^{-\tau s}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x-\xi)k}}{q^2 + k^2} dk$$

Dando como resultado:

$$(3.20) \quad G(x, s|\xi, \tau) = \frac{e^{\frac{-|x-\xi|\sqrt{s}}{\alpha-s\tau}}}{2\alpha\sqrt{s}}$$

Realizando la transformada inversa de Laplace de (3.20)

$$(3.21) \quad G(x, t|\xi, \tau) = \frac{H(t-\tau)}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} \exp \left[\frac{(x-\xi)^2}{\sqrt{4\pi a^2(t-\tau)}} \right]$$

Donde (3.21) es la FG para la ecuación del calor en una dimensión, en general el método para calcular la FG de problemas con condiciones de frontera infinitas, se resume en calcular la transformada de Laplace para la variable temporal y la transformada de Fourier para la variable espacial y sus inversas.

3.4. Función de Green con condiciones de frontera finitas. Cuando se resuelve un problema con condiciones de frontera finitas, es necesario hacer una expansión en eigenfunciones, esta proviene del problema clásico de Sturm-Liouville, de [6] las FG para coordenadas rectangulares en una dimensión y la función Delta de Dirac son:

$$(3.22) \quad G(x | \xi) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} D_m \sin \left(\frac{n\pi\xi}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$(3.23) \quad \delta(x - \xi) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi\xi}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Lo siguiente esta basado en [4], [5], [6] y [7], donde se resuelve el problema de calcular la función de Green para la ecuación de calor de una dimensión en coordenadas cartesianas finitas, como se mencionó la solución viene dada por una expansión de eigenfunciones.

El problema de la Ecuación del Calor en una dimensión con coordenadas rectangulares viene representado por:

$$(3.24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y), \quad 0 < x < L \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = 0$$

De (3.11) la ecuación (3.24) se transforma en:

$$(3.25) \quad \frac{\partial g}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau), \quad 0 < x, \xi < L \quad 0 < t, \tau$$

Las condiciones de frontera de (3.24) se transforman en:

$$(3.26) \quad g(0, t | \xi, \tau) = g(L, t | \xi, \tau) = 0$$

Se define la condición inicial $g(x, 0 | \xi, \tau) = 0$ [4], [5].

Con el mismo objetivo del problema (3.13) Se hace el cálculo parcial de la FG para (3.25).

Para encontrar la FG se calcula primero la transformada de Laplace de (3.25).

$$(3.27) \quad \frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{s}{\alpha^2} G - \frac{1}{\alpha^2} \delta(x - \xi) e^{-s\tau} = 0$$

Calculando la segunda derivada de (3.22) y sustituyendo en (3.27) se obtiene:

$$(3.28) \quad \frac{d^2 G}{dx^2} = -\frac{2}{L} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} D_m \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(3.29) \quad \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D_m + \frac{s}{\alpha^2} D_m - \frac{e^{-s\tau}}{\alpha^2} \right) = 0$$

Donde $k_n = \frac{n\pi}{L}$, despejando para D_m en (3.29) se obtiene

$$(3.30) \quad D_m = \frac{e^{-s\tau}}{\alpha^2 k_n^2 + s}$$

Sustituyendo en (3.22)

$$(3.31) \quad G(x, s | \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-s\tau}}{\alpha^2 k_n^2 + s} \right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De [6], [5] se calcula la transformada inversa de Laplace de (3.31)

$$(3.32) \quad G(x, t | \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k_n^2 \alpha^2 (t-\tau)} \right] H(t - \tau)$$

Donde (3.32) es la FG para la ecuación del calor en una dimensión en coordenadas cartesianas, en general el método para calcular la FG de problemas con condiciones de frontera finitas, se resume en calcular la transformada de Laplace para la variable temporal y hacer la expansión en eigenfunciones para la variable espacial.

De [4], [6] y [7] se enuncia de manera breve el método de cálculo de FG para problemas de más de una dimensión con condiciones de frontera finitas.

3.5. Método de los Productos. Para calcular las FG se han usado métodos integrales y expansión por eigenfunciones, en el caso de mas de una dimensión para coordenadas rectangulares, en general una FG más de en una dimensión es la multiplicación de varias FG en una dimensión.

$$(3.33) \quad G_{XYZ} = G_X G_Y G_Z$$

De [6], [7] la ecuación del calor en tres dimensiones se representa:

$$(3.34) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z, t) = 0$$

De (3.6) la ecuación (3.34) se convierte en:

$$(3.35) \quad \frac{\partial g}{\partial t} - \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) = \delta(t - \xi)\delta(t - \eta)\delta(t - \zeta)\delta(t - \tau)$$

Para calcular la FG de (3.35) mediante el método de los productos es posible separar (3.35) en FG de una dimensión llegando a tres EDP más sencillas:

$$(3.36) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$$

$$(3.37) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta(y - \eta)\delta(t - \tau)$$

$$(3.38) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \delta(z - \zeta)\delta(t - \tau)$$

Para dominio finito con condiciones de frontera $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$, $0 < z < L_z$ y condición inicial $u(x, y, z, 0) = 0$ al igual que en los casos para una dimensión se descompone (3.35) y se obtienen las siguientes ecuaciones [4], [6], [7]:

$$(3.39) \quad G(x, t | \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \left(\frac{n\pi\xi}{L_x} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L_x} \right) e^{-k_n^2 \alpha^2 (t-\tau)} \right] H(t - \tau)$$

$$(3.40) \quad G(y, t | \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sin \left(\frac{j\pi\eta}{L_y} \right) \sin \left(\frac{j\pi y}{L_y} \right) e^{-j_n^2 \alpha^2 (t-\tau)} \right] H(t - \tau)$$

$$(3.41) \quad G(z, t | \zeta, \tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\sin \left(\frac{n\pi\zeta}{L_z} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{L_z} \right) e^{-l_n^2 \alpha^2 (t-\tau)} \right] H(t - \tau)$$

En este caso de manera general la FG mediante arreglos matemáticos es el producto de cada una de las FG en una dimensión.

4. CONCLUSIONES

- (1) Las Funciones de Green es uno de los métodos mas usados para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas, debido a que es una técnica analítica mediante su cálculo se puede obtener un modelo exacto de un problema.
- (2) La principal desventaja del método de las Funciones de Green es que al ser un método analítico existen muchas EDP que no se resuelven con el, debido a que el nivel de dificultad para resolver una EDP usando estos métodos depende de la complejidad de sus condiciones iniciales y de frontera, además de la ecuación por si misma. También se requiere un conocimiento muy profundo de cálculo integral y de ecuaciones diferenciales ordinarias para poder desarrollar los métodos de cálculo al momento de encontrar una Función de Green.
- (3) Para dominar el cálculo de las FG es necesario profundizar en el conocimiento de las propiedades y el cálculo de las transformadas de Fourier y Laplace así como en su cálculo inverso.

REFERENCIAS

- [1] Wang, X. (2007) Three-dimensional Green's functions for a steady point heat source in a functionally graded half-space and some related problems. *Int. J. Eng. Sci.* 45(11): 939–950. doi/10.1016/j.ijengsci.2007.07.003
- [2] Venkataraman, S. (2002) Temperature distribution in spacecraft mounting plates with discrete heat generation sources due to conductive heat transfer. *Int. Acad. of. Astronaut.* 53(3): 173 – 183. doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00201-1
- [3] Beck, J. (1986) Green's Functions and Numbering System for Transient Heat Conduction, *Int. J. of Mass and Heat Transf.* 27(8): 1235-1244. doi.org/10.1016/0017-9310(84)90051-6
- [4] Kidawa-Kukla, J. (2007) Temperature distribution in a rectangular plate heated by a moving heat source. *Int. J. of Mass and Heat Transf.* 51(3-4): 865-872. doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.04.011
- [5] Adam Hasam A (2017) Green's Function for the Heat Equation, *Fluid Mech Open Acc.* 4(2): 152. doi: 10.4172/2476-2296.1000152
- [6] Duffy, D. (2015). *Green's Functions With Applications*. 2nd ed. Boca Raton: Taylor & Francis Group, LLC.
- [7] Mying-U, T., Depnath, L., (2007). *Linear Partial Differential Equation for Scientist and Engineers*. 4th ed. Boston: Birkhäuser.

MODELO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN COLECTOR SOLAR

OSWALDO E. CUBAS

RESUMEN. En este trabajo es desarrollado un modelo para un secador solar plano considerando los distintos tipos de intercambio de energía entre sus componentes: conducción, convección y radiación. El modelo se obtiene a partir de los diferentes balances de energía que ocurren entre los materiales y el aire del calentador. Se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para el cual se aproxima la solución utilizando métodos numéricos a través de un programa desarrollado en Matlab. Los resultados muestran las variaciones en el aumento de la temperatura para las componentes individuales del colector en el tiempo.

1. INTRODUCCIÓN

La preservación de alimentos ha sido un problema de gran importancia para la supervivencia de la especie humana. Desde el surgimiento de la agricultura y los asentamientos humanos se vio la necesidad de almacenar alimentos para sobrellevar los tiempos de escasez y poca producción. A lo largo de la historia se han utilizado varios métodos de preservación de alimentos como la congelación, refrigeración, salazón y secado o deshidratación, entre otros. Actualmente, la preservación de los alimentos además de su aplicación en el auto-abastecimiento también ofrece una alternativa de producción comercial [14].

Los primeros registros de secado de alimentos que se conocen datan del siglo dieciocho [1, 16]. Para este proceso es requerido el uso de una gran cantidad de energía calorífica que provoque la pérdida de humedad en el comestible. Esta energía puede ser producida por una fuente natural aprovechando el calor producido por el sol o artificial a través de generadores de energía. El problema con las fuentes artificiales es la alta contaminación que producen o el alto costo de su mantenimiento por lo que en las últimas décadas se ha dado gran importancia al estudio de la energía solar.

El secado de alimentos al sol directamente se practica frecuentemente en los países tropicales. El ahorro es considerable con este tipo de secado ya que la energía del sol es gratuita y renovable [18]. Sin embargo, esta técnica es extremadamente dependiente del clima y el proceso es vulnerable a la contaminación, infestación o ataque microbiano. En el estudio del secado solar interfieren diferentes variables aleatorias importantes [8], las cuales se pueden ver determinadas por la región o estación del año. Para lograr un máximo desempeño en la deshidratación de los alimentos es necesario conocer como se distribuye el calor a lo largo del mecanismo de secado, por lo que con frecuencia se suele recurrir al uso de modelos matemáticos que permitan simular dicha distribución.

Palabras y frases clave. secador solar plano, balance de energía, calentador de aire.

En el estudio de la distribución de temperatura para un secador solar indirecto intervienen dos partes importantes del mecanismo: el túnel colector de viento y el compartimento de secado. En este trabajo se plantea un modelo para determinar la distribución de calor dentro del túnel colector considerando la transferencia de calor dada por la radiación del sol, la conducción del secador y la convección del viento.

2. JUSTIFICACIÓN

Actualmente, a nivel global se buscan soluciones que reduzcan el consumo de combustibles fósiles como el carbón o el petróleo para la producción de energía térmica. Muchos son los países que se están dedicando a la fabricación de nuevas tecnologías que permitan aprovechar la radiación solar para cubrir las necesidades diarias de las grandes ciudades del mundo. En países menos desarrollados las investigaciones en esta área son menos intensivas y poco difundidas, pero siguen siendo utilizados muchos métodos tradicionales que utilizan al sol como fuente de calor para muchas actividades cotidianas, entre ellas el secado de materiales y algunos alimentos.

En la producción alimentaria muchos productores de granos, hortalizas y hojas utilizan diversos tipos de secadores, cada uno de distinta forma adecuado para determinado producto. En el presente trabajo se considera un tipo de secador indirecto, el cual consiste en una cámara de secado y un colector solar inclinado, unidos entre sí en la parte inferior de la cámara, comúnmente conocido como secador de tipo armario. Este tipo de secador es de fácil construcción y muy recomendable para pequeños y medianos productores.

En Honduras, el secado de alimentos es muy utilizado para la preservación de granos básicos, frutas y hortalizas. Es frecuente el secado solar en la producción de café y cacao, siendo ambos productos de mucha importancia para la economía del país. En muchos casos el secado se hace esparciendo el comestible en grandes planchas de cemento, exponiéndolo de forma directa al sol durante determinado tiempo, pero en este proceso es más propenso a contaminantes o la proliferación de hongos. Es por eso que la exposición indirecta al calor solar es una alternativa menos riesgosa.

Cuando se trata del secado de alimentos se debe considerar una gran cantidad de factores que pueden disminuir la calidad del comestible. Entre estos factores uno de los más importantes es la cantidad de humedad que se desea quitar, pues de ser menos de la esperada podría provocar el crecimiento de hongos o bacterias, y si se deshidrata demasiado podría eliminar las propiedades nutricionales del producto resultante. Esto a su vez se encuentra fuertemente ligado al tiempo que el alimento se encuentra expuesto al calor y a la cantidad de calor que recibe.

Tratar de encontrar el punto ideal para un secado óptimo de forma experimental puede incurrir en gastos innecesarios de materiales, pérdida de tiempo y desembocar en una considerable pérdida económica. Este problema puede evitarse mediante el desarrollo de un modelo matemático que permita simular computacionalmente el proceso de secado considerando variables como la velocidad del viento, la posición del sol, temperatura, entre otras. Esto además de reducir claramente los costos de producción, permite la evaluación de diferentes escenarios con pequeñas modificaciones en los parámetros.

3. ANTECEDENTES

El estudio de la preservación de alimentos por secado o deshidratación se ha realizado desde hace varias décadas con importantes avances teóricos y tecnológicos. Una amplia revisión bibliográfica ha sido proporcionada por [9] y [10]. Según [16], los nuevos métodos de manipulación y procesamiento de alimentos se están estudiando constantemente con el fin de mejorar la eficiencia energética y la calidad del producto. Los avances en las técnicas y el desarrollo de nuevos métodos de secado han puesto a disposición una amplia gama de productos deshidratados.

De manera general, sin importar el tipo de secador que se utilice, al realizar un estudio sobre el secado de materiales o alimentos se consideran las propiedades físicas y químicas de deshidratación del alimento [9] como la transferencia de calor por convección del viento como partes principales de la investigación. La deshidratación del material involucra la pérdida de agua mediante la exposición al calor por lo que este problema es considerado físicamente como una operación de transferencia de masa y calor combinados [10].

En el producto, el agua se transfiere por gradientes de concentración [8], donde el vapor avanza de los puntos de mayor concentración a los de menor concentración. Una variable importante a considerar es la velocidad de secado, la cual se considera constante en sus inicios como indica [10], donde el tiempo de secado durante esta velocidad es constante y puede determinarse aplicando las ecuaciones de transferencia de calor o de masa. Se ha demostrado en [7] que la tasa de secado es proporcional a la depresión de humedad para varias hortalizas, especialmente en los bulbos, aunque cuando la humedad relativa del aire es inferior a aproximadamente el 40 % de la tasa, el secado es independiente de la depresión de humedad.

El secado por conducción solar ha sido fuente de investigación en muchos países en vías de desarrollo como una alternativa para fomentar a los productores. Muchas investigaciones se basan en estudiar el secado de un determinado alimento o material utilizando un diseño de secador ya probado en otros trabajos o generando una estructura novedosa como es el caso de las investigaciones sobre el secado de rizomas de cúrcuma [2], secado de café [17], secado de cacao [6, 13] o el secado de ebonia (*Diospyros Crassiflora*) [19], que es un tipo muy preciado de madera tropical.

En su mayoría, el secado de estos productos ha sido abordado mediante modelación numérica y simulaciones hechas por computadora. Para esto son utilizados distintos tipos de software especializados en cálculo numérico, como es en el caso para el secado de cacao [13] en Matlab. Se trata de un problema de transferencia de calor que involucra la solución de una ecuación diferencial parcial que fácilmente es simulado con el PDE toolbox de Matlab, que hace un mallado utilizando elemento finito, permitiendo generar curvas de deshidratación para el grano de cacao. Otras herramientas han sido utilizadas para generar curvas de regresión no lineal en el secado de cúrcuma como Sigma Plot [2] o el uso de ANSYS [15] para simulaciones con elemento finito.

Por otro lado, es importante el estudio de las condiciones del secador utilizado así como las condiciones del viento y temperatura en la región. La complejidad del modelado de un secador solar se ve determinada por las tantas variables aleatorias presentes en el medio. La irradiación solar es función del sitio y no es constante durante un día, siempre se desconocen una pérdida de calor en la unidad de secado y las condiciones iniciales de los componentes del secador, la posible no uniformidad

de temperatura y humedad en las muestras y del secador y los intercambios de calor dados por las paredes del secador [19].

Diferentes investigaciones modelan el secado de materiales restando importancia a algunos de estos factores, ya sea asumiendo que el aire del secador es constante, ignorando los intercambios térmicos en las paredes del secador o asumiendo que la humedad y la temperatura se distribuye en el material o alimento de manera uniforme [2, 19]. Generalmente, el análisis de temperaturas del colector y el compartimento de secado se hace por separado, debido a que algunos de los factores que afectan al colector no necesariamente son considerados en el compartimento y viceversa.

4. ANÁLISIS DE ENERGÍA DEL COLECTOR SOLAR PLANO

Un colector solar plano generalmente esta compuesto de una cubierta transparente, un túnel de viento y una placa que permite absorber la luz solar e irradiar calor.

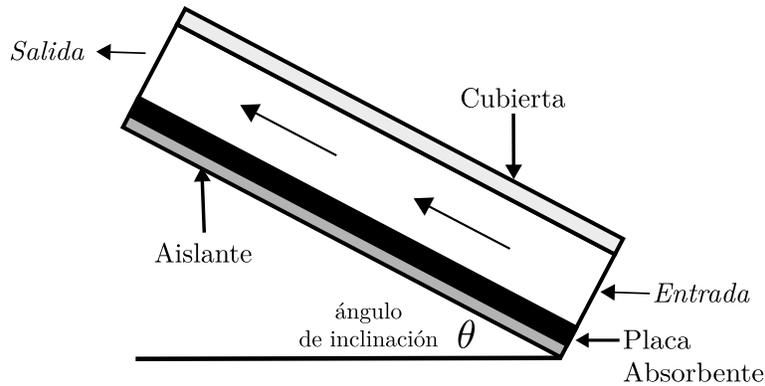


FIGURA 1. Diseño de un colector solar [11]

Un colector solar basa su funcionamiento en el efecto invernadero. Al utilizar una cubierta de vidrio sobre una superficie absorbedora se produce dicho efecto, donde el vidrio permite el paso de la radiación incidente que proviene del sol, pero dificulta la radiación emitida por la superficie absorbedora, es decir, el vidrio tiene gran transmisividad frente a la radiación solar, pero baja transmisividad frente a la radiación que emite la superficie absorbedora.

4.1. Balance de energía. La primera ley de la termodinámica, también conocida como principio de conservación de la energía, expresa que la energía total de un sistema en el curso de un proceso es igual a la diferencia entre la energía total que entra y la energía total que sale en el desarrollo de ese proceso. Es decir,

$$(4.1) \quad E_{sistema} = E_{entra} - E_{sale}$$

Considerando un sistema de flujo estacionario para el colector con una entrada y una salida de aire, la velocidad del flujo de masa hacia adentro del volumen de control debe ser igual a la velocidad del flujo de masa hacia afuera de él; es decir, $m_{entra} = m_{sale}$. Cuando los cambios en las energías cinética y potencial son

despreciables y no se tiene interacción de trabajo, el balance de energía para tal sistema se reduce a

$$(4.2) \quad Q = m_a c_p \Delta T = m_a c_p (T_s - T_e)$$

donde Q es la velocidad de transferencia neta de calor, m_a el flujo de aire del colector, c_p el coeficiente de calor del aire y ΔT la diferencia de temperaturas de entrada y salida del sistema [4].

4.2. Mecanismos de transferencia de energía. El calor se puede transferir por conducción, convección y radiación. Todos los modos de transferencia de calor requieren la existencia de una diferencia de temperatura y la transferencia se da del medio que posee la temperatura más elevada hacia el de temperatura más baja.

4.2.1. Conducción. Este proceso ocurre por el paso de energía entre partículas adyacentes. La rapidez o razón de la conducción de calor a través de un medio depende de su geometría, espesor y material que lo forma, así como de la diferencia de temperatura a través de él. Esta razón de conducción es definida por la Ley de Fourier de conducción de calor

$$Q_{cond} = -kA \frac{dT}{dx}$$

donde Q_{cond} es el calor conducido, k es la medida de la capacidad del material para conducir calor conocida como constante de proporcionalidad de conductividad térmica y dT/dx es el gradiente de temperatura.

4.2.2. Convección. Es el modo de transferencia de energía entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacentes que están en movimiento y comprende los efectos combinados de la conducción y el movimiento de fluidos. Cuando el movimiento del fluido es forzado la convección se conoce como convección forzada y cuando el movimiento del fluido no se ve influenciado por ningún medio externo se conoce como convección natural.

La convección dentro de un colector solar puede hacerse de forma forzada, lo que permite un control más preciso de la cantidad de aire que entra y sale del túnel. Una convección natural involucra considerar las constantes variaciones en los flujos en cualquier instante de tiempo.

Convenientemente, la convección es definida por la Ley de enfriamiento de Newton como

$$Q_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

en donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección, A_s es el área superficial a través de la cual tiene lugar la transferencia de calor por convección, T_s es la temperatura de la superficie y T_∞ es la temperatura del fluido suficientemente alejado de esta superficie.

4.2.3. Radiación. Es la energía emitida por la materia en forma de ondas electromagnéticas. A diferencia de la conducción y la convección, la transferencia de calor por radiación no requiere la presencia de un medio interventor, se le conoce como radiación térmica.

La Ley de Stefan-Boltzmann expresa la razón máxima de radiación que se puede emitir desde una superficie a una temperatura termodinámica T_s como

$$Q_{max} = \sigma A_s T_s^4$$

donde σ se conoce como la constante de Stefan-Boltzmann [12] dada por

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \approx 5,67 \times 10^{-8} W/m^2$$

donde $k = 1,38064852 \times 10^{-23} J/K$ es la constante de Boltzmann, $h = 6,62607015 \times 10^{-34} kg \cdot m/s$ es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz. Una superficie que emite radiación a esta razón máxima se conoce como cuerpo negro. Una superficie real emite radiación a una razón menor que la de un cuerpo negro y se expresa como

$$Q_{emitida} = \epsilon \sigma A_s T_s^4$$

donde ϵ es la emisividad de la superficie y representa lo cerca que esta una superficie de ser un cuerpo negro, por lo que $0 \leq \epsilon \leq 1$. La diferencia entre las razones de la radiación emitida por la superficie y la radiación absorbida es la transferencia neta de calor por radiación [4].

Cuando una superficie de temperatura T_s se encuentra totalmente encerrada por otra de mayor tamaño de temperatura T_{amb} y separada por un gas que no interfiere con la radiación, la razón neta de la transferencia de calor por radiación entre estas dos superficies se da por

$$Q_{rad} = \epsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{amb}^4)$$

4.3. Balance de energía en la cubierta del colector solar. La cubierta absorbe calor por la radiación emitida por la placa absorbente (Q_{pc}) y a través de la convección del aire dentro del colector (Q_{ac}). Por lo tanto, la energía recibida por la cubierta se expresa como

$$(4.3) \quad E_c = Q_{pc} + Q_{ac}$$

donde

$$Q_{pc} = h_{rpc} A_c (T_p - T_c)$$

siendo h_{rpc} el coeficiente de transferencia de calor entre la placa absorbente y la cubierta, A_c el área de la cubierta, T_p la temperatura de la placa y T_c la temperatura de la cubierta,

$$Q_{ac} = h_{ac} A_c (T_i - T_c)$$

siendo h_{ac} el coeficiente de transferencia de calor entre el aire y la cubierta y T_i la temperatura del aire.

Luego, la cubierta pierde energía a través de la convección hacia el aire exterior y por el calor emitido por radiación de la cubierta hacia el exterior. Por lo tanto, la energía de salida de la cubierta se expresa como

$$(4.4) \quad E_s = Q_{cae} + Q_{re}$$

donde

$$Q_{cae} = h_e A_c (T_c - T_e)$$

siendo h_e el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el aire exterior y la cubierta, y T_e es la temperatura del aire exterior,

$$Q_{re} = h_{rce} A_c (T_c - T_e)$$

siendo h_{rce} el coeficiente de intercambio de calor entre la cubierta y el exterior del colector por efecto de la radiación. La energía acumulada en la cubierta es caracterizada por la variación de la energía interna

$$E_{acum} = M_c c_c \frac{dT_c}{dt}$$

entonces, sustituyendo las ecuaciones (4.3) y (4.4) en la ecuación (4.1) se obtiene

$$(4.5) \quad M_c c_c \frac{dT_c}{dt} = h_{rpc} A_c (T_p - T_c) + h_{ac} A_c (T_i - T_c) - h_e A_c (T_c - T_{ae}) - h_{rce} A_c (T_c - T_{ae})$$

siendo $M_c c_c$ la capacidad calorífica de la cubierta.

4.4. Balance de energía en la placa absorbente. La energía recibida por la placa esta dada por

$$E_e = \eta_0 I_r A_p$$

donde η_0 es la eficiencia óptica del colector, I_r es la intensidad de radiación incidente en el colector y A_p el área de la placa.

La energía expulsada por la placa proviene del calor entregado al aire en el colector (Q_{pa}), del calor que se pierde al medio exterior a través del aislante (Q_{pe}) y del calor entregado por radiación directa a la cubierta (Q_{pc}). Es decir,

$$E_s = Q_{pa} + Q_{pe} + Q_{pc}$$

sustituyendo se obtiene

$$E_s = h_{pai} A_p (T_p - T_i) + U A_p (T_p - T_e) + h_{rpc} A_c (T_p - T_c)$$

donde h_{pai} es el coeficiente de transferencia de calor por convección natural entre el aire al interior del colector y la placa absorbente y U es el coeficiente de transferencia de calor entre la placa y el aire en el exterior a través del aislante bajo la placa.

La energía acumulada en la placa está dada como

$$E_{acum} = M_p c_p \frac{dT_p}{dt}$$

siendo $M_p c_p$ la capacidad calorífica de la placa absorbente. Al sustituir todas las ecuaciones se obtiene

$$(4.6) \quad M_p c_p \frac{dT_p}{dt} = \eta_0 I_r A_p - h_{pai} A_p (T_p - T_i) - U A_p (T_p - T_e) - h_{rpc} A_c (T_p - T_c)$$

4.5. Balance de energía en el interior del colector. El aire en el interior del colector recibe energía de la placa absorbente y entrega energía a la cubierta. La energía recibida por el aire interior está dada por la ecuación

$$E_e = m_a c_{pa} T_e + h_{pai} A_p (T_p - T_i)$$

donde el primer término corresponde al flujo de entrada en el colector desde el exterior por el aire y el segundo término, a la energía recibida desde la placa

absorbente. Similarmente, la energía que sale del colector corresponde a la que abandona el colector con el aire caliente y a la energía que cede a la cubierta. Está dada por la ecuación

$$E_s = m_a c_{pa} T_s + h_{aic} A_c (T_i - T_c)$$

donde T_s es la temperatura de salida del colector y h_{aic} es el coeficiente de convección natural entre el aire en el colector y la cubierta. Luego, la ecuación general de balance de energía dentro del colector esta dada por

$$(4.7) \quad M_a c_a \frac{dT_i}{dt} = m_a c_{pa} T_e + h_{pai} A_p (T_p - T_i) - m_a c_{pa} T_s - h_{aic} A_c (T_i - T_c)$$

siendo la energía acumulada la variación de la energía interna del fluido representada en el lado izquierdo de la ecuación (4.7). Se asume que la temperatura del aire interior es igual a la media entre la temperatura de salida del aire T_s y la temperatura de entrada T_e .

4.6. Cálculo de los coeficientes. El coeficiente de transferencia de calor entre la placa absorbente y la cubierta [11] está dado por

$$(4.8) \quad h_{rpc} = \frac{4\sigma T_m}{1/\epsilon_p + 1/\epsilon_c - 1}$$

siendo ϵ_p y ϵ_c los correspondientes valores para la emisividad de los materiales y σ la constante de Stefan-Boltzmann. El coeficiente de intercambio de calor de la cubierta con el exterior [11] está dado por

$$(4.9) \quad h_{rce} = \frac{\sigma \epsilon_c (T_c^4 - T_{cielo}^4)}{T_c - T_{amb}}$$

donde T_{amb} corresponde a la temperatura del ambiente y T_{cielo} a la temperatura del cielo [5], las cuales se relacionan por la ecuación

$$T_{cielo} = 0,0552 T_{amb}^{3/2}$$

El coeficiente de transferencia de calor por convección entre el aire exterior y la cubierta h_e está dado por

$$(4.10) \quad h_e = 5,7 + 3,8 V_w$$

siendo V_w la velocidad del viento [11].

5. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En la búsqueda de soluciones de problemas que surgen del modelamiento de fenómenos reales, resulta muy costoso, o en ocasiones imposible, obtener una solución exacta. Esto debido a la complejidad del problema o a la gran de datos que resultan en el estudio. Una forma práctica es aproximar la solución real a partir de métodos numéricos.

Los métodos numéricos con que se resuelven los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden son generalizaciones de los métodos para una ecuación de primer orden. Entre estos, algunos muy conocidos son el método de Euler y los métodos de Runge-Kutta.

El método de Euler suele utilizarse cuando las ecuaciones diferenciales no tienen una solución analítica, aunque en problemas reales suele no ser de gran ayuda debido a que el error generado en la aproximación es muy grande respecto al comportamiento real de la solución. Los métodos de Runge-Kutta son una especialización de los métodos numéricos a un paso. Lo que caracteriza a un método de Runge-Kutta es que el error tiene la forma

$$E_i = Ch^k$$

Donde C es una constante real positiva y el número k es el orden del método [3]. El número de etapas del método Runge-Kutta es el número de veces que se evalúa la función en cada paso i , esto es importante porque la evaluación de la función requiere un costo computacional que aumenta a medida que aumenta el número de etapas, por eso, son preferidos métodos con un número tan mínimo de etapas como sea posible.

Un método muy utilizado es el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual permite resolver modelos analíticamente complejos con mayor exactitud en la aproximación de las soluciones y su algoritmo permite una fácil adaptación computacional.

Un método de Runge-Kutta con s etapas y orden k es un método numérico de la forma

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

con

$$k_i = f(x_n + \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, t_n + hc_i)$$

siendo a_{ij}, b_i, c_i números reales y el error verifica la condición

$$\max |x(t_i) - x_i| \leq Ch^k$$

6. RESULTADOS

Con la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante se obtiene la distribución de temperatura para la cubierta, la placa absorbente y el aire dentro del colector en cualquier instante de tiempo.

La solución del sistema se obtuvo aplicando el método de Runge-Kutta utilizando una simulación desarrollada en Matlab. En el simulador se insertó el sistema de ecuaciones diferenciales, el valor de cada una de las constantes y se calcularon los valores de los coeficientes de intercambio de calor de cada parte del colector. En la simulación se consideró la radiación con un valor constante para todo tiempo t y una temperatura ambiental de $24^\circ C$. Comúnmente, los colectores solares utilizan una cubierta transparente de vidrio que permita la entrada de la radiación y reduzca la salida del calor emitido por la placa absorbente al exterior, provocando una especie de efecto invernadero que aleva la temperatura del aire que fluye por el colector. Para la placa absorbente se utilizan materiales que sean altamente emisivos, esto permite calentar el aire con mayor facilidad. Generalmente, se utilizan placas de aluminio.

La emisividad del aluminio y vidrio es 0,92 y 0,82, respectivamente. Con estos valores se determina el coeficiente de calor en la placa y cubierta a partir de las

Material	C [$cal/g^{\circ}C$]
Aire	0.241
Aluminio	0.214
Vidrio	0.186

CUADRO 1. Coeficientes de calor específico para el aire, aluminio y vidrio

fórmulas (4.8) y (4.9). Se consideró que el flujo de viento en el colector es constante, dando una velocidad del viento de $10km/h$ se obtiene h_e utilizando la fórmula (4.10).

Cada gráfico compara el incremento de temperatura de cada parte del colector versus el tiempo transcurrido. Para el colector se establecieron medidas de 150 cm de largo, 80 cm de ancho y 5 cm de alto. Con estos datos se determinó el área de la cubierta, el área de la placa absorbente y la cantidad de flujo dentro del túnel de viento.

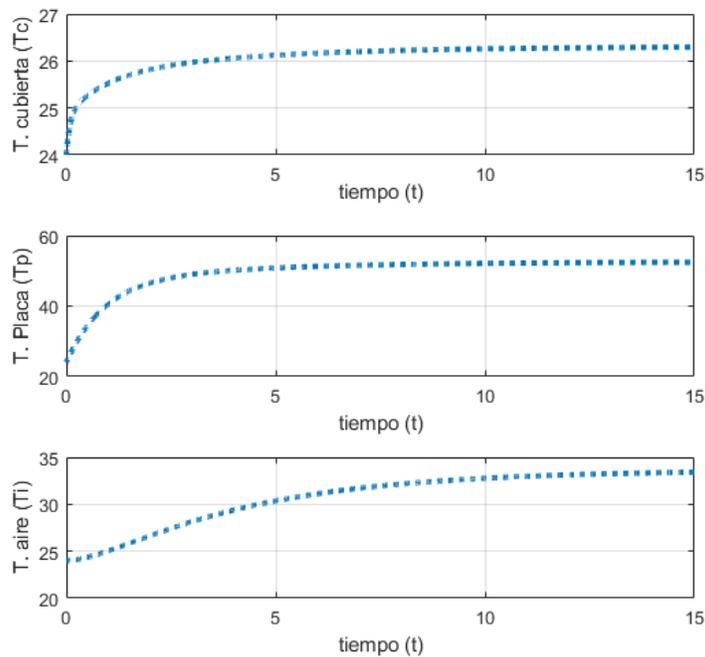


FIGURA 2. Comportamiento de la temperatura de la cubierta, placa absorbente y aire con temperatura ambiental de $24^{\circ}C$ con radiación constante de $90\text{ W}/m^2$.

La Figura 2, muestra el aumento gradual de la temperatura en el sistema en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 15$. Se aprecia en los gráficos que la temperatura de cada componente aumenta hasta adquirir una temperatura casi estable en la cubierta y la placa absorbente.

Se puede observar que la cubierta de vidrio es la que sufre un menor incremento de temperatura, esto se debe a que está expuesta directamente a la temperatura ambiental del exterior del colector. A su vez, el aumento de la temperatura en la placa absorbente se da más rápidamente que en el aire pues el aluminio tiene un coeficiente de calor específico más bajo, esto permite que se caliente con mayor facilidad.

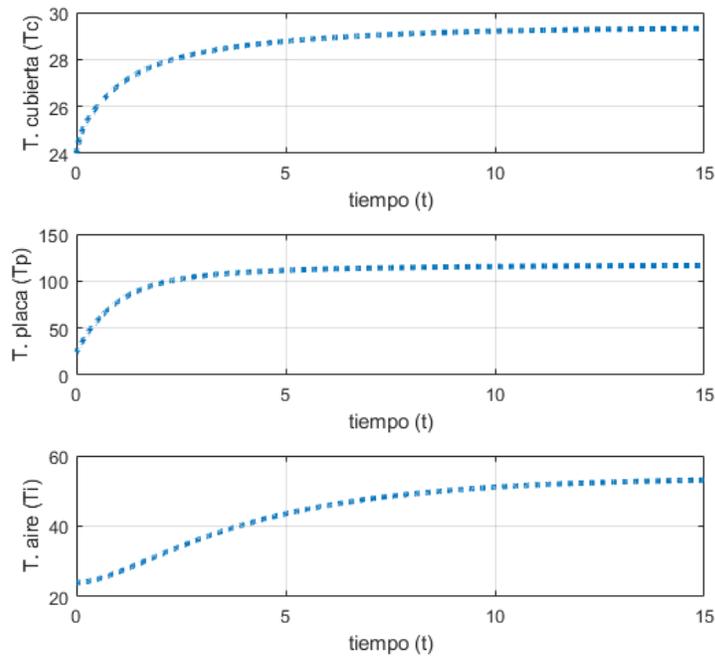


FIGURA 3. Comportamiento de la temperatura de la cubierta, placa absorbente y aire con temperatura ambiental de $24^{\circ}C$ con radiación constante de $300 W/m^2$.

En la Figura 3, se aprecia el aumento de temperatura considerando un aumento en la radiación aplicada en el sistema. Este aumento en la radiación solar provoca un aumento en la energía acumulada del colector y esto se refleja con mayor notoriedad en la gráfica de la placa absorbente y el aumento en la temperatura del aire dentro del colector.

Finalmente, en la Figura 4 se muestra el cambio en la temperatura tras una reducción en las dimensiones del colector. En esta simulación se consideró un largo de 75 cm , ancho de 40 cm y altura de 2.5 cm para el colector. Se aprecia como la reducción en las dimensiones provoca un calentamiento más lento en todas las partes que conforman el colector durante el mismo intervalo de tiempo que las simulaciones anteriores.

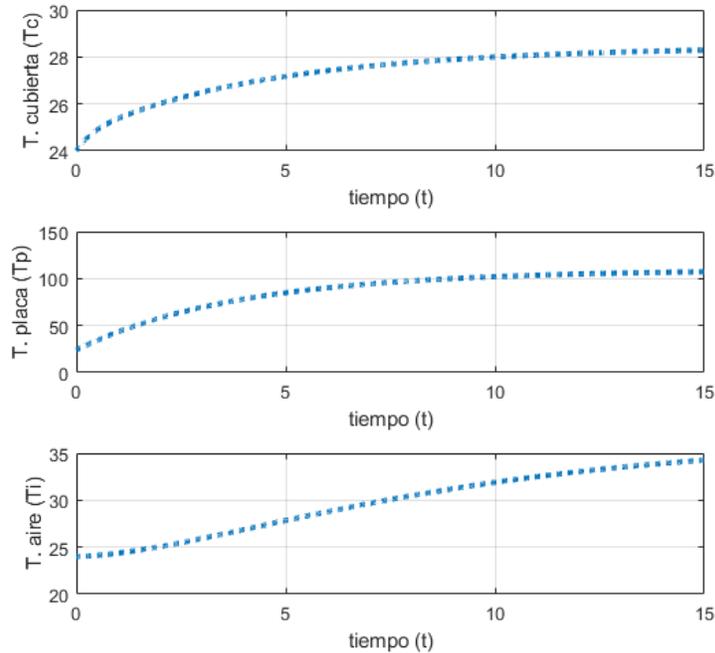


FIGURA 4. Comportamiento de la temperatura de la cubierta, placa absorbente y aire con reducción en las dimensiones del colector.

7. CONCLUSIONES

1. Este trabajo permite conocer el funcionamiento teórico de un colector solar y comprender el proceso termodinámico que ocurre en el calentamiento del aire. Esto es de mucha utilidad para la fabricación de los colectores o bien, para mejorar la eficiencia en su uso.
2. El aumento en los niveles de radiación solar provoca un aumento en el calor del aire al interior del colector. En la práctica los niveles de radiación solar varían según la hora del día y estación del año en que se encuentre, por lo que conocer la temperatura a la que se logra calentar el aire según la radiación recibida es de gran importancia. De esta forma, se puede regular la cantidad de calor que sale del colector con el aire y optimizar el secado del producto en el compartimento del secador.
3. La variación en las dimensiones del colector influye en el calentamiento del aire. Esto puede interferir con los resultados del secado y restar calidad al producto. De forma experimental se puede determinar que dimensiones permiten que el aire se caliente hasta un valor deseado haciendo simples variaciones en los valores de las longitudes del colector. A su vez, esto puede resultar en un proceso no tan práctico debido a que se puede llegar a realizar numerosos experimentos sin obtener un resultado preciso.

8. TRABAJOS A FUTURO

A continuación se presentan algunos trabajos a futuro que pueden considerarse:

1. El desarrollo de pruebas físicas reales que permitan verificar la fiabilidad del modelo planteado.
2. Resolver el problema de optimización de las dimensiones del colector para obtener la temperatura de salida esperada prescindiendo de los procesos experimentales.
3. Considerar la distribución de temperatura en el colector solar en tres dimensiones, incluyendo el ángulo de inclinación del calentador y las distintas variaciones en los parámetros de entrada.

REFERENCIAS

1. Rosalina Alvarenga Flores, *Estudio de factibilidad para la instalación de planta deshidratadora de fruta piña y banano*, (2016).
2. A Borah, Khayer Hazarika, and SM Khayer, *Drying kinetics of whole and sliced turmeric rhizomes (curcuma longa l.) in a solar conduction dryer*, Information Processing in Agriculture **2** (2015), no. 2, 85–92.
3. Richard L Burden and J Douglas Faires, *Análisis numérico*, Thomson Learning,, 2002.
4. Yunus A Çengel, *Transferencia de calor y masa: un enfoque práctico*, McGraw-Hill, 2007.
5. F Chenlo, *Cálculo de la temperatura de operación de células solares en un panel fotovoltaico plano*, CIEMAT (2002).
6. NM Chinenye, AS Ogunlowo, OJ Olukunle, et al., *Cocoa bean (theobroma cacao l.) drying kinetics*, Chilean journal of agricultural research **70** (2010), no. 4, 633–639.
7. AJ Ede and KC Hales, *The physics of drying in heated air with particular reference to fruit and vegetables*, His Majesty's stationery office, 1948.
8. Pedro Julián García, Jersson X Leon-Medina, Leydi J Cardenas-Flechas, and Juan F Giraldo, *Modelado numérico del proceso de secado solar de manzanas en el municipio de nuevo colón-boyacá*, Revista UIS Ingenierías **17** (2018), no. 1, 201–208.
9. SD Holdsworth, *Dehydration of food products a review*, International Journal of Food Science & Technology **6** (1971), no. 4, 331–370.
10. KS Jayaraman and DK Das Gupta, *Dehydration of fruits and vegetables-recent developments in principles and techniques*, Drying Technology **10** (1992), no. 1, 1–50.
11. Amadou Koulibaly and Juan José González Bayón, *Modelación de un colector solar para calentamiento de aire*, Ingeniería Energética **36** (2015), no. 3, 292–302.
12. Peter T Landsberg and Alexis De Vos, *The stefan-boltzmann constant in n-dimensional space*, Journal of Physics A: Mathematical and General **22** (1989), no. 8, 1073.
13. M Manoj and A Manivannan, *Simulation of solar dryer utilizing greenhouse effect for cocoa bean drying*, International Journal of Advanced Engineering Technology **4** (2013), no. 2, 24.
14. A Martín, MS Cáceres, MS Marta, and PJ Claude, *Manual de secado*, 2005.
15. Oscar Möller, Javier W Signorelli, and Mario A Storti, *Modeling simultaneous heat and mass transfer in an amaranth grain during drying: A finite element approach*, (2011).
16. Claudia Isabel Ochoa Martínez, *Modelación matemática del secado de alimentos por el método de ventana de reflectancia*, Ph.D. thesis, 2015.
17. Allan L Phillips, *Drying coffee with solar-heated air*, Solar Energy **9** (1965), no. 4, 213–216.
18. C Ratti and AS Mujumdar, *Solar drying of foods: modeling and numerical simulation*, Solar energy **60** (1997), no. 3-4, 151–157.
19. Merlin Simo Tagne, *Laboratory simulation of solar dryer for tropical woods: The case of ebony (diospyros crassiflora)*, Int. J. of Thermal & Environmental Engineering **9** (2015), no. 1, 1–6.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS, TEGUCIGALPA, HONDURAS

Dirección: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Tegucigalpa, Honduras

correo electrónico: oswaldo.cubas@unah.edu.hn

EFFECTO DE LAS INHOMOGENEIDADES ESPACIALES EN LA SENSIBILIDAD DE LA CONCENTRACIÓN DE CARBONO POR ACTIVIDAD ANTROPOGÉNICA

MYRIAN SADITH GONZÁLEZ

ABSTRACT. En este reporte se hace una descripción general de los principales procesos que inciden en las concentraciones del carbono en los suelos, atmósfera y océanos. El modelo presentado es el resultado de una colaboración de varios investigadores que buscan estimar analíticamente las retroalimentaciones del carbono y facilitar un proceso de aprendizaje en lugar de predecir con precisión resultados, a fin de aumentar la comprensión de los procesos del ciclo del carbono en el sistema climático y su dinámica en diversas condiciones. Ningún experimento inédito se incluye, sin embargo se referencian las fuentes acreditadas para la obtención de los parámetros y experimentos que sean de interés, así mismo se destacan los trabajos futuros a realizar en esta investigación para modelar a mayor profundidad la concentración espacial de carbono por actividad antropogénica.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a los significativos efectos que se suscitan en la Tierra por los cambios en el ciclo de carbón-clima, el estudio del sistema climático es de suma importancia para gran parte de la comunidad científica, consecuentemente, diversas agencias internacionales, como las Naciones Unidas, han incluido en sus temas prioritarios atender el sistema climático.

El análisis de la interacción colectiva entre la atmósfera, los océanos, biósfera y la superficie terrestre ha permitido comprender mejor el sistema climático. Se sabe que las componentes antes referidas inciden en el clima por la configuración de la composición de la atmósfera de la Tierra, lo que articula la absorción y transmisión de la energía solar y la emisión de energía infrarroja, altera la superficie terrestre y distribuyen el calor mediante los movimientos atmosféricos y las corrientes oceánicas [8].

Si bien en el sistema climático actúan diferentes componentes, es especialmente importante el estudio de la atmósfera, para ello comprender la acción que realiza el ciclo del carbono es determinante, este ciclo cuantifica la transferencia de carbono entre unos y otros almacenes [9], que podrían ser sumideros o fuentes, ubicados en la atmósfera, la hidrósfera, la biósfera, la rizósfera y la litósfera.

Date: Agosto, 2019.

Key words and phrases. Cambio climático, clima-carbón.

Los cambios en el ciclo del carbono constituyen una parte fundamental del cambio climático puesto que definen la acumulación de dióxido de carbono (CO_2) producto de la actividad humana [7]. El CO_2 así como el vapor de agua (H_2O), el óxido nitroso (N_2O), el metano (CH_4) y el ozono (O_3) se asocian al incremento del efecto invernadero [3], que conduce a un rasgo alarmante del cambio climático y que motiva estudios en este campo, así mismo estudios realizados revelan que el clima terrestre muestra una elevada sensibilidad a las variaciones en el CO_2 atmosférico, por lo que resulta poco probable que no sea extrapolable a la época actual y al futuro próximo, aunque sean escalas temporales mucho más cortas [17].

El presente documento tiene como propósito divulgar la dinámica y sensibilidad del ciclo del carbono, y las concentraciones de éste, contemplado como ente protagonista en el cambio climático y los procesos e interacciones propias del ciclo, a fin de analizar la influencia de los cambios del CO_2 en el efecto invernadero y el clima terrestre.

2. JUSTIFICACIÓN

Históricamente se ha planteado la posibilidad de que las actividades humanas alteren las componentes ambientales negativamente [20, 1], datos oficiales del Panel Intergubernamental para el Cambio Climático (IPCC) exponen mediciones que evidencian algunos de ellos como el incremento en la temperatura promedio global del aire y el océano, derretimiento de la nieve glacial y el hielo en los polos y aumento en el nivel del mar [4].

Considerando los efectos negativos que inducen los cambios observados en el sistema climático mundial, se persigue hacer estudios que ofrezcan predicciones oportunas de los impactos antropogénicos sobre el clima, desafortunadamente todavía existen muchas incertidumbres en la modelación del sistema climático. Por ejemplo, en cuanto al ciclo del carbono específicamente, presentan una limitante muy significativa: la información de los flujos de carbono que intentan reproducir algunos modelos se basa en indicadores geológicos indirectos que son muy difíciles de comprobar, como la tasa de la desgasificación volcánica o el enterramiento de la materia orgánica [9, 7]. Además, los modelos desarrollados han tratado pobremente la aceleración de la respiración del carbono de la biomasa y el suelo debido a temperaturas más cálidas, el lanzamiento de carbono a la atmósfera ocasionado por la destrucción de los bosques cuando las zonas atmosféricas se desplazan con demasiada velocidad y el impacto de las temperaturas oceánicas más cálidas y los cambios de circulación oceánica en la captación de CO_2 por los océanos [8].

Por lo tanto, se evidencia la ausencia de una comprensión completa de los ciclos del carbono y la necesidad de profundizar más en el campo. El presente informe pretende ahondar con la rigurosidad pertinente en el estudio dinámica del carbono, a fin de conocer de mejor manera el efecto antropogénico en el cambio climático.

Es importante mencionar que existen miembros de la comunidad científica y población en general que descalifican la relación entre el cambio climático y el CO_2 . Se ha discutido durante mucho tiempo que los cambios en el CO_2 son muy diversos en contraposición a la temperatura que no ha variado tanto, se explica esta situación

considerando que el sistema es especialmente sensible a los cambios en el CO_2 atmosférico cuando estos se producen en una atmósfera pobre en CO_2 . También se argumenta que las temperaturas varían notablemente, pero el CO_2 no tanto, enfatizando lo ocurrido en la glaciación del Hemisferio Norte, donde los niveles estimados de CO_2 parecen ser bajos, en este caso no se contemplan cambios importantes dados en el planeta durante esta época, como los cambios en la circulación oceánica producidos por aspectos geológicos que favorecen el transporte oceánico latitudinal de energía. Finalmente, también se plantea que algunas glaciaciones se producen en etapas muy ricas en CO_2 , como en el período del Paleozoico inferior, etapa caracterizada por muy elevados niveles de CO_2 en la atmósfera y dominada en su conjunto por condiciones climáticas de tipo invernadero donde tuvo lugar una gran glaciación; un argumento detractor destacado para este planteamiento consiste en que esta glaciación se vio favorecida por la posición muy meridional de la masa continental de Gondwana y debido a la proximidad del océano generaron las condiciones térmicas y de precipitación para permitir la acumulación de hielo [9].

Sin embargo, el IPCC sostiene en [4] que el calentamiento observado en la atmósfera y en el océano, sumado a la pérdida de hielo, implican que *“es extremadamente improbable que el cambio climático global de los últimos 50 años pueda ser justificado sin considerar forzamientos externos y es muy probable que este no se deba únicamente a causas naturales”*. Ante este panorama, abundantes estudios se están desarrollando relacionados al sistema climático, así mismo cuantiosas agencias, instituciones educativas y centros de investigación priorizan sus estudios en este ámbito.

La Universidad Nacional Autónoma de Honduras (UNAH), estipula como uno de sus ejes de investigación al estudio del ambiente, biodiversidad y desarrollo, dentro de éste se define como tema prioritario de investigación, entre otros, el cambio climático y vulnerabilidad, de esta manera, el presente estudio se enmarca en este eje prioritario. Además, considerando que esta investigación plantea un modelo del sistema climático comprendido como un sistema dinámico complejo, se ubica en la línea de investigación de Modelación Matemática de la Orientación en Matemática Aplicada de la Maestría en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNAH.

3. ANTECEDENTES

Los modelos climáticos desarrollados poseen diferentes alcances en el sentido del número de componentes climáticos definidos en el mismo. Modelos de menor alcance se enfocan en un único componente, a manera de ejemplo considere los modelos de atmósfera que se caracterizan por estudiar los cambios y demás elementos relacionados al ciclo del carbono, mientras los modelos de mayor alcance tratan varias componentes del sistema climático conjuntamente.

Concerniente a los modelos atmosféricos, los expertos del IPCC han desarrollado modelos de amplio alcance que estudian la concentración de gases de efecto invernadero (GEI), el forzamiento radiativo resultante de las concentraciones de gases de efecto invernadero y la respuesta de la temperatura media mundial al forzamiento

radiativo calculado [8]. Es de suma importancia la comprensión del forzamiento radiactivo, debido a que este componente en combinación con las reacciones climáticas y el almacenamiento de energía por parte del sistema climático, determina la velocidad y la magnitud del cambio climático global [6].

Modelar las concentraciones de gases de efecto invernadero considerando las emisiones existentes implica modelar la transformación de gases en la atmósfera y su eliminación [2]. Como se ha mencionado previamente, el proceso de comprender mejor el ciclo del carbono es fundamental debido a que determina la concentración de CO_2 que es uno de los principales GEI, para ello se han diseñado modelos que se pueden clasificar en dos grandes grupos: primero, los estudios que se centran en el cambio climático actual y su evolución en escalas temporales de generaciones humanas. Estos tienen como finalidad entender y cuantificar los rápidos flujos del carbono que se producen en el sistema climático a corto plazo, y que involucran fuentes y sumideros de la hidrósfera, la atmósfera, la biósfera y los suelos; y el segundo grupo que incluye los modelos del ciclo del carbono definidos en escalas de millones de años y que cuantifican mecanismos de intercambio más lentos. Esos se refieren a la transferencia de carbono entre la litósfera y el sistema superficial terrestre, es decir, el sistema que agrupa la atmósfera, los océanos, la biósfera y los suelos [9]. Atendiendo a la finalidad que persigue este estudio, los modelos considerados en este trabajo son del primer tipo previamente definido.

Adicionalmente, las simulaciones con los Modelos de Ciclo Climático-Carbono (EMS por su nombre en inglés Earth System Models') pueden ser obtenidas en base a la concentración o a las emisiones. Las simulaciones basadas en la concentración se desarrollan desde una óptica tradicionalista donde la evolución temporal del CO_2 atmosférico es un parámetro dado para el modelo. Por otro lado, las simulaciones definidas por medio de las emisiones incluyen un conjunto más amplio de modelos, en estos los cambios posteriores en la concentración de CO_2 en la atmósfera son simulados por el mismo, modelos de este tipo pueden consultarse en [2]. Un modelo que ilustra el tipo antes referido fue desarrollado por Lade et al. [20], en este estudio se ejecutan las simulaciones basándose en las emisiones a partir de datos históricos y futuros escenarios sobre emisiones de combustibles fósiles y emisiones por el uso del suelo, bajo el contexto de parametrizar cada proceso con el mejor conocimiento disponible sobre el mismo, en lugar de intentar forzar el modelo para que se ajuste a los datos históricos. Otro estudio de este tipo es presentado por Lenton en [21], el modelo incluye una gama de mecanismos de retroalimentación entre el CO_2 atmosférico, la temperatura de la superficie y el ciclo de carbono en la tierra y el océano, con el fin de evaluar su efecto sobre el cambio global impulsado por las emisiones antropogénicas de CO_2 .

En términos generales, los modelos climáticos del ciclo del carbono estudian el patrón global de los flujos de CO_2 de la atmósfera y el océano, con la desgaseificación en los trópicos y la absorción en las latitudes medias y altas [4, 20, 7]. En los últimos años se han elaborado modelos sofisticados relativos al carbono y su interacción en el sistema climático [8], algunos incorporados por el IPCC son el de Siegenthaler y Joos [18], en donde se analiza explícitamente los procesos de química oceánica y del flujo vertical del carbono mediante un modelo de difusión

aflorescimiento; el modelo de Jain et al. [19] en el cual las posibles consecuencias del calentamiento de efecto invernadero inducido por el CO_2 se estudian comparando las tendencias en los resultados del modelo de circulación general (GCG) del Laboratorio de Dinámica de Fluidos Geofísicos (GFDL, por sus siglas en inglés); y, el modelo de Jones et al. [16], en donde se emplea una representación razonable de la captación del carbono y su interacción con el océano, además muestra los patrones de cambio de temperatura regional en los períodos de 1920–1939 y 1967–1986.

Otro enfoque en la modelación matemática del sistema climático centra su atención en tratar conceptos más teóricos relacionados a los procesos de este sistema, tal es el caso del modelo presentado por Anderies et al. en [7], este estudio no tiene como propósito predecir la dinámica global del carbono como ocurre en el planeta, sino construir una representación conceptual razonable del sistema de retroalimentación entre las diferentes reservas de carbono.

4. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

4.1. Elementos conceptuales. El cambio climático puede inducir modificaciones en el agua, el carbono y otros ciclos biogeoquímicos que pueden reforzar (retroalimentación positiva) o amortiguar (retroalimentación negativa) el aumento de la temperatura [4]. En ciencias del clima, el término *retroalimentación* (*feedback* en inglés) del clima-carbono, refiere cuatro procesos importantes [14, 20] y se suele estudiar en tres regiones de interés para la dinámica del clima: suelo, océanos y atmósfera.

- (1) *Retroalimentación de carbono por la concentración del suelo:* una mayor concentración de carbono en la atmósfera generalmente conduce a una mayor absorción de carbono debido al efecto de la fertilización.
- (2) *Retroalimentación de carbono por la concentración oceánica:* los procesos físicos, químicos y biológicos interactúan de tal forma que el carbono es llevado a la profundidad del océano. La retroalimentación de concentración-carbono es generalmente negativa, lo que reduce los efectos de las emisiones antropogénicas.
- (3) *Retroalimentación de carbono en el clima terrestre:* las temperaturas más altas, junto con otros cambios asociados en el clima, generalmente conducen a un menor almacenamiento en tierra a escala global.
- (4) *Retroalimentación de carbono en el clima oceánico:* las temperaturas más altas generalmente conducen a una reducción en la absorción de carbono por el océano.

El estudio de las retroalimentaciones de carbono es importante porque modelos desarrollados recientemente sugieren que es probable que éstas desempeñen un papel fundamental en la captación atmosférica de dióxido de carbono en las próximas décadas, tal es el caso de [15], en donde se muestra una retroalimentación positiva entre el sistema climático y el ciclo del carbono, como consecuencia se estima que la eficiencia de la tierra y el océano para absorber el CO_2 atmosférico se ve reducida y con ello se aplica el efecto invernadero. También, modelos desarrollados por el Proyecto de Intercomparación de Modelado Coordinado (CMIP5) estiman constantemente una retroalimentación positiva del ciclo del carbono, es decir, una reducción de los sumideros naturales de CO_2 en respuesta al cambio climático. En particular, las retroalimentaciones del ciclo del carbono en los océanos suelen ser

positivas [5]. Además, un estudio de 11 modelos de ciclo de carbono y clima del CMIP5 mostró que todos los modelos simularon una retroalimentación positiva en este contexto [12].

4.2. Caracterización del modelo. El modelo presentado en este documento conserva las siguientes características:

- (1) Incluye procesos determinantes del ciclo del carbono y su interacción con el clima en la escala de tiempo del 2010-2100. Por ejemplo, algunos modelos del ciclo del carbono a menudo no incluyen representaciones explícitas de la solubilidad.
- (2) Ofrece resultados plausibles para las reservas de carbono y los cambios de temperatura.
- (3) Todos los parámetros tienen una interpretación biofísica o biogeoquímica directa, aunque estos parámetros pueden estar en una escala agregada (por ejemplo, un parámetro para el efecto de fertilización global neta, en lugar de los parámetros fisiológicos de la hoja).
- (4) El modelo no incluye explícitamente factores como el grosor de las capas de estratificación oceánica, la variación espacial de la estratificación, los cambios en la circulación oceánica debidos a la fuerza del viento, la fuerza del agua dulce o los procesos de hielo marino.
- (5) Cada proceso se modela con la mejor data disponible sobre ese proceso, en lugar de intentar forzar el modelo para que se ajuste a los datos históricos.

4.3. Formulación del modelo. El modelo considera tres formas de valores para el carbono: dióxido de carbono (c_a), carbono terrestre (c_t) que incluye el procedente de la vegetación y el suelo y el carbono inorgánico disuelto (DIC) en la capa mixta del océano (c_m). Adicionalmente se contempla la temperatura media de la superficie terrestre como el diferencial de la temperatura preindustrial¹, $\Delta T = T - T_0$ donde $T_0 = 0$.

4.3.1. Dinámica del carbono en suelos. Se define la producción primaria neta (NPP por sus siglas en inglés) como la captación neta de carbono de la atmósfera por parte de las plantas a través de la fotosíntesis. Una de las formas de medición del NPP y que se utiliza en el presente documento es la *curva de Keeling*²,

$$(4.1) \quad NPP(c_a) = NPP_0(1 + K_C \log(c_a/c_{a0})),$$

donde el punto inicial se toma también a partir de la época preindustrial. La fórmula de Keeling incorpora efectos relacionados con el cambio climático en la NPP global, por ejemplo, efectos de precipitación y temperatura, además de efectos de fertilización; sin embargo, la fórmula cuenta con limitaciones en sus registros, como el cambio en la eficiencia del uso del carbono o los procesos asociados a la absorción de los nutrientes [20].

Tomando a R como la pérdida de carbono del suelo a través de la respiración, se espera que este incremente como producto del aumento de la la temperatura

¹Históricamente se considera a la industrialización (año 1800) como el tiempo inicial para muchos modelos relativos al cambio climático

²Aporte de Charles David Keeling para medir la acumulación de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre; basada en datos tomados en el Observatorio de Mauna Loa en la isla de Hawai desde 1958

media de la superficie terrestre ΔT . La siguiente relación dada por [11] expresa esta dependencia

$$(4.2) \quad R(\Delta T) = \frac{c_t}{c_{t0}} R_0 Q_R^{\Delta T/10},$$

donde Q_R es el aumento proporcional en la respiración para un aumento de temperatura de 10K, se obtiene una expresión que define el cambio en el almacenamiento de carbono terrestre global como

$$(4.3) \quad \frac{dc_t}{dt} = NPP_0 \left(1 + K_C \log \left(\frac{c_a}{c_{a0}} \right) - \frac{c_t}{c_{t0}} Q_R^{\Delta T/10} \right) - LUC(t),$$

donde $LUC(t)$ representa la pérdida de carbono terrestre por emisiones de uso de suelo, además se asume que la respiración del suelo en la época preindustrial estaba equilibrada por la producción primaria neta, es decir, $R_0 = NPP_0$. Se destaca que en este modelo la respiración global del suelo es proporcional al carbono total de la tierra, en lugar del carbono del suelo.

4.3.2. *Dinámica del carbono en océanos.* El intercambio de dióxido de carbono con la atmósfera y los océanos se realiza en la capa mixta del océano superior. Los dos principales mecanismos por los cuales el carbono se transporta desde la capa mixta del océano superior a las reservas de los océanos profundos son la solubilidad y las bombas biológicas³. En vista de que el carbono se mantiene en la profundidad durante un tiempo muy prolongado, este modelo contempla al océano profundo como un depósito de carbono y la dinámica de carbono se estudia exclusivamente para la capa mixta superior.

La absorción de dióxido de carbono de la atmósfera por el océano es intervenida por otras especies de DIC. El factor de Revelle r , se define como la relación entre el cambio proporcional en el contenido de dióxido de carbono y el cambio proporcional en el DIC total, en este caso el factor Revelle se asume constante. La siguiente expresión describe la tasa proporcional a la que el CO_2 se difunde entre la atmósfera y la capa mixta del océano,

$$c_a - p(c_m, \Delta T)$$

donde

$$p(c_{m_0}, 0) = C_{a_0} \quad \text{y} \quad p(c_m, \Delta T) = \frac{C_{a_0}}{1 - D_T \Delta T} \left(\frac{c_m}{c_{m_0}} \right)^r,$$

con D_T la dependencia de la temperatura T de la solubilidad del CO_2 en el océano.

Referente a los mecanismos de transporte, en este modelo el transporte neto de carbono al océano inferior por la solubilidad es representado por

$$(4.4) \quad w_0(1 - w_T \Delta T)(c_m - c_{m_0}),$$

tomando a w_0 como la velocidad a la que se intercambia el agua de la capa mixta con el océano profundo y w_T describe la reducción de la circulación que se espera que ocurra con el cambio climático. Por otro lado, también se prevé un debilitamiento de la bomba biológica por el cambio climático, debido al aumento de la estratificación térmica de las aguas oceánicas [8]. La tasa de carbono transportado fuera de la

³Una bomba biológica (*biological pump* en inglés) es el mecanismo por el cual los compuestos que contienen carbono se exportan a través de procesos biológicos desde la superficie hasta el océano profundo [10]

capa mixta del océano superior por la bomba biológica a las capas del mar profundo está dada por

$$(4.5) \quad B(\Delta T) = B_0(1 - B_T \Delta T).$$

Entonces, por (4.4) y (4.5) se obtiene la tasa de cambio de la capa mixta oceánica DIC,

$$(4.6) \quad \frac{dc_m}{dt} = \frac{Dc_{m_0}}{rp(c_{m_0}, 0)}(c_a - p(c_m, \Delta T)) - w_0(1 - w_T \Delta T)(c_m - c_{m_0}) - B(\Delta T) + B(0)$$

En la expresión previa, se asume un equilibrio del transporte de carbono a la capa mixta por medio de la circulación oceánica para la bomba biológica preindustrial $B(0)$. Además, el coeficiente del primer término se eligió de manera que $1/D$ es la escala de tiempo en la que el CO_2 se difunde entre la atmósfera y la capa mixta del océano.

Considerando el cambio en el contenido total de carbono oceánico Δc_M comparado con las condiciones preindustriales se obtiene la retroalimentación del carbono oceánico, esta se puede estimar evaluando los cambios de carbono en la capa mixta del océano más el carbono transportado a las profundidades del océano por medio de la solubilidad y las bombas biológicas

$$(4.7) \quad \Delta c_M = \Delta c_m + \int [w_0(1 - w_T \Delta T)(c_m - c_{m_0}) + B(\Delta T) - B(0)] dt$$

4.3.3. *Dinámica del carbono en la atmósfera.* Sea c_s el carbono total del sistema climático, tal que consta de las reservas de carbono en la capa mixta oceánica, la atmósfera y los suelos, entonces

$$(4.8) \quad c_s = c_a + c_t + c_m.$$

Además, sea $e(t)$ el carbono fósil emitido por actividades humanas, entonces se tiene que

$$(4.9) \quad \frac{dc_s}{dt} = e(t) - w_0(1 - w_T \Delta T)(c_m - c_{m_0}) - B(\Delta T) + B(0),$$

con $c_{s_0} = c_{a_0} + c_{t_0} + c_{m_0}$. Usando (4.8) y (4.9) se obtiene una expresión para el dióxido de carbono en la atmósfera c_s .

Por otro lado, el aumento de los niveles de CO_2 en la atmósfera puede causar un cambio en la temperatura media global de la superficie, ΔT , en comparación con su nivel preindustrial [20]. Para evaluar la tasa de cambio de la temperatura se considera el modelo presentado en [13],

$$(4.10) \quad \frac{d\Delta T}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\lambda}{\log 2} \log \left(\frac{c_a}{c_{a_0}} \right) - \Delta T \right)$$

donde λ representa la sensibilidad climática, es decir, define el aumento de temperatura en respuesta a una duplicación de los niveles de dióxido de carbono en la atmósfera y τ es la escala de tiempo. Todos los parámetros utilizados para este modelo, así como la fuente o procedimiento seguido para su obtención, se presentan en [20].

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este documento se presentó un modelo estilizado del ciclo global del carbono y su papel en el sistema climático para explorar el potencial debilitamiento de las retroalimentaciones del ciclo del carbono en escalas de tiempo relevantes para la toma de decisiones y la elaboración de políticas pertinentes. En comparación con los modelos integrales del sistema de la Tierra, este modelo tiene muchos menos parámetros, puede calcularse mucho más rápidamente e incluso es lo suficientemente accesible como para obtener resultados analíticos. Como beneficio adicional, el modelo propuesto ofrece la oportunidad de investigar la influencia de mecanismos que actualmente son demasiado inciertos, mal definidos o computacionalmente muy costosos con el objeto de incluirlos en los modelos actuales del sistema terrestre, tal es el caso de los procesos relacionados con la biósfera.

Para elaborar un modelo más integral a partir del modelo propuesto se podrían incorporar procesos adicionales relevantes en diferentes escalas temporales de interés para el análisis del sistema de la Tierra, así como procesos que se han incluido implícitamente, a modo de ejemplo algunos procesos emisores de carbono como los incendios forestales o perturbaciones de insectos y factores que afectan la absorción de carbono terrestre, como la estacionalidad, las interacciones de las especies, la funcionalidad de las especies y la migración.

Referente a la ejecución del modelo, se concibe que los parámetros para la respuesta del clima al dióxido de carbono λ y τ , y dos parámetros de la respuesta del océano a la temperatura cambiante, B_T y w_T , se establezcan en función de la salida de modelos de circulación global atmósfera-océano, mientras que para la sensibilidad climática, se utilice la respuesta climática transitoria. Por otro lado, todos los demás parámetros se sugiere sean tomados en base a las observaciones históricas del ciclo global del carbono y con respecto a los datos requerida para las emisiones se plantea utilizar datos históricos armonizados y futuros escenarios de *RCP* sobre emisiones de combustibles fósiles [$e(t)$] y emisiones por el uso de la tierra [$LUC(t)$].

Finalmente, con el modelo sobre la dinámica del carbono total de la atmósfera obtenido de (4.3), (4.6) y (4.9) se persigue investigar lo siguiente:

- (1) Encontrar una linealización alrededor del modelo en el caso estacionario.
- (2) Hacer un análisis de estabilidad del modelo.
- (3) Agregar términos de difusión al modelo linealizado.
- (4) Hacer un análisis del modelo donde se involucren términos de retroalimentación del carbono.
- (5) Concluir acerca de como se afectan las retroalimentaciones de carbono cuando existen términos de difusión

REFERENCES

1. A. Gordillo, R. Cabrera, M. Hernández, E. Galindo, E. Otazo, F. Prieto *Evaluación regional del impacto antropogénico sobre aire, agua y suelo. caso: huasteca hidalguense, México*, Centro de Investigaciones Químicas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2010.
2. G. Flato, J. Marotzy, B. Abiodun, P. Braconnot, S.C. Chou, W. Collins, P. Cox, F. Driouech, S. Emori, V. Eyring, C. Forest, P. Gleckler, E. Guilyardi, C. Jakob, V. Kattsov, C. Reason

- and M. Rummukainen, 2013: Evaluation of Climate Models. In: Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
3. H. Benavides, G. León. *Información técnica sobre gases de efecto invernadero y el cambio climático*, Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales - IDEAM, 2007.
 4. IPCC-Intergovernmental Panel on Climate Change, *Cambio Climático 2007: Informe de Síntesis. Contribución de los Grupos de Trabajo I, II y III al Cuarto informe de Evaluación del Grupo Intergubernamental de expertos sobre el Cambio Climático*
 5. IPCC-Intergovernmental Panel on Climate Change, *Climate Change 2013: The Physical Science Basis*, Grupo de Trabajo I, contribución al Quinto informe de Evaluación del Grupo Intergubernamental de expertos sobre el Cambio Climático
 6. IPCC-Intergovernmental Panel on Climate Change, 2013: Summary for Policymakers. In: Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
 7. J. Anderies, S. Carpenter, W. Steffen, J. Rockstrom *The topology of Non-Linear Global Carbon Dynamics: from Tipping Points to Planetary Boundaries*, Center of the Study of Institutional Diversity, Arizona State University, 2012.
 8. J. Houghton, L. Meira, D. Griggs, K. Maskell *Introducción a los modelos climáticos simples utilizados en el Segundo Informe de Evaluación del IPCC* Grupo intergubernamental de expertos sobre el cambio climático, 1997.
 9. J. Martín-Chivelet, *Ciclo del carbono y clima: la perspectiva geológica*, Universidad Complutense de Madrid, Enseñanza de las Ciencias de la Tierra, 2010, pp. 33-46.
 10. J. Sarmiento, N. Gruber, *Ocean biogeochemical dynamics*, Princeton University Press, 2006
 11. M. Xu, H. Shang, *Contribution of soil respiration to the global carbon equation*. Journal of plant physiology, 203, 2016, pp.16-28.
 12. P. Ciais, C. Sabine, G. Bala, L. Bopp, V. Brovkin, J. Canadell, A. Chhabra, R. DeFries, J. Galloway, M. Heimann, C. Jones, C. Le Quéré, R.B. Myneni, S. Piao and P. Thornton, *Carbon and Other Biogeochemical Cycles*. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis*. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 2013
 13. O. Kellie-Smith, P. Cox, *Emergent dynamics of the climate economy system in the Anthropocene*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 369(1938), 2001, pp.868-886.
 14. P. Friedlingstein, *Carbon cycle feedbacks and future climate change*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 373(2054), 2015
 15. P. Friedlingstein, L. Bopp, P. Ciais, J.L. Dufresne, L. Fairhead, H. LeTreut, P. Monfray, J. Orr, *Positive feedback between future climate change and the carbon cycle*. Geophysical Research Letters, 28(8), 2001, pp.1543-1546.
 16. P. Jones, T. Wigley, G. Farmer, *Marine and land temperature data sets: a comparison and a look at recent trends*, Developments in atmospheric science, Vol. 19. Elsevier, 1991. pp.153-172.
 17. P. Jones, D. Parker, T. Osborn, K. Briffa, *Global and hemispheric temperature anomalies—land and marine instrumental records*. En: *Trends: A Compendium of Data on Global Change. Carbon Dioxide Information Analysis Center*, Oak Ridge National Laboratory, U.S. Department of Energy, Oak Ridge, Tenn., U.S.A. 2010
 18. U. Siegenthaler, J. Sarmiento, *Atmospheric carbon dioxide and the ocean*. Nature, 365(6442), 1993, pp.119.
 19. S. Jain, U. Lall, M. Mann, *Seasonality and Interannual Variations of Northern Hemisphere Temperature: Equator-to-Pole Gradient and Ocean–Land Contrast* Journal of Climate, 12(4), 1999, pp.1086-1100.

20. S. Lade, J. Donges, I. Fetzer, J. Anderies, C. Beer, S. Cornell, T. Gasser, J. Norberg, K. Richardson *Analytically tractable climate-carbon cycle feedbacks under 21st century anthropogenic forcing*, Earth Syst. Dynam., European Geosciences Union, **9**, 2018, pp 507-523.
21. T. Lenton, *Land and ocean carbon cycle feedback effects on global warming in a simple Earth system model*, Institute of Terrestrial Ecology, Edinburgh Research Station, Bush Estate, Pentlands, Midlothian EH26 0QB, UK, 2000.

ESCUELA DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS

Current address: Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Ciudad Universitaria

E-mail address: myriangonzalez@unah.edu.hn

TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO: UNA REVISIÓN

ANER GODOY

ABSTRACT. En este trabajo se muestra un enfoque para la solución de un problema de control óptimo para un sistema dinámico modelado en ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Se ofrece una breve reseña histórica del desarrollo de la teoría del cálculo de variaciones, control óptimo y sus precursores. Se presentan los ajustes necesarios del problema de control y como encontrar las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden del problema, se nombran algunos métodos numéricos para encontrar la solución aproximada. Finalmente, se hace una breve descripción de los métodos de programación para resolver sistemas lineales y no lineales.

1. INTRODUCCIÓN

La palabra control tiene un doble significado. Primero, controlar un sistema puede entenderse simplemente como probar o verificar que su comportamiento sea satisfactorio. En un sentido más profundo, controlar también es actuar, poner las cosas para garantizar que el sistema se comporte como se desea [1].

Un problema común en disciplinas de la ciencia, tales como, ingeniería, física, matemáticas, medicina, etc. es encontrar una solución óptima frente a una situación o experimentos concretos. Esta no suele resultar una tarea sencilla, por lo que en muchos casos, es necesaria la construcción de un modelo matemático que nos permita realizar simulaciones del fenómeno en cuestión, así como obtener la mejor solución del modelo planteado. Para ese fin, se necesitan algunas herramientas matemáticas fundamentadas en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, teoría de ecuaciones en derivadas parciales lineales, análisis funcional aplicado al cálculo de variaciones, análisis numérico de ecuaciones diferenciales, métodos numéricos en optimización, teoría de control, programación no lineal, además de herramientas de simulación numérica [2].

La teoría de control trata con sistemas que pueden ser controlados, es decir, cuya evolución puede ser influenciada por algunos agentes externos, o manipular las entradas (conocidas como controles) para obtener una salida deseada del sistema [3].

El objetivo es determinar un control admisible, llamado control óptimo, esto provee un estado satisfactorio y minimiza el valor de la función de costo. La pregunta base para este estudio es la existencia de la solución y su cálculo. Por tanto, para obtener la solución se utilizan algunos métodos numéricos [4].

En este trabajo se propone una revisión de la teoría de control óptimo para sistemas modelados en EDP. Se incluyen algunas aplicaciones y los avances

Date: Julio 22, 2019 .

Key words and phrases. Sistemas dinámicos, Control óptimo, Métodos numéricos.

realizados en esta rama de la matemática aplicada. Asimismo, se efectúa una revisión del estado de la técnica en las metodologías de control óptimo para sistemas dinámicos.

2. JUSTIFICACIÓN

Este estudio acerca del control óptimo para sistemas dinámicos, permite distinguir con claridad los potenciales de encontrar soluciones óptimas a problemas concretos, en un área de actividad específica.

Esto abre la posibilidad no solo aumentar la eficiencia en relación a los proyectos de desarrollo en distintas áreas, por ejemplo: ecología, industria, medicina, etc, donde se puedan hacer modelos matemáticos controlables y de esta manera planificar con mejores resultados las estrategias para abordar problemas mediante un plan establecido de manera óptima. La teoría de control óptimo es el resultado de la búsqueda de la mejor solución posible a un problema, en el que se pueden manipular las entradas de un sistema para así obtener un resultado deseado y evitar hacerlo mediante la prueba y error. Esto hace más eficiente el uso de los recursos disponible en el área en la que esté siendo aplicada esta teoría.

Una de las líneas de investigación que tiene la UNAH donde la teoría de control óptimo puede ser aplicada es en productividad, por ejemplo: determinación del sendero óptimo de extracción en una mina de arena [5], Análisis económico de pesquería mediante la teoría de control óptimo: Una aplicación al modelo predador - presa [6], entre otros.

Dentro de las líneas de investigación de la maestría en matemática, específicamente en el área de matemática aplicada, la teoría de control óptimo es utilizada en problemas en sistemas dinámicos modelados en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, resueltos mediante métodos numéricos como diferencias finitas, elementos finitos, Runge - Kutta, Gradiente conjugado, etc. El primer paso para resolver numéricamente el problema, requiere la discretización del problema de control, el cual se ha hecho usualmente mediante el método de elementos finitos. Una vez que se tiene un problema de control discreto, se debe usar algunos algoritmos numéricos de optimización para resolver este problema.

Este tipo de problemas se presta para hacer simulaciones computacionales, por lo que esta ligado a las líneas de investigación tanto de la maestría como de otras áreas de la ciencia en las que está trabajando la universidad.

3. ANTECEDENTES

El control óptimo nació en 1697, en Groningen, una universidad de un pueblo en el norte de los Países Bajos.

En la edición de junio de 1696 de “Acta Eruditorum”, Bernoulli planteó el siguiente desafío:

Invitación a todos los matemáticos para resolver un nuevo problema.

Si se dan dos puntos A y B en un plano vertical, como se muestra en la figura 1,

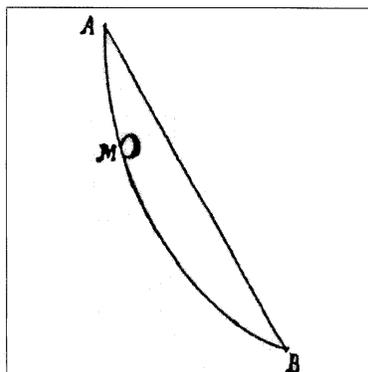


FIGURE 1. El problema Brachistochrone (Acta Eruditorum, Junio 1696, p.269). [7].

entonces se requiere que especifique la órbita AMB del punto móvil M , a lo largo del cual, partiendo de A , y bajo la influencia de su propio peso, llega a B en la zona más pequeña en el menor tiempo posible. Para que aquellos que estuvieran interesados en resolver este problema, debían saber que no era puramente especulativo y sin uso práctico. Más bien, incluso parece, y esto puede ser difícil de creer, que es muy útil también para otras ramas de la ciencia que la mecánica. Para evitar una conclusión apresurada, debe observarse que la línea recta es ciertamente la línea de distancia más corta entre A y B , pero se busca una que se recorre en el menor tiempo. Sin embargo, la curva AMB , que divulgaré si a finales de este año nadie más la ha encontrado, es muy conocida entre los geométricos [7].

Inmediatamente después de la segunda guerra mundial, con el inicio de la guerra fría, las dos súper potencias, Estados Unidos y la Unión Soviética, aumentaron sus esfuerzos para hacer uso de los matemáticos y sus teorías matemáticas en los análisis de defensa, ya que las matemáticas habían sido reconocidas como útiles durante la Segunda Guerra Mundial. Por lo tanto, no es sorprendente que los matemáticos en el este y el oeste comenzaran casi de forma simultánea a desarrollar métodos de solución para problemas que luego se conocieron como problemas de control óptimo, por ejemplo, problemas de intercepción de tiempo mínimo para aviones de combate [8].

3.1. En Estados Unidos. Alrededor de 1950, Hestenes escribió simultáneamente sus dos famosos memorandos de investigación RAND (Research AND Development) No. 100 y 102; ver [9] y [10]. En estos informes, Hestenes desarrolló una guía para el cálculo numérico de trayectorias de tiempo mínimo para aviones en el advenimiento de las computadoras digitales. En particular, el memorándum RM-100 de Hestenes incluye una formulación temprana de lo que luego se conoció como el principio del máximo: el vector de control óptimo (ángulo de ataque y ángulo del banco) debe elegirse de tal manera que maximice el Hamiltoniano H a lo largo de una curva de minimización C_0 . En su informe, ya encontramos el formalismo claro de los problemas de control óptimo con su separación en estado y variables de control [8].

3.2. **En URSS.** En 1955, el grupo de Pontryagin se reunió con miembros de la fuerza aérea. Al igual que en EE.UU., Se presentaron problemas de tiempo mínimo de intercepción al grupo de Pontryagin.

Desde 1952 Pontryagin y Aizerman, un destacado especialista en control automático, quedó claro de inmediato que había un problema de control óptimo en ese momento. Sin embargo, para reforzar las aplicaciones también se invitó a ingenieros. En particular, Fel'dbaum y Lerner centraron la atención en la importancia de los procesos óptimos de los sistemas lineales para el control automático. Pontryagin se dio cuenta rápidamente de que el método de Fel'dbaum debía generalizarse para resolver los problemas planteados por los militares. Pontryagin y sus colaboradores Boltyanskii y Gamkrelidze en 1956 publicaron los primeros resultados.

Miele (1950) logró una solución para un caso especial. Él investigó los problemas de control con limitaciones primero para aviones, luego para cohetes en una serie de documentos desde 1950 en adelante. Casi en paralelo con los trabajos de Miele, también se hicieron esfuerzos en la URSS en relación con la optimización dinámica, particularmente en el lanzamiento de cohetes. Ya en 1946, Okhotsimsky [11] resolvió el problema específico de un cohete ascendente verticalmente para lograr una altitud final dada con una masa inicial mínima.

Cuando se hicieron claras las conexiones y diferencias de sus teorías y métodos con el cálculo clásico de variaciones, se comenzó a desarrollar una teoría unitaria del control óptimo teniendo en cuenta sus nuevas características. Nace una nueva disciplina matemática [8].

Pontryagin tuvo las primeras ideas, dio el impulso y las pautas que sus compañeros de trabajo Gamkrelidze y Boltyanskii tuvieron que completar. Lograron hacer las primeras pruebas de un principio del máximo general en el caso lineal, respectivamente no lineal. Estos logros han permitido nuevos métodos teóricos y prácticos para la solución de una clase de problemas que se denominaron procesos óptimos, respectivamente problemas de control óptimo. Con esto surgió un nuevo campo en matemáticas que sigue creciendo (en particular con respecto a las restricciones en forma de ecuaciones diferenciales parciales). [8].

3.3. ¿Porqué control óptimo?

En [7] se explica que el control óptimo es significativamente más rico y más amplio que el cálculo de variaciones, del cual difiere en algunas formas fundamentales.

El cálculo de variaciones trata principalmente con problemas de optimización de la siguiente forma “estándar”:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{Minimizar } I &= \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \\ \text{Sujeto a } q(a) &= \bar{q} \text{ y } q(b) = \hat{q}, \end{aligned}$$

La característica distintiva de estos problemas es que la minimización de (3.1) tiene lugar en el espacio de “todas” las curvas, por lo que no sucede nada interesante en el nivel del conjunto de curvas en cuestión, y surgen todas las características no triviales del problema del lagrangiano L.

Los problemas de control óptimo, por el contrario, implican una minimización sobre un conjunto de curvas C , que a su vez está determinada por algunas restricciones dinámicas. Por ejemplo, C podría ser el conjunto de todas las curvas $t \rightarrow q(t)$ que

satisfacen una ecuación diferencial

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t), t)$$

para alguna elección de la “función de control” $t \rightarrow u(t)$. Más precisamente, dado que puede suceder que un miembro de C no determine únicamente el control u que lo genera, deberíamos estar hablando de pares de trayectoria-control $(q(\cdot), u(\cdot))$. Entonces, en un problema de control óptimo, hay al menos dos objetos que le dan una estructura interesante a la situación, a saber, la dinámica f y la función I que deben minimizarse. En particular, la teoría de control óptimo contiene, en el extremo opuesto al cálculo de variaciones, problemas en los que el “Lagrangiano” $L = 1$, es decir, completamente trivial, y por lo tanto, toda la acción interesante ocurre debido a la dinámica f .

En este marco, podemos establecer la primera de nuestras razones para afirmar que el problema de Brachystochrone (de las palabras griegas, el tiempo más corto) marca el nacimiento del control óptimo. El problema de Brachystochrone es el primero en tratar con un comportamiento dinámico y solicitar explícitamente la selección óptima de una ruta. Finalmente, y lo más importante, una gran parte de la historia posterior del cálculo de variaciones puede entenderse mejor como la búsqueda de la declaración más simple y más general de las condiciones necesarias para la optimalidad, y esta declaración es proporcionada por el principio del máximo de la teoría del control óptimo [7].

Bryson (1996), también uno de los pioneros del control óptimo, realizó un estudio principalmente, las contribuciones de los Estados Unidos al control óptimo de 1950 a 1985, particularmente desde el punto de vista de un ingeniero aeroespacial.

En 2005, Krotov y Kurzhanski dieron, una retrospectiva de sabor subjetivo a la teoría de control desde la perspectiva aeroespacial, con un enfoque especial en los autores orientales [7].

4. PRELIMINARES

La teoría del control óptimo se ocupa de los problemas de optimización que involucran un sistema dinámico controlado. Para los problemas de control determinista, muchos se pueden convertir en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias [12]. Un modelo básico de un sistema dinámico es el siguiente

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & (t > 0) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

donde $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es el punto inicial y f es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . Lo desconocido es la curva $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, se interpreta como la evolución dinámica del estado de algún “sistema”.

Para controlar el sistema, se generaliza un poco y podemos suponer ahora que f depende también de algunos parámetros de “control” que pertenecen a un conjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^m$; obteniendo así, la evolución del sistema cuando el parámetro se establece constantemente en un valor controlado a [3].

En general, si se tiene una función $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{K}$ un control, que corresponde a

cada estado controlado a , esta dado por

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) & (t > 0) \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

se considera la trayectoria $x(t)$ como la respuesta correspondiente del sistema [3].

En la mayoría de trabajos mencionados en este documento, se estudian problemas de dimensión finita basados en modelos en ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

Según [4], un problema de control cuenta con los siguientes elementos básicos.

- (1) Una función de control u que se elige de acuerdo a nuestro interés, la cual puede ser seleccionada dentro de alguna familia de controles factibles \mathbb{K} , en particular el caso $\mathbb{K} = L^2(\Omega)$ es frecuente.
- (2) El estado y del sistema a ser controlado, el cual depende del control. Algunas limitaciones pueden ser impuestas en el estado y , en términos matemáticos $y \in \mathbb{C}$, lo que significa que no todos los estados posibles del sistema son satisfactorios, ya que la función u , trata de aproximar la respuesta al valor dado.
- (3) Una ecuación de estado que establece la dependencia entre el control y el estado. La ecuación de estado es una ecuación diferencial parcial, siendo y la solución de la ecuación y u una función que surge en la ecuación, de modo que cualquier cambio en el control u produzca un cambio en la solución y . Sin embargo, el origen de la teoría de control estaba relacionado con el control de los sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias y existe una gran actividad en este campo [4].
- (4) Una función a ser minimizada, llamada función objetivo o función de costo, dependiente del control y el estado $J(y, u)$.

El objetivo es determinar un control admisible, llamado control óptimo, esto provee un estado satisfactorio y minimiza el valor de la función $J(y, u)$. La pregunta base para este estudio es la existencia de la solución y su cálculo [4].

Cuando el sistema analizado no es convexo, el algoritmo de optimización típicamente provee un mínimo local, la pregunta ahora es: ¿Este mínimo local es significativo para el problema de control original? [4].

Los pasos que se muestran a continuación se pueden seguir en el estudio de un problema de control óptimo:

- (1) existencia de una solución,
- (2) condiciones de optimalidad de primer y segundo orden,
- (3) aproximación numérica y
- (4) resolución numérica del problema de control discreto.

Como un problema modelo, la ecuación de estado será ecuación diferencial parcial elíptica semi lineal [4].

5. EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN

5.1. Ajuste del problema de control.

Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^n ($n = 2o3$), Γ siendo su frontera el que se asume como regular; $C^{1,1}$ es suficiente para este contenido [4]. En Ω se considera el operador

lineal A definido por:

$$Ay = - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j} (a_{ij}(x) \partial_{x_i} y(x)) + a_0(x) y(x),$$

donde $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ y $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ satisfice:

$$\begin{cases} \exists m > 0 \text{ tal que } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq m |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad y \quad \forall x \in \Omega \\ a_0(x) \geq 0 \text{ c.p.d. } x \in \Omega \end{cases}$$

Ahora, sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona no decreciente de clase C^2 , con $\phi(0) = 0$. Para alguna $u \in L^2(\Omega)$, el problema de Dirichlet

$$(5.1) \quad \begin{cases} Ay + \phi(y) = u \text{ en } \Omega \\ y = 0 \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

tiene solución única $y_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ [4].

El problema de control asociado a este sistema está formulado de la siguiente manera: Sea $\mathbb{K} = \{L^\infty(\Omega) : \alpha \leq u(x) \leq \beta \text{ c.p.d. } x \in \Omega\}$

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } J(u) = \int_{\Omega} L(x, y_u(x), u(x)) dx \\ u \in \mathbb{K} \end{cases}$$

donde $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ y L cumple las siguientes hipótesis:

(H1) $L : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory, y para todo $x \in \Omega$, $L(x, \cdot, \cdot)$ es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 . Además, para cada $M > 0$ y todo $x, x_1, x_2 \in \Omega$ y $y, y_1, y_2, u, u_1, u_2 \in [-M, M]$, se cumplen las siguientes propiedades

$$|L(x, y, u)| \leq L_{M,1}(x), \quad \left| \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, u) \right| \leq L_{M,p}(x),$$

$$\left| \frac{\partial L}{\partial u}(x_1, y, u) - \frac{\partial L}{\partial u}(x_2, y, u) \right| \leq C_M |x_1 - x_2|,$$

$$|L''_{y,x}(x, y, u)|_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \leq C_M,$$

$$|L''_{(y,u)}(x, y_1, u_1) - L''_{(y,u)}(x, y_2, u_2)|_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \leq C_M (|y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|),$$

donde $L_{M,1} \in L^1(\Omega)$, $L_{M,p} \in L^p(\Omega)$, $p > n$, $C_M > 0$, $L''_{y,u}$ es la matriz Hessiana de L con respecto a (y, x) , y $|\cdot|_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}$ es alguna norma matricial.

Para probar la segunda condición de optimalidad y la estimación del error se necesita adicionar la siguiente hipótesis:

(H2) Existe $\Lambda > 0$ tal que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, y, u) \geq \Lambda \quad \forall (x, y, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Observación 5.1. Una función de control típica es

$$(5.2) \quad J(u) = \int_{\Omega} \{|y_u(x) - y_d(x)|^2 + Nu^2(x)\} dx$$

donde $y_d \in L^2(\Omega)$ denota el estado ideal del sistema y $N \geq 0$. El término $\int_{\Omega} Nu^2(x) dx$ puede ser considerado como el término de costo y se dice que el control

es costoso si N es grande, sin embargo, el control es barato si N es pequeño o cero. Desde un punto de vista matemático, la presencia del término $\int_{\Omega} Nu^2(x)dx$, con $N > 0$, tiene un efecto de regularización en el control óptimo. La hipótesis **(H1)** se ha completado, en particular la condición $L_{M,p} \in L^p(\Omega)$. Esta condición juega un papel importante en el estudio de la regularidad del control óptimo. La hipótesis **(H2)** se mantiene si $N > 0$.

Observación 5.2. Otras opciones para el conjunto de controles factibles, en particular el caso $\mathbb{K} = L^2(\Omega)$ es frecuente. Lo importante es que \mathbb{K} sea convexo y cerrado. Además, \mathbb{K} es no acotado, luego se requiere algún supuesto de coercitividad en la función J para asegurar la existencia de una solución.

La existencia de una solución y_u en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ puede ser probado como sigue: Primeramente se trunca ϕ para dar una función en la frontera ϕ_k , por ejemplo

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } |\phi(t)| \leq k, \\ +k & \text{si } \phi(t) > +k, \\ -k & \text{si } \phi(t) < -k. \end{cases}$$

Luego el operador $(A + \phi_k) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ es monótona, continua y coercitiva, por tanto, existe un elemento único $y_k \in H_0^1(\Omega)$ que satisface $Ay_k + \phi_k(y_k) = u$ en Ω . Según [13] al utilizar el método usual es fácil probar que $\{y_u\}_{k=1}^\infty$ esta uniformemente acotada en $L^\infty(\Omega)$, consecuentemente para un k suficientemente grande $\phi_k(y_k) = \phi(y_k)$ y luego $y_k = y_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es la solución del problema (5.1). Por otro lado al incluir $Ay_u \in L^\infty(\Omega)$ implica que la $W^{2,p}$ -regularidad de y_u para cada $p < +\infty$, ver [14]. Finalmente, recordando que \mathbb{K} esta acotada en $L^\infty(\Omega)$, lo que conduce al siguiente resultado

Teorema 5.1. Para algún control $u \in \mathbb{K}$ existe una solución única y_u de (5.1) en $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, para todo $p < \infty$. Además, existe una constante $C_p > 0$ tal que

$$(5.3) \quad \|y_u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p \quad \forall u \in \mathbb{K}$$

Es importante observar que el teorema anterior implica la regularidad de Lipschitz de y_u . De hecho, es suficiente recordar que $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{0,1}(\Omega)$ para algún $p < n$.

5.2. Existencia de una solución. Al estudiar la existencia de una solución del problema (P), se toma como base el siguiente teorema.

Teorema 5.2. . [4] Suponer que L es una función Carathéodory que satisface lo siguiente

A1) Para cada $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $L(x, y, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa.

A2) Para algún $M > 0$ existe una función $\psi_M \in L^1(\Omega)$ tal que $|L(x, y, u)| \leq \psi_M(x)$ c.p.d. $x \in \Omega$, $\forall |y| \leq M$, $\forall |u| \leq M$.

Entonces el problema (P) tiene al menos una solución.

6. CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

Las condiciones necesarias se pueden expresar de diferentes maneras: por ejemplo, la condición de Euler-Lagrange extendida y la inclusión Hamiltoniana totalmente convexificada (de Clarke) [15].

Para un modelo en EDP, la condición de primer orden es una condición necesaria para la optimalidad local, excepto en el caso de problemas convexos, donde es una condición suficiente para la optimalidad global [4].

6.1. Condición de optimalidad de primer orden. La clave para obtener la primera condición de optimalidad está dada por el siguiente lema.

Lema 6.1. [4] : Sea U un espacio de Banach, $\mathbb{K} \subset U$ un subconjunto convexo y $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Suponer que \bar{u} es una solución local del problema de optimización

$$(P) \quad \begin{cases} \min J(u), \\ u \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

y que J tiene derivadas direccionales en \bar{u} . Entonces

$$(6.1) \quad J'(\bar{u}) \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{K}$$

Recíprocamente, si J es una función convexa y \bar{u} es un elemento de \mathbb{K} que satisface (6.1), entonces \bar{u} es un mínimo global de (P).

Teorema 6.1. Sea \bar{u} un mínimo local de (P). Entonces existe $\bar{y}, \bar{\varphi} \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ tal que se cumple las relaciones siguientes

$$(6.2) \quad \begin{cases} A\bar{y} + \phi(\bar{y}) = \bar{u} \text{ en } \Omega, \\ \bar{y} = 0 \text{ en } \Gamma. \end{cases}$$

$$(6.3) \quad \begin{cases} A^*\bar{\varphi} + \phi'(\bar{y})\bar{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial y}(x, \bar{y}, \bar{u}) \text{ en } \Omega, \\ \bar{\varphi} = 0 \text{ en } \Gamma. \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \int_{\Omega} \left\{ \bar{\varphi}(x) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)) \right\} (u(x) - \bar{u}(x)) dx \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{K}$$

De este teorema puede ser deducido un resultado de regularidad del mínimo local.

Teorema 6.2. [4]: Suponer que \bar{u} es un mínimo local de (P) y las hipótesis **(H1)** y **(H2)** se cumplen. Entonces para algún $x \in \Omega$, la ecuación

$$(6.5) \quad \bar{\varphi}(x) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}(x), t) = 0$$

tiene solución única $\bar{t} = \bar{s}(x)$, donde \bar{y} es el estado asociado para \bar{u} y $\bar{\varphi}$ es el estado adjunto definido por (6.3). El mapeo $\bar{s} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es de Lipschitz. Además, \bar{u} y \bar{s} están relacionados por la fórmula

$$(6.6) \quad \bar{u}(x) = \text{Proy}_{[\alpha, \beta]}(\bar{s}(x)) = \max(\alpha, \min(\beta, \bar{s}(x))),$$

y \bar{u} también es de Lipschitz.

Observación 6.1. Si la suposición **(H2)** no se cumple, entonces los controles óptimos pueden ser discontinuos. El caso más obvio es cuando L es independiente de u , en este caso 6.4 se reduce a

$$\int_{\Omega} \bar{\varphi}(x)(u(x) - \bar{u}(x))dx \geq 0 \quad \in \mathbb{K}$$

lo que lleva a

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \bar{\varphi}(x) > 0, \\ \beta & \text{si } \bar{\varphi}(x) < 0. \end{cases} \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega$$

Si $\bar{\varphi}$ se anula en un conjunto de puntos de medida cero, entonces \bar{u} salta de α a β . Tal control \bar{u} es llamado control bang-bang. Todos los resultados presentados anteriormente son válidos sin el supuesto **(H2)**, excepto el teorema (6.1) [4].

6.2. Condición de optimalidad de segundo orden. Sea \bar{u} un mínimo local de (P), \bar{y} y $\bar{\varphi}$ el estado asociado y el estado adjunto respectivamente. Por simplicidad de notación se considera la función

$$\bar{d}(x) = \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x)) + \bar{\varphi}(x).$$

De (6.4) se tiene que

$$(6.7) \quad \bar{d}(x) = \begin{cases} 0 & \text{c.p.d. } x \in \Omega \text{ si } \alpha < \bar{u}(x) < \beta, \\ \geq 0 & \text{c.p.d. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \alpha, \\ \leq 0 & \text{c.p.d. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \beta. \end{cases}$$

El siguiente cono de direcciones críticas es esencial en la formulación de las condiciones de optimalidad de segundo orden.

$$C_{\bar{u}} = \{v \in L^2(\Omega) \text{ satisface (6.8) y } v(x) = 0 \text{ si } \bar{d}(x) \neq 0\}$$

tal que

$$(6.8) \quad v(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{c.p.d. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \alpha, \\ \leq 0 & \text{c.p.d. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \beta. \end{cases}$$

Ahora pueden ser formuladas las condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad.

Teorema 6.3. Bajo las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, si $\bar{u} \in \mathbb{K}$ es un mínimo local de (P), y satisface la condición de optimalidad de primer orden, y también (6.2)-(6.4), entonces

$$(6.9) \quad J(u) \geq J(\bar{u}) + \frac{\delta}{2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in \mathbb{K} \cap \bar{B}_{\epsilon}(\bar{u}),$$

donde $\bar{B}_{\epsilon}(\bar{u})$ es la bola cerrada unitaria en $L^{\infty}(\Omega)$ con centro en \bar{u} y radio ϵ , y se puede afirmar que \bar{u} es un mínimo local para todo $v \in C_u \setminus \{0\}$ y

$$(6.10) \quad \text{existe } \delta > 0 \text{ y } \tau > 0 / J''(\bar{u})v^2 \geq \delta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in C_{\bar{u}}^{\tau},$$

donde

$$C_{\bar{u}}^{\tau} = \{v \in L^2(\Omega) \text{ satisface (6.8) y } v(x) = 0 \text{ si } |\bar{d}(x)| > \tau\}.$$

.

Esto quiere decir que u , se encuentra en la vecindad de \bar{u} ya que u pertenece a la intersección $\mathbb{K} \cap \bar{B}_\epsilon(\bar{u})$, por tanto $\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 < \epsilon$.

Observación 6.2. El hecho que el control u aparezca linealmente en la ecuación de estado y la hipótesis **(H2)** ha sido crucial para deducir las condiciones de optimalidad de segundo orden. Como consecuencia de ambos supuestos, la función $J''(\bar{u})$ es una forma cuadrática de Legendre en $L^2(\Omega)$, lo que permite seguir el método de prueba utilizado en la optimización finito dimensional. En ausencia de uno de estos supuestos, la condición (6.9) no es suficiente para asegurar la optimalidad [4].

7. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

En comparación con las complejidades y sutilezas del desarrollo teórico, la historia de las técnicas de solución numérica es relativamente sencilla. Hay esencialmente tres enfoques para resolver estos problemas:

- (1) solución del problema de valor de límite de dos puntos dada por las condiciones necesarias
- (2) completar la discretización del problema, convirtiéndolo en un programa no lineal finito dimensional y
- (3) parametrización finita de la trayectoria de control, convirtiendo nuevamente el problema en un programa no lineal, pero con las funciones objetivo y de restricción evaluadas mediante la integración de las ecuaciones del sistema y sus gradientes con respecto a los parámetros de control mediante la integración de las ecuaciones adjuntas o ecuaciones de sensibilidad [16].

A través de la historia se han probado varios de métodos para resolver problemas de control óptimo, ver mas detalles en [16].

Hay muchos procesos numéricos diferentes para aproximar un problema de control óptimo. Entre ellos: el barrido hacia atrás hacia adelante, el método Shooter, el método de diferencias finitas, el método de elementos finitos y otros [17].

Aunque la mayoría de los problemas tienen una respuesta teórica, en la práctica es muy difícil de encontrar explícitamente. De ahí la necesidad de procesos numéricos. La principal técnica analítica es proporcionada por el Principio Máximo de Pontryagin, que proporciona condiciones necesarias que el control y el estado deben satisfacer [17].

Los métodos numéricos actuales para resolver esta clase de problemas de control óptimo, generalmente caen en el enfoque de discretizar y luego optimizar o en el de optimizar y luego discretizar [16].

7.1. Aproximación por el método Elementos Finitos de (P). Para hacer más simple la explicación, se asume que Ω es convexo.

Considerar ahora una aproximación basada en el método de elementos finitos de (P).

Asociado con un parámetro h , considere una familia de triangulaciones $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de Ω . Para cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ se asignan dos parámetros $\rho(T)$ y $\sigma(T)$, donde $\rho(T)$ denota el diámetro de T y $\sigma(T)$ es el diámetro de la bola mas grande contenida en T . Se asumen los siguientes supuestos de regularidad habituales en la triangulación.

- (1) Existen dos constantes positivas ρ y σ tal que

$$\frac{\rho(T)}{\sigma(T)} \leq \sigma, \quad \frac{h}{\rho(T)} \leq \rho$$

para cada $T \in \mathcal{T}_h$ y toda $h > 0$.

- (2) Sea el conjunto $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, Ω_h y Γ_h su interior y frontera respectivamente. Se asume que los vertices de \mathcal{T}_h ubicados en la frontera Γ_h son puntos de Γ . De [4] se sabe que

$$\text{La medida } (\Omega \setminus \Omega_h) \leq Ch^2$$

Asociada a esta triangulación, se define el espacio

$$U_h = \{u \in L^\infty(\Omega_h) \mid u|_T \text{ es constante en cada } T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$Y_h = \{y_h \in C(\bar{\Omega}) \mid y_h|_T \in \mathcal{P}_1, \text{ para cada } T \in \mathcal{T}_h, \text{ y } y_h = 0 \text{ en } \bar{\Omega} \setminus \Omega_h\},$$

donde \mathcal{P}_1 es el espacio formado por los polinomios de grado menor o igual que uno. Para cada $u \in L^2(\Omega)$, se denota por $y_h(u)$ el único elemento de Y_h que satisface

$$(7.1) \quad a(y_h(u), q_h) + \int_{\Omega} \phi(y_h(u)) q_h dx = \int_{\Omega} u q_h dx \quad \forall q_h \in Y_h$$

donde $a : Y_h \times Y_h \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal definida por

$$a(y_h, q_h) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} y_h(x) \partial_{x_j} q_h(x) + a_0(x) y_h(x) q_h(x) \right) dx$$

En otras palabras, $y_h(u)$ es el estado discreto asociado a u . Observe que $y_h = z_h = 0$ en $\Omega \setminus \Omega_h$. Por tanto, las integrales anteriores pueden ser reemplazadas por las integrales en Ω_h . Por tanto, los valores de u en $\Omega \setminus \Omega_h$ no contribuyen al calculo de $y_h(u)$, en consecuencia, se puede definir $y_h(u_h)$ para algún $u_h \in U_h$.

La aproximación finito dimensional de problema de control óptimo (P) se define como sigue

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J_h(u_h) = \int_{\Omega_h} L(x, y_h(u_h)(x), u_h(x)) dx \\ \text{tal que } (y_h(u_h), u_h) \in Y_h \times U_h, \\ \alpha \leq u_h(x) \leq \beta \text{ c.p.d. } x \in \Omega_h. \end{array} \right.$$

Se estudia del problema (P_h) analizando la diferenciabilidad de las funciones involucradas en el problema de control.

Proposición 7.1. [4] Para cada $u \in L^\infty(\Omega)$, problema (7.1) tiene solución única $y_h(u) \in Y_h$, el mapeo $G_h : L^\infty(\Omega) \rightarrow Y_h$, definido por $G_h(u) = y_h(u)$, es de clase C^2 y para todo $v, u \in L^\infty(\Omega)$, $z_h(v) = G'_h(u)v$ es la solución de

$$(7.2) \quad a(z_h(v), q_h) + \int_{\Omega} \phi'(y_h(u)) z_h(v) q_h dx = \int_{\Omega} v q_h dx \quad \forall q_h \in Y_h$$

Finalmente, para cada $v_1, v_2 \in L^\infty(\Omega)$, $z_h(v_1, v_2) = G''(u)v_1v_2 \in Y_h$ es la solución de la ecuación varacional:

$$(7.3) \quad a(z_h(v), q_h) + \int_{\Omega} \phi'(y_h(u))z_h q_h dx = \int_{\Omega} \phi''(y_h(u))z_{h1}z_{h2}q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in Y_h,$$

donde $z_{hi} = G'_h(u)v_i$, $i = 1, 2$.

Proposición 7.2. [4] La función $J_h : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 . Además, para todo $u, v, v_1, v_2 \in L^\infty(\Omega)$

$$(7.4) \quad J'_h(u)v = \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, y_h(u), u) + \varphi_h(u) \right) v dx$$

y

$$(7.5) \quad J''_h(u)v_1v_2 = \int_{\Omega_h} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_h(u), u)z_h(v_1)z_h(v_2) + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial u}(x, y_h(u), u)[z_h(v_1)v_2 + z_h(v_2)v_1] + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(x, y_h(u), u)v_1v_2 - \varphi_h(u)\phi''(y_h(u))z_{h1}z_{h2} \right] dx$$

donde $y_h(u) = G_h(u)$ y $\varphi_h(u) \in Y_h$ es la única solución del problema

$$(7.6) \quad a(q_h, \varphi_h(u)) + \int_{\Omega} \phi'(y_h(u))\varphi_h(u)q_h dx = \int_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_h(u), u)q_h dx \quad \forall q_h \in Y_h,$$

con $z_{hi} = G''_h(u)v_i$, $i = 1, 2$.

Así se comprueba la existencia de una solución del problema (P_h) y estableciendo la condición de optimalidad de primer orden.

Las condiciones de segundo orden son análogas a las probadas para el problema (P) y pueden obtenerse mediante los métodos clásicos de optimización de dimensión finita. Sea

$$\mathbb{K}_h = \{u_h \in U_h : \alpha \leq u_h|_T \leq \beta \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Teorema 7.1. [4]: Para cada $h > 0$, el problema (P_h) tiene al menos una solución. Si \bar{u}_h es un mínimo local de (P_h) , entonces existe $\bar{y}_h, \bar{\varphi}_h \in Y_h$ tal que

$$(7.7) \quad a(\bar{y}_h, q_h) + \int_{\Omega} \phi(\bar{y}_h)q_h(x)dx = \int_{\Omega} \bar{u}_h(x)q_h(x)dx \quad \forall q_h \in Y_h,$$

$$(7.8) \quad a(q_h, \bar{\varphi}_h) + \int_{\Omega} \phi'(\bar{y}_h)\bar{\varphi}_h q_h dx = \int_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial y}(x, \bar{y}_h, \bar{u}_h)q_h dx \quad \forall q_h \in Y_h,$$

$$(7.9) \quad \int_{\Omega_h} \left\{ \bar{\varphi}_h + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}_h, \bar{u}_h) \right\} (u_h - \bar{u}_h) dx \geq 0 \quad \forall u_h \in \mathbb{K}_h.$$

donde (7.7) - (7.9) son sistemas optimizados. La existencia de una solución es consecuencia inmediata de la compacidad de \mathbb{K}_h en U_h y la continuidad de J_h en \mathbb{K}_h [4].

Estos sistemas optimizados dependen del valor \bar{u}_h , pero según [18], el valor \bar{u}_h puede despejarse de los sistemas optimizados.

Bajo las hipótesis **(H1)** y **(H2)**, entonces para cada $T \in \mathcal{T}_h$ la ecuación

$$(7.10) \quad \int_T [\bar{\varphi}_h(x) + \frac{\partial L}{\partial u}(x, \bar{y}_h(x), t)] dx = 0,$$

tiene solución única $\bar{t} = \bar{s}_T$. El mapeo $\bar{s}_h \in U_h$, definido por $\bar{s}_h|_T = \bar{s}_T$. Ésta es solución para el estado adjunto, ahora para encontrar \bar{u}_h , esta relacionado por la fórmula

$$(7.11) \quad \bar{u}_h = \text{Proj}_{[\alpha, \beta]}(\bar{s}_h(x)) = \max(\alpha, \min(\beta, \bar{s}_h(x))).$$

donde la existencia de la solución única es una consecuencia de la hipótesis **(H2)** [4].

Como se mencionó antes, la ecuación (7.10) solo depende del estado \bar{y}_h y del estado adjunto $\bar{\varphi}_h$. Finalmente se obtiene el valor de la solución \bar{u}_h mediante la ecuación (7.11).

7.2. Convergencia de la aproximación. .

Lema 7.1. Sea $(v, v_h) \in L^\infty(\Omega) \times U_h$ que satisface $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ y $\|v_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq M$. Se asume que y_v y $y_h(v_h)$ son la solución de (5.1) y (7.2) correspondientes a v y v_h respectivamente. Además, sea φ_v y $\varphi_h(v_h)$ la solución de (6.6) y (7.7) correspondientes a v y v_h respectivamente. Entonces, las siguientes estimaciones se cumplen

$$(7.12) \quad \|y_v - y_h(v_h)\|_{H^1(\Omega)} + \|\varphi_v - \varphi_h(v_h)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(h + \|v - v_h\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$(7.13) \quad \|y_v - y_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_v - \varphi_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(h^2 + \|v - v_h\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

$$(7.14) \quad \|y_v - y_h(v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi_v - \varphi_h(v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(h^2 + \|v - v_h\|_{L^2(\Omega_h)}),$$

donde $C \equiv C(\Omega, n, M)$ es una constante positiva independiente de h .

Se puede observar que las soluciones encontradas en el problema discretizado (P_h) , son una aproximación de las soluciones del problema original (P) , lo que implica que existe un error estimado en las soluciones encontradas en (P_h)

Lema 7.2. Sea $\{u_h\}_{h>0}$ una sucesión, con $u_h \in \mathbb{K}_h$ y $u_h \rightharpoonup u$ débilmente en $L^1(\Omega)$, entonces $y_h(u_h) \rightharpoonup y_u$ y $\varphi_h(u_h) \rightharpoonup \varphi_u$ en $H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ fuertemente. Además $J(u) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} J_h(u_h)$.

Observe que u_h solo está definido en Ω_h , entonces es necesario precisar que $u_h \rightharpoonup u$ débilmente en $L^1(\Omega)$. Esto significa que

$$\int_{\Omega_h} \psi u_h dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi u dx \quad \forall \psi \in L^\infty(\Omega).$$

Dado que la medida de $\Omega \setminus \Omega_h$ tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$, entonces la propiedad anterior es equivalente a

$$\int_{\Omega_h} \psi \tilde{u}_h dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi u dx \quad \forall \psi \in L^\infty(\Omega).$$

para cualquier extensión uniformemente limitada \tilde{u}_h de u_h a Ω .

Teorema 7.2. [4]: Asumir que **(H1)** Y **(H2)** se cumplen. Para cada $h > 0$, sea \bar{u}_h una solución de (P_h) . Entonces, existe una subsucesión de $\{\bar{u}_h\}_{h>0}$ convergiendo en la topología débil* de $L^\infty(\Omega)$, que será denotada en la misma forma. Si $\bar{u}_h \rightarrow \bar{u}$ en la topología mencionada, entonces \bar{u} es una solución de (P) y las siguientes identidades son válidas

$$(7.15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} J_h(\bar{u}_h) = J(\bar{u}) = \inf(P) \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} = 0.$$

De cierta manera, el siguiente resultado es el recíproco del teorema anterior. La pregunta que se formula ahora es si un mínimo local u de (P) puede ser aproximado por un mínimo local u_h de (P_h) . La respuesta es positiva si el mínimo local u es estricto. Seguidamente, $B_\rho(u)$ denotará la bola abierta de $L^\infty(\Omega)$ con el centro en u y el radio ρ . $\bar{B}_\rho(u)$ denotará la bola cerrada correspondiente.

Teorema 7.3. [4]: Suponga que **(H1)** y **(H2)** se mantienen. Sea \bar{u} un mínimo local estricto de (P). Entonces existe $\epsilon > 0$ y $h_0 > 0$, de manera que (P_h) tiene un mínimo local $\bar{u}_h \in B_\epsilon(\bar{u})$ para cada $h < h_0$. Además, se mantienen las convergencias (7.16).

Cuando h_0 es más pequeño, $\bar{u}_h \rightarrow \bar{u}$, esto implica que cuando $h \rightarrow 0$, \bar{u}_h converge a la solución.

7.3. Estimación del error. Suponer que se mantienen las hipótesis **(H1)** y **(H2)** y \bar{u} representa un mínimo local de (P), satisfaciendo la condición de segundo orden suficiente para la optimalidad (6.9). $\{\bar{u}_h\}_{h>0}$ denota una sucesión de mínimos locales de problemas (P_h) tal que $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \rightarrow 0$; Recordar los teoremas 7.2 y 7.3 Lo que se pretende es estimar el error $\bar{u} - \bar{u}_h$ en la norma de $L^2(\Omega_h)$ y $L^\infty(\Omega_h)$ respectivamente. Para esto se va a mencionar tres lemas previos. Por conveniencia, se extenderá \bar{u}_h a Ω para tomar $\bar{u}_h(x) = \bar{u}(x)$ para cada $x \in \Omega$.

Lema 7.3. [4]: Sea $\delta > 0$ como en el teorema 6.12. Entonces existe $h_0 > 0$ tal que

$$(7.16) \quad \frac{\delta}{2} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (J'(\bar{u}_h) - J'(\bar{u}))(\bar{u}_h - \bar{u}) \quad \forall h < h_0$$

El siguiente paso consiste en estimar la convergencia de J'_h a J' .

Lema 7.4. [4]: Existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que, para cada $u_1, u_2 \in \mathbb{K}$ y cada $v \in L^2(\Omega)$ la desigualdad siguiente se cumple

$$(7.17) \quad |(J'_h(u_2) - J'(u_1))v| \leq C\{h + \|u_2 - u_1\|_{L^2(\Omega)}\} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Un punto clave en la derivación del error estimado es obtener una buena aproximación de \bar{u} para un control discreto $u_h \in \mathbb{K}_h$ que satisface $J'(\bar{u})\bar{u} = J'(\bar{u})u_h$. Se define el control u_h y se prueba que si cumple las condiciones requeridas. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$ el conjunto

$$I_T = \int_T \bar{d}(x) dx$$

Se define $u_h \in U_h$ con $u_h|_T = u_{hT}$ para cada $T \in \mathcal{T}_h$ dada por la expresión

$$(7.18) \quad u_{hT} = \begin{cases} \frac{1}{I_T} \int_T \bar{d}(x) \bar{u}(x) dx & \text{si } I_T \neq 0, \\ \frac{1}{m(T)} \int_T \bar{u}(x) dx & \text{si } I_T = 0. \end{cases}$$

Si se extiende esta función a Ω tomando $u_h(x) = \bar{u}(x)$ para cada $x \in \Omega \setminus \Omega_h$. Esta función u_h satisface los requerimientos.

Lema 7.5. : Existe $h_0 > 0$ tal que para cada $0 < h < h_0$ se cumplen las siguientes propiedades

- (1) $u_h \in \mathbb{K}_h$.
- (2) $J'(\bar{u})\bar{u} = J'(\bar{u})u_h$
- (3) Existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$(7.19) \quad \|\bar{u} - u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch.$$

Como se mencionó antes, la propiedad (1) de 7.5 dice que u_h debe pertenecer a \mathbb{K}_h , ya que en éste se incluyen todas las soluciones factibles para el problema que se esta trabajando, también se aplica al caso discreto.

Se tiene que cuando $h \rightarrow 0$ la aproximación de la solución en el sistema discreto es más exacta, lo que implica que el error es cada vez menor, por tanto, existe una discretización donde h es lo suficientemente pequeño, tal que se cumple la propiedad (2) del lema 7.5.

La propiedad (3), garantiza que el valor u_h es el más cercano a \bar{u} en $L^\infty(\Omega_h)$, para $1 < C \leq 1$.

Teorema 7.4. [4]: Existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$(7.20) \quad \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch$$

Para encontrar el error estimado en $L^2(\Omega)$.

El teorema 7.4 muestra que es necesario que la norma en $L^2(\Omega)$ debe ser menor que Ch , para $0 < C \leq 1$, ya que si C es mayor, se tomaría el siguiente valor de h en la discretización más cercano a \bar{u} , éste nuevo valor h daría un error menor y no el valor evaluado, por tanto, 7.4 debe cumplirse.

Teorema 7.5. [4]: Existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$(7.21) \quad \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch$$

Para encontrar el error estimado en $L^\infty(\Omega)$.

Al igual que lo mencionado en el teorema 7.4, la norma en $L^\infty(\Omega)$ debe ser menor que Ch , para la discretización en $L^\infty(\Omega)$, de lo contrario \bar{u}_h no sería el valor óptimo.

8. PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La programación dinámica es un enfoque muy poderoso para estudiar problemas de optimización dinámica. El principio fundamental de la programación dinámica, el llamado principio de optimalidad, se puede decir de manera muy simple: "Si una trayectoria óptima se divide en dos partes, la última pieza es en sí misma óptima" [19].

La discretización por diferencias finitas es un método bien conocido para discretizar las EDP continuas en una estructura discreta adecuada para la implementación numérica en computadoras con aritmética de precisión finita, es más conveniente utilizar el método de elementos finitos en el espacio si el problema considerado tiene un dominio general, como un polígono convexo [20].

8.1. Métodos iterativos para resolver sistemas lineales. Contrariamente a los métodos directos, que teóricamente producen la solución exacta después de un número limitado de pasos algorítmicos (en aritmética exacta), los métodos iterativos construyen una secuencia de aproximaciones de soluciones que convergen a la única solución exacta de un sistema lineal. En términos generales, podemos clasificar los métodos iterativos en tres grupos:

- Métodos estacionarios: Jacobi, Gauss-Seidel, etc . Éstos métodos resuelven un sistema lineal con un operador que se aproxima al original; y basándose en la medida de error (el residuo), desde una ecuación de corrección para la que se repite este proceso. Mientras que estos métodos son sencillos de derivar, implementar y analizar, la convergencia normalmente sólo está garantizada para una clase limitada de matrices [21].
- Métodos de cuadrícula múltiple: Cuadrícula múltiple geométrica, cuadrícula múltiple algebraica.
Éstos métodos se basan en métodos iterativos estacionarios al realizar algunas de estas iteraciones en una jerarquía de discretizaciones de varios niveles. A menudo pueden lograr una complejidad óptima de tiempo y espacio al resolver la solución numérica de las EDP elípticas. Además, se han utilizado con éxito en un esquema de EDP parabólicas de paso en el tiempo, o se han aplicado directamente a EDP dependientes del tiempo en el marco de multirredes espacio-tiempo [20].
- Métodos no estacionarios: métodos subespaciales de Krylov, etc .
Éstos métodos forman una base ortogonal de la secuencia de potencias de la matriz por el residuo inicial (la secuencia de Krylov). Las aproximaciones a la solución se forman minimizando el residuo en el subespacio formado. El método prototípico de esta clase es el método de gradiente conjugado. Otros métodos son el método del residuo mínimo generalizado y el método del gradiente biconjugado [21].

8.2. Métodos iterativos para resolver sistemas no lineales. El método iterativo más importante para resolver sistemas no lineales es el método de Newton, que a menudo conduce a una convergencia local superlineal o cuadrática, siempre que la estimación inicial sea lo suficientemente cercana a la verdadera solución. Sin embargo, dicho método de Newton no se puede aplicar directamente cuando el operador del sistema no es continuamente diferenciable de Frechet. Como un algoritmo iterativo altamente eficiente, el método cuadrícula múltiple (FAS) es

una generalización no lineal del método de cuadrícula múltiple lineal, Proporciona un enfoque poderoso para manejar ecuaciones no lineales sin la linealización global requerida por el método de Newton. A diferencia del método de Newton, normalmente no hay necesidad de inicializar el solucionador con una muy buena estimación inicial [20].

9. CONCLUSIONES

A la vista del estudio, se observa que ésta teoría puede ser aplicada a un problema debidamente planteado, que cumplan con las condiciones necesarias requeridas por la teoría de control óptimo. Ésta teoría se ha desarrollado en los modelos de sistemas dinámicos en EDO y EDP. Existe una extensa literatura sobre esta teoría y su aplicación en la vida real, por lo que es un campo de la matemática a seguir siendo estudiado para mejorar la utilización de los recursos disponibles en el área donde sea aplicada.

Este trabajo ha propuesto una revisión general del estado del conocimiento de la forma como se resuelve una problema de control óptimo para un sistema dinámico. En este trabajo se toma como base el artículo [4] ya que tiene un resumen preciso sobre la teoría de control óptimo para los fines de divulgación de este tema, junto a otros documentos relevantes para dar una mejor explicación de la teoría de control óptimo.

REFERENCES

- [1] Enrique Fernández Cara and Enrique Zuazua Iriondo. Control theory: History, mathematical achievements and perspectives. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 26, 79-140., 2003.
- [2] Alberto Becerra Tomé. Resultados teóricos y numéricos para problemas de control gobernados por edos y edps. 2018.
- [3] Ugo Boscain and Benetto Piccoli. An introduction to optimal control. *Contrôle non linéaire et applications, Herman, Paris*, pages 19–66, 2005.
- [4] Eduardo Casas. *Optimal control of pde theory and numerical analysis*. PhD thesis, Optimization and Control, 2006.
- [5] Alcalá Valdivia, Santiago López, Lozano Romo, Villa Sandoval, et al. Optimal control applied to the economy of mineral resources. *Terra Latinoamericana*, 28(3):265–272, 2010.
- [6] Nancy Dávila-Cárdenes. *Análisis económico de pesquerías mediante la teoría del control óptimo: una aplicación al modelo predador-presa*. PhD thesis, 1996.
- [7] Hector J Sussmann and Jan C Willems. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(3):32–44, 1997.
- [8] Hans Josef Pesch, Michael Plail, and D Munich. The maximum principle of optimal control: a history of ingenious ideas and missed opportunities. *Control and Cybernetics*, 38(4A):973–995, 2009.
- [9] Magnus Rudolph Hestenes. Numerical methods of obtaining solutions of fixed end-point problems in the calculus of variations. 1949.
- [10] Magnus Rudolph Hestenes. A general problem in the calculus of variations with applications to paths of least time. Technical report, RAND CORP SANTA MONICA CA, 1950.
- [11] VF Krotov and Alexander B Kurzanski. National achievements in control theory: the aerospace perspective. *Annual Reviews in Control*, 29(1):13–31, 2005.
- [12] J.R. Newman. Deterministic optimal control.

- [13] Guido Stampacchia. Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 15, pages 189–257, 1965.
- [14] P Grisvard. Elliptic problems in nonsmooth domains, pitman, boston, london, melbourne, 1985. *MR 86m*, 35044.
- [15] Nathalie Khalil. *Optimality conditions for optimal control problems and applications*. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale-Brest, 2017.
- [16] RWH Sargent. Optimal control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1-2):361–371, 2000.
- [17] Garrett Robert Rose. Numerical methods for solving optimal control problems. 2015.
- [18] Fredi Tröltzsch. Optimal control of partial differential equations, volume 112 of graduate studies in mathematics. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2010.
- [19] Mrinal Kanti Ghosh. Optimal control theory.
- [20] Jun Liu. New computational methods for optimal control of partial differential equations. 2015.
- [21] Atlantic International University , <http://cursos.aiu.edu/Metodos>.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOM DE HONDURAS, CIUDAD
UNIVERSITARIA, HONDURAS.
E-mail address: `aner.godoy@unah.hn`

CRITICALIDAD AUTO-ORGANIZADA: EL MODELO BTW

DARWIN E. QUIROZ

RESUMEN. En este trabajo se estudia el concepto de la criticalidad autoorganizada (SOC) tomando como base el modelo de pila de arena Bak-Tang-Wiesenfeld que muestra el comportamiento de SOC. Se calculó el exponente crítico α para el modelo bidimensional, el cual hemos concordado con el resultado conocido. Además se realizaron simulaciones con parámetros diferentes de los utilizados en el documento original y se obtuvieron las mismas distribuciones de ley potencial, lo que está de acuerdo con la idea de la invarianza de escala del estado de SOC.

1. INTRODUCCIÓN

La criticalidad autoorganizada (SOC por sus siglas en inglés, Self Organized Criticality), describe como grandes sistemas dinámicos tienden a un estado crítico. SOC es una propiedad de los sistemas dinámicos para organizar su comportamiento microscópico para que sea independiente de la escala espacial (y/o temporal). Estos sistemas, llamados complejos contienen muchas partes altamente interconectadas e interactivas. El estudio de estos sistemas dinámicos son de gran importancia debido a que en la naturaleza surgen fenómenos con estas características tales como los terremotos y los deslizamientos de tierra [4], así también en fenómenos sociales tales como el tráfico vehicular de una ciudad [8]. A pesar de la complejidad, estos sistemas exhiben simples propiedades estadísticas gobernadas por la ley potencial (power law). Por ejemplo, el número de eventos D en función de su tamaño s (donde es menos probable que ocurra un gran evento en comparación con uno más pequeño) viene dado por,

$$(1.1) \quad D(s) = As^{-\alpha},$$

donde A es una constante y α es el exponente que describe las características estadísticas de un estado SOC.

En este trabajo se realizará una revisión general al concepto de criticalidad autoorganizada y otros conceptos de los sistemas complejos, basado en un análisis del modelo que dio origen a este concepto, a saber el modelo de la pila de arena propuesto por Bak et al. [1]. El modelo de la pila de arena permite avistar el concepto SOC en un sistema dinámico complejo, por lo que uno de los objetivos principales es poder comprender cada una de las propiedades del modelo así como las leyes que rigen dicho sistema. En este trabajo se comienza con una reseña de el concepto SOC, luego se describe en forma detallada el modelo BTW, definiendo condiciones iniciales y tipos de condiciones de frontera a considerar en el modelo, además se

Date: 22/08/2019.

Key words and phrases. criticalidad autoorganizada, modelo BTW, autómatas celulares, ley potencial.

definen las funciones distribución para realizar el análisis estadístico del comportamiento del sistema, para finalizar se realizan diferentes simulaciones y se presentan los resultados que garantizan que el modelo BTW es un sistema que muestra un comportamiento de SOC.

2. JUSTIFICACIÓN

La presente investigación se enfocará en estudiar, comprender y desarrollar conceptos relacionados a la criticalidad autoorganizada y autómatas celulares con el propósito de crear modelos matemáticos que nos permita modelar sistemas dinámicos que surgen en la naturaleza y en la sociedad. En la actualidad de nuestra sociedad se tienen diferentes problemas, tal como la sobrepoblación de ciudades, debido a esto los recursos naturales tienden a escasear, esto lleva a la racionalización de dichos recursos. La erosión de la tierra incrementa debido a la excesiva producción de alimentos, además, al no haber tierras fértiles se procede a la tala de bosques para el cultivo o para el uso de la madera. Esto incrementa el riesgo de deslizamientos de tierra en ciertas regiones. En nuestras ciudades la construcción de nuevas residencias incrementa, aumentando así el flujo de vehículos en las vías, provocando atascos en la mayoría de las vías. Las soluciones aplicadas actualmente al problema de atascos en el tráfico vehicular es construir puentes, ampliar las vías, instalar semáforos en ciertas intersecciones, construcción de rotondas, cerrar desvíos. Seleccionar los lugares donde se aplicarán estas soluciones es la parte importante en este proceso, dado que una mala selección llevará a empeorar el problema. Con el propósito de dar soluciones óptimas a los problemas mencionados anteriormente se ha realizado este trabajo que dará las bases para construir modelos que permita llegar a dichas soluciones, por lo que el eje de investigación está orientado al desarrollo económico y social, específicamente al tema de infraestructura y desarrollo territorial. Además, el desarrollo de esta investigación se basa en la modelación matemática, simulaciones computacionales y autómatas celulares.

3. ANTECEDENTES

En el trabajo de Bak et al. en 1987 se expone un modelo simple que evoluciona hacia un estado crítico sin ningún ajuste externo. Este modelo es llamado *pila de arena de Per Bak's*, *modelo Bak-Tang-Wiesenfeld* o *modelo BTW*. El modelo BTW se derivó de un modelo para la dinámica de un arreglo de péndulos acoplados [1]. Pocos meses después, los mismos autores interpretaron el mismo modelo como un autómata celular en términos de la dinámica de una pila de arena [2]. En el año 1995 de forma independiente los trabajos [8] y [7] muestran que un modelo para el tráfico vehicular presenta características SOC. En [5] se presenta un enfoque de autómata celular que involucra dos variables como una extensión bastante sencilla del modelo BTW. En [4] se muestra que las distribuciones de ley de poder de deslizamientos de tierra y desprendimientos de rocas observadas en diversas condiciones sugieren una relación de los movimientos de masas con la criticalidad autoorganizada. Recientemente [6] muestra que las avalanchas de un proceso SOC se pueden utilizar para resolver problemas de optimización no convexos. Para este proceso se utilizan las avalanchas generadas por el modelo de la pila de arena que refleja el grafo del problema de optimización. Luego, asignan las áreas de avalancha a patrones de búsqueda para el problema. Se han identificado muchos sistemas que muestran

SOC desde el artículo original de Bak et al., pero hasta la fecha no se conoce un conjunto de características generales que garanticen que un sistema muestre SOC.

4. EL MODELO BAK-TANG-WIESENFELD

El modelo Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) es un autómata celular donde el estado de la variable discreta z en el tiempo $t + 1$ depende del estado de la variable y sus vecinos en el tiempo t . Se define en un arreglo bidimensional de tamaño lineal L . A continuación, se define una variable entera z que representa la altura o la pendiente de la pila. Se enumeran los sitios con un par de índices (i, j) . El estado de cada sitio se caracteriza por una variable entera no negativa $z(i, j)$. En cada paso de tiempo discreto, se realiza una perturbación no conservativa, es decir, se elige un sitio (i, j) al azar, y $z(i, j)$ se incrementa con la siguiente regla:

$$(4.1) \quad z(i, j) \leftarrow z(i, j) + 1.$$

El modelo BTW supone que no pasa nada mientras $z(i, j) \leq z_c$, donde z_c es llamado el valor crítico, de modo que procedemos con el siguiente paso de tiempo. Si, por otro lado, $z(i, j) > z_c$, el sitio (i, j) se vuelve inestable y se relaja de acuerdo a la regla:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} z(i, j) &\leftarrow z(i, j) - 4, \\ z(i \pm 1, j) &\leftarrow z(i \pm 1, j) + 1, \\ z(i, j \pm 1) &\leftarrow z(i, j \pm 1) + 1, \end{aligned}$$

en otras palabras, cuatro unidades se transfieren uniformemente desde el sitio inestable a sus cuatro vecinos más cercanos. Esta relajación puede causar que algunos vecinos se vuelvan inestables, entonces la avalancha se propaga, de lo contrario se detiene. Una regla muy importante que se debe obedecer al aplicar (4.1) es permitir que ocurran todas las posibles avalanchas dentro del sistema antes de aplicar (4.1) nuevamente. Las avalanchas pueden ser parametrizadas por tres variables:

- s : El número de sitios inestables durante la avalancha.
- a : El área afectada por la avalancha.
- T : La duración de la avalancha.

El número de sitios inestables se define simplemente como el número de sitios que deben relajarse antes de que todos los sitios vuelvan a ser críticos. Aunque a primera vista, parece que el número de sitios inestables s y el área afectada a miden el número de sitios afectados o inestables, se debe recordar que un solo sitio puede ser inestable más de una vez en una sola avalancha, y, por lo tanto, las dos son variables realmente diferentes. La duración de la avalancha (*lifetime*) se define como el número de actualizaciones que se deben realizar en el sistema antes de que todos los sitios se estabilicen después de cada incremento.

La Figura 2 muestra un ejemplo de avalancha en el modelo BTW. Los valores $z(i, j)$ están representados por varios puntos en cada sitio; los sitios inestables están marcados con gris. Durante la avalancha, 28 sitios se volvieron inestables; y tomó 11 ciclos o actualizaciones (duración de la avalancha) de relajación hasta que todos los sitios se estabilizaron nuevamente. Un total de 27 sitios participaron en la avalancha (área afectada); entonces un sitio se volvió inestable dos veces. Para una cuadrícula de 50×50 , la Figura 1 muestra una secuencia típica de avalanchas, ocurren en diferentes lugares y tienen diferentes tamaños de área.

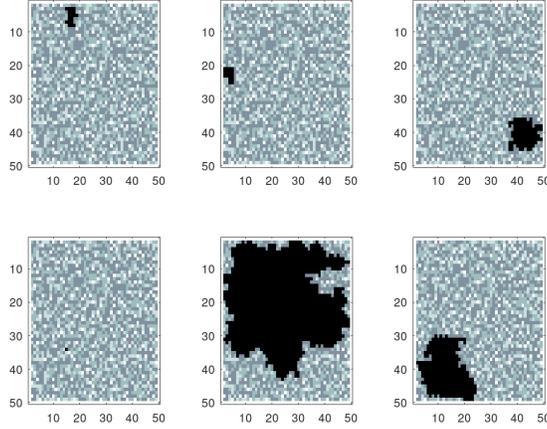


FIGURA 1. Secuencia de avalanchas en una cuadrícula de 50×50 .

4.1. Condición inicial. En el trabajo realizado por Bak et al. [2] se consideran dos tipos:

- *Lejos del valor crítico z_c :* Se eligen condiciones iniciales aleatorias de modo que z excediera el umbral z_c en todas las celdas de la cuadrícula, y se relaja con la regla (4.2) hasta que alcanza un estado estático, es decir, todas las z son menores o iguales que z_c .
- *Una superficie plana:* Se inicia desde una superficie plana, es decir, $z = 0$ para todas las celdas de la cuadrícula.

4.2. Condiciones de frontera. En el trabajo realizado por Bak et al. [1] se consideran dos tipos:

- *Condiciones de frontera cerrada:* La “arena” no puede salir de la caja en $x = 1, x = N, y = 1, y = N$.
- *Condiciones de frontera abierta:* La “arena” puede dejar la caja en dos de los lados, es decir, en $x = N$ e $y = N$.

En este trabajo se aborda el caso de *condiciones de frontera cerrada*, es decir, $z(1, y) = z(N, y) = z(x, 1) = z(x, N) = 0$.

5. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

En el análisis se consideran dos funciones de distribución definidas como sigue:

- Sea $P(s)$ la probabilidad de que el número de sitios inestables durante la avalancha es igual a s .
- Sea $P(T)$ la probabilidad de que la duración de la avalancha es igual a T . La distribución $P(T)$ será ponderada por el valor promedio $\frac{s}{T}$, para más detalles ver [1].

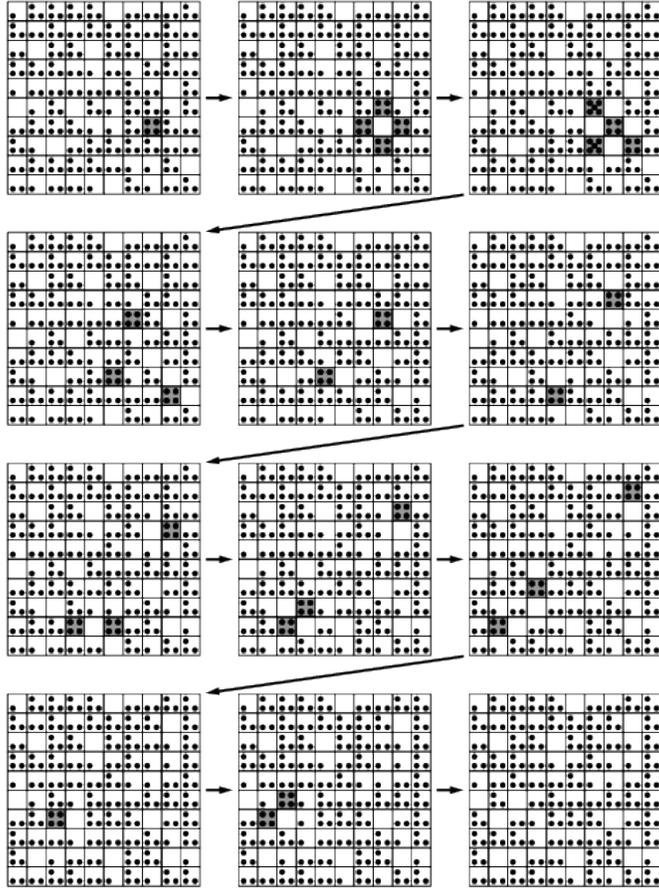


FIGURA 2. Ejemplo de avalancha en el modelo Bak-Tang-Wiesenfeld.(Tomada de [4]).

6. RESULTADOS NUMÉRICOS

El modelo BTW expuesto anteriormente se ha implementado en el lenguaje $C++$ con el objetivo de replicar los resultados obtenidos en [1] y así dar por comprendidas las leyes y propiedades que rigen dicho modelo, las cuales servirán como base para el desarrollo de trabajos futuros.

La implementación se basó en el algoritmo secuencial con dos pilas propuesto en [3], el algoritmo se modificó para permitir el almacenamiento de los datos generados, datos que posteriormente serán ingresados en el software numérico *Octave* para su análisis.

6.1. Condición inicial: Superficie plana. La primera simulación realizada es con condición inicial de superficie plana, comenzando desde una superficie plana, $z = 0$, la pendiente o la presión se incrementa en una unidad (agregar un grano) en una posición aleatoria (x, y) haciendo uso de la regla (4.1), luego z se incrementa en uno en otra posición (x, y) , y así sucesivamente. Cuando z eventualmente excede el valor crítico z_c , en algún lugar, el sistema evoluciona de acuerdo con la regla

(4.2) hasta que se estabiliza nuevamente y se crea un área que involucra s sitios inestables.

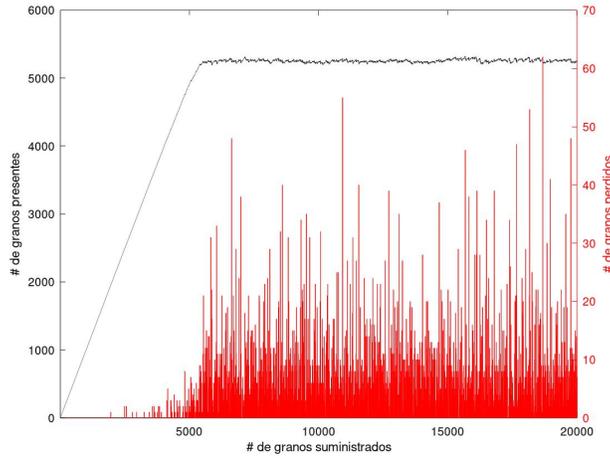


FIGURA 3. Número de granos en la cuadrícula y número de granos perdidos versus el número total de granos suministrados (20,000 granos) en una cuadrícula de 50×50 .

La Figura 3 muestra el número de granos que están presentes en la cuadrícula y número de granos perdidos frente al número total de granos suministrados, comenzando en una cuadrícula vacía de 50×50 .

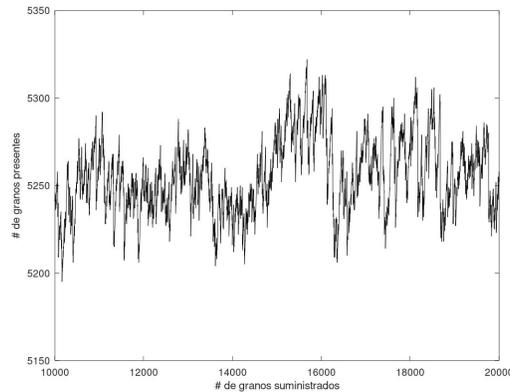


FIGURA 4. Número de granos en la cuadrícula versus el número total de granos suministrados (50,000 granos) en una cuadrícula de 50×50 .

La Figura 4 muestra con más detalle el gráfico mostrado en la Figura 3 en el intervalo $[10000, 20000]$. Después de haber agregado aproximadamente 6000 granos, se ha logrado un equilibrio entre la cantidad de granos suministrados y la cantidad

de aquellos que se pierden a través de las fronteras. En este estado, el número promedio de granos por sitio es de aproximadamente 2.1.

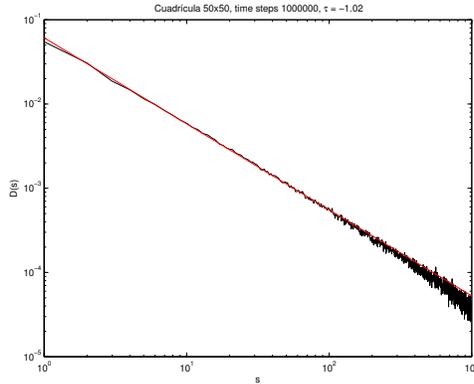


FIGURA 5. Distribución de los tamaños de avalancha para una cuadrícula de 50×50 .

La Figura 5 muestra la gráfica log-log de la distribución $D(s)$ de los tamaños de avalancha para una cuadrícula de 50×50 . La curva es consistente con una línea recta con pendiente $-1,02$, que indica una ley potencial $D(s) \sim s^{-\tau}$, $\tau = 1,02$.

La distribución $D(T)$ ponderada por el valor promedio $\frac{s}{T}$ puede relacionarse con la distribución de tamaños de avalancha por $s \approx T^{1+\gamma}$ y $D(T) \equiv T^{-\alpha}$ [1]. La Figura 6 muestra la gráfica log-log de la distribución $D(T)$ de la duración de la avalancha para una cuadrícula de 50×50 . La curva es consistente con una línea recta con pendiente $-0,48$, que indica que $\alpha = 0,48$ y con $\gamma = 0,52$.

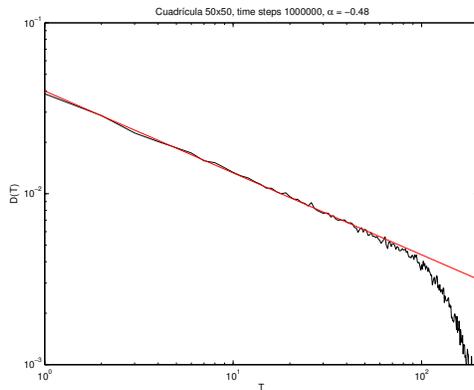


FIGURA 6. Distribución de la duración de la avalancha para una cuadrícula de 50×50 .

6.2. Condición inicial: Lejos del valor crítico z_c . Para la segunda simulación se eligen condiciones iniciales aleatorias tal que $4 \leq z \leq 7$ en todos los sitios, y se relaja con la regla (4.2) hasta que alcanza un estado estático. Las Figuras

7 y 8 muestran la distribución de los tamaños de avalancha y la distribución de la duración de la avalancha respectivamente para una cuadrícula de 50×50 . Al comparar las Figuras 7 y 8 con las Figuras 5 y 6 se tiene que son prácticamente iguales, los valores τ y α difieren en pocas cifras decimales.

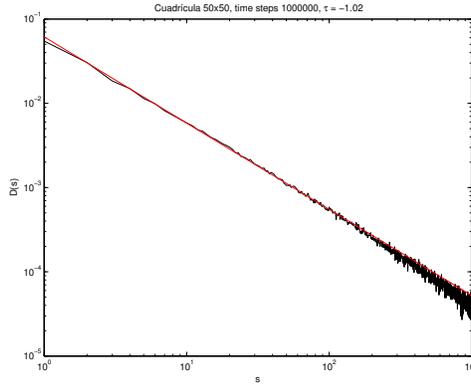


FIGURA 7. Distribución de los tamaños de avalancha para una cuadrícula de 50×50 .

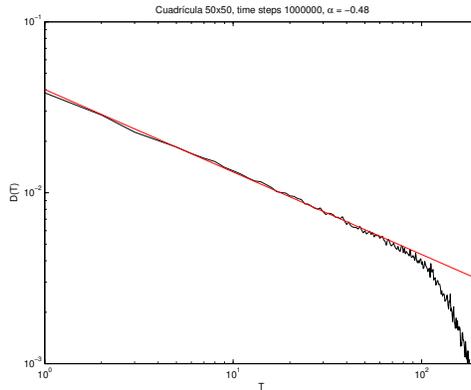


FIGURA 8. Distribución de la duración de la avalancha para una cuadrícula de 50×50 .

7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha descrito el modelo de la pila de arena de Bak-Tang-Wiesenfeld, que fue el primer sistema dinámico que exhibió SOC, con el fin de comprender las propiedades y leyes que rigen dicho modelo. La Figura 3 muestra que se ha logrado un equilibrio, aunque este estado no es un estado estable en sentido estricto como se puede ver en la Figura 4. El número de granos no es constante, dado que fluctúa de manera irregular. Esto indica la aparición de avalanchas de varios tamaños. En este estado, el número promedio de granos por sitio es de aproximadamente 2.1. Además se han realizado simulaciones con el modelo BTW

con parámetros diferentes de los utilizados en el documento original y se obtuvo las mismas distribuciones de la ley de potencia, lo que está de acuerdo con el concepto de la invarianza de escala del estado SOC. Como trabajos futuros se pretende estudiar otros modelos que muestren SOC con el fin de poder hacer un análisis más general en cuanto a propiedades que comparten diferentes sistemas.

REFERENCIAS

- [1] Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59(4):381–384.
- [2] Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K. (1988). Self-organized criticality. *Physical Review A*, 38(1):364–374.
- [3] Frehmel, S. (2010). The sandpile model: parallelization of efficient algorithms for systems with shared memory. pages 35–45.
- [4] Hergarten, S. (2003). Landslides, sandpiles, and self-organized criticality. *Natural Hazards and Earth System Science*, 3(6):505–514.
- [5] Hergarten, S. and Neugebauer, H. J. (2000). Self-organized criticality in two-variable models. *Physical Review E*, 61(3):2382.
- [6] Hoffmann, H. and Payton, D. W. (2018). Optimization by self-organized criticality. *Scientific reports*, 8(1):2358.
- [7] Nagatani, T. (1995). Self-organized criticality and scaling in lifetime of traffic jams. *Journal of the Physical Society of Japan*, 64(1):31–34.
- [8] Paczuski, M. and Nagel, K. (1996). Self-organized criticality and $1/f$ noise in traffic. In *Traffic and granular flow*, pages 73–85.

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAH

Current address: Maestría en Matemática con Orientación en Ingeniería Matemática

E-mail address: darwin.quiroz@unah.edu.hn